Математическое программирование

Л.С. Костевич

Математическое программирование

Информационные технологии оптимальных решений

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов экономических специальностей
высших учебных заведений

МИНСК ООО «НОВОЕ ЗНАНИЕ» 2003

УДК 519.85:004(075.8)
ББК 22.18я73+32.81я73
К72

Рецензенты:

кафедра математических проблем управления Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины (зав. кафедрой – доктор технических наук, профессор *И.В. Максимей*);

зав. кафедрой дискретной математики и алгоритмики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор *М.М. Ковалев*

Костевич Л.С.

К72 Математическое программирование: Информ. технологии оптимальных решений: Учеб. пособие / Л.С. Костевич. — Мн.: Новое знание, 2003. — 424 с.: ил.

ISBN 985-6516-83-8.

Доступно изложено применение линейных, целочисленных, динамических, параметрических, игровых методов и алгоритмов оптимизации в информационных технологиях управления. Рассмотрены вопросы эффективного сетевого планирования, построения оптимальных маршрутов и т.д. Теоретический материал сопровождается примерами решения конкретных задач. Некоторые решения реализованы с помощью электронных таблиц Microsoft Excel.

Для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям, экономистов, менеджеров.

УДК 519.85:004(075.8)
ББК 22.18я73+32.81я73

Учебное издание

Костевич Леонид Степанович

Математическое программирование:
Информационные технологии оптимальных решений

Учебное пособие

Редактор *Т.Р. Джум*
Корректор *К.А. Степанова*
Художник обложки *С.В. Ковалевский*
Компьютерная верстка *Е.Л. Помогаев*

Подписано в печать с готовых диапозитивов 07.07.2003. Формат 70x100 $^1/_{16}$. Бумага газетная. Гарнитура Ньютон. Печать офсетная. Усл. печ. л. 34,45. Уч.-изд. л. 33,16. Тираж 3010 экз. Заказ № 1384.

Общество с ограниченной ответственностью «Новое знание». ЛВ № 310 от 01.07.2003. Минск, ул. Академическая, д. 28, к. 112. Почтовый адрес: 220050, Минск, а/я 79. Телефон/факс: (10-375-17) 211-50-38, 284-03-23. Москва, ул. Маросейка, д. 10/1. Телефон (095) 921-67-21. E-mail: nk@wnk.biz http://wnk.biz

Республиканское унитарное предприятие «Издательство «Белорусский Дом печати». 220013, Минск, пр. Ф. Скорины, 79.

ISBN 985-6516-83-8

ВВЕДЕНИЕ

Математическое программирование представляет собой дисциплину, занимающуюся изучением задач на экстремум функции и разработкой методов и алгоритмов их решения на основе средств вычислительной техники.

В общем виде задачи математического программирования состоят в определении максимального или минимального значения функции

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при ограничениях

$$\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \{\le, =, \ge\}\ b_i,\ (i = \overline{1,m}),$$

где Z и Φ_i — некоторые заданные функции, зависящие от неизвестных параметров $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а b_i — некоторые действительные числа.

В учебном пособии излагаются методы и алгоритмы решения линейных, целочисленных, параметрических, динамических, сетевых, игровых, транспортных и других оптимизационных задач, а также их реализация на ЭВМ.

Наиболее изученными являются задачи с линейными функциями и ограничениями. Для нахождения оптимальных решений этих задач разработаны эффективные методы, алгоритмы и программы для ЭВМ.

В задачах целочисленного программирования на неизвестные параметры налагается требование целочисленности, а в задачах параметрического программирования критерий эффективности или (и) функции, определяющие область допустимых изменений неизвестных величин, зависят от некоторых параметров.

Задачи с многоэтапным процессом нахождения решений относятся к классу динамических задач и т.д.

С учетом экономико-управленческой направленности обучения особое внимание в настоящем пособии уделяется не углубленному математическому обоснованию методов и алгоритмов, а строгому их изложению с рассмотрением вопросов возможного применения при обосновании наиболее эффективных экономических и управленческих решений. Материал настоящего учебного пособия позволит получить полное представление о возможностях практического применения методов математического программирования к реализации (в том числе и на ЭВМ) конкретных экономических, производственных и других задач.

В пособие включено достаточное количество примеров задач прикладного характера. В примерах даны подробные решения с нужными пояснениями, при необходимости проведены анализ и исследование устойчивости полученных решений. Часть примеров решена на ЭВМ.

При написании учебного пособия преследовалась цель — доступно и понятно изложить материал, использовались источники, приведенные в списке литературы, а также сведения, накопленные автором в результате многолетнего опыта педагогической работы в Академии управления при Президенте Республики Беларусь и в Белорусском государственном экономическом университете.

РАЗДЕЛ

Предмет и задачи математического программирования

1. ПРЕДМЕТ, МЕТОД И ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СРЕДЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Развитие современных экономических, производственных и других систем невозможно без эффективного управления, обеспечивающего их переход из одного качественного состояния в другое, в соответствии с определенными целями и задачами. Процесс управления всеми звеньями системы предусматривает необходимость выработки наилучших (оптимальных) управленческих решений. Если ранее процесс принятия решений основывался на квалификации, опыте и интуиции руководителей и специалистов, то в настоящее время, при усложнении задач принятия решений, при необходимости оперативного использования разнообразной информации о тех или иных происходящих процессах, включая и информацию международных банков данных и знаний, касающуюся экономических, научно-технических, социально-политических проблем, он превратился в науку управления, которую успешно может применять каждый управленец, владеющий ее принципами и методами.

Подавляющее количество управленческих проблем и задач, по которым руководителю приходится принимать решения, являются прогнозного или планового характера. Поэтому для выработки наиболее эффективных решений лицам, ответственным за подготовку и принятие решений, необходимо стремиться к наиболее полному привлечению априорной информации о многочисленных факторах, влияющих не только на процесс принятия решения, но и на ход и исход его выполнения. К таким факторам в экономических проблемах можно отнести, например, показатели спроса и предложения на продукцию, колебания в стоимости сырья и материалов, изменения технологических способов производства, способов хранения продукции, видов ее транспортировки и др.

Масштабы развития современного общества, темпы его обновления, усложнение и интенсивность экономических связей на межгосударственном уровне и внутри страны приводят к необходимости обработки всевозрастающих объемов информации.

Так, любое предприятие или фирма, к какой бы сфере они ни относились (промышленности, строительству, транспорту, торговле, сельскому хозяйству) и каковы бы они ни были (малые, средние или большие), в процессе своей производственной деятельности осуществляют обработку информации как для внутренних нужд (расчет норм и нормативов, плановых заданий, расценок, учет результатов труда и стимулирования работников, учет и контроль материально-технических ресурсов, качества продукции и других показателей), так и для внешней сферы. Обмен информацией осуществляется как в горизонтальном направлении (взаиморасчеты, приобретение комплектующих изделий, материалов, сырья, их перевозка, сбыт готовой продукции), так и в вертикальном (предоставление информации государственным, хозяйственным и другим органам управления и получение от них указаний, заданий и директив).

Современные достижения технической и экономической кибернетики предоставили большие возможности по обработке информации на всех уровнях управления. С созданием микропроцессоров их стали встраивать в различные устройства, которые могут управляться специально составленными программами. Это позволило людям переложить на управляемые механизмы тяжелую, монотонную, опасную работу. Возможности здесь неограниченные. И куда бы ни был встроен микропроцессор: в часовой механизм, станок с числовым программным управлением или робот, — эти устройства выполняют необходимые функции за счет реализации заложенной в них программы.

С целью повышения оперативности обработки информации в системах управления и создания управленческому персоналу более комфортных условий работы разработаны профессиональные персональные ЭВМ (ПЭВМ). В последнее время множество рабочих мест, оснащенных ПЭВМ, начали связывать в рамках одного предприятия, учреждения или организации между собой или с ЭВМ большей мощности (серверами), образуя единую сеть — локальную вычислительную сеть или систему (ЛВС). ЛВС отдельных предприятий и других звеньев управления, используя линии связи, начали объединять в отраслевые, региональные и территориальные распределительные сети ЭВМ.

Прогресс в технической и информационной сфере позволил связать находящиеся в разных городах и разных странах ЭВМ в глобальные сети с помощью космических, радио- и кабельных каналов. Многие пользователи имеют возможность входить в международные банки и базы данных по каналам связи Интернета.

Это, безусловно, значительный шаг в эффективном использовании достижений научно-технического прогресса, позволивший пользователям иметь индивидуальный доступ к необходимой информации, хранящейся в банках данных и знаний различных городов и стран. При этом доступ к информации осуществляется практически мгновенно в рамках ЛВС и иногда с небольшими задержками в крупных международных сетях. Кроме того, сети ЭВМ позволяют значительно ускорить доставку корреспонденции (писем, телеграмм, отчетов и др.) через каналы электронной почты.

Синтез технических средств, программных продуктов и процедур по обработке информации образует информационные технологии.

Информационная технология представляет собой технологию информационного процесса — совокупность методов, способов, приемов и средств, реализующих информационный процесс в соответствии с заданными требованиями. В свою очередь, информационный процесс определяется как совокупность процессов получения, накопления, обработки и передачи информации.

Быстрое развитие информационных технологий во многом повлияло на концептуальные подходы к их применению и изучению. Появились новые возможности практического применения информационных технологий. Созданы условия для наращивания потенциала технологизации областей науки и техники. Сняты ограничения в вопросах производительности вычислительной техники и объема обрабатываемой информации. Развитие информационных технологий повлекло за собой более быстрое развитие наук на стыке областей знаний. Интенсивно начали формироваться и развиваться прикладные математические технологии фундаментальной информатики, включающие технологии оптимальных решений.

В математические технологии фундаментальной информатики включаются: теория множеств, теория графов, математические методы оптимизации, теория баз данных (информационных моделей), теория алгоритмов, компьютерная математика, другие методы и модели исследования операций.

Невозможно представить современную автоматизированную систему управления производством, отраслью, регионом или в целом экономикой страны, в которой не использовались бы информационные технологии выработки оптимальных решений. Управленцам любого ранга приходится сталкиваться с проблемой выбора того или иного варианта решения. Решить проблему выбора, т.е. найти наилучшее (оптимальное) решение из множества альтернативных вариантов, и помогают современные информационные технологии оптимальных решений, использующие методы математического программирования.

Автоматизированные системы управления представляют собой человеко-машинные системы. Поведение и эффективность работы таких систем во многом зависят от уровня заложенных в них информационных технологий, но, пожалуй, в большей мере — от людей, приводящих эти технологии в действие, т.е. от уровня их квалификации и знания возможностей этих технологий.

В настоящее время большое внимание уделяется обучению пользователей применению современных информационных технологий (основные понятия, объектно ориентированные и офисные технологии, основы информационных систем и телекоммуникаций), а при подготовке специалистов для работы в этой области — изучению информационных систем, математических технологий, фундаментальной информатики и языков программирования.

Эффективность работы человеко-машинных систем значительно повысится, если их информационные технологии, наряду с выполнением рутинных учетно-расчетных операций, операций по интегрированной обработке данных, будут осуществлять многовариантные расчеты с выбором наилучшего, оптимального варианта, с точки зрения некоторого критерия эффективности.

К задачам, решаемым в рамках информационных технологий оптимальных решений, относятся задачи перспективного планирования, прогнозирования развития и специализации предприятий, оптимального распределения ресурсов, разработки производственной программы, прикрепления поставщиков к потребителям и многие другие. Использование современных информационных технологий оптимальных решений на уровне предприятий, по оценкам специалистов, позволяет достичь 5—7 % экономии капитальных вложений и снижения на 2—3 % себестоимости продукции по сравнению с решениями, принятыми традиционными методами. При оптимизации структуры производимой продукции и ее распределения между потребителями с целью достижения максимального эффекта на уровне страны экономия составляет до 10 – 15% капитальных вложений и 4—5 % издержек производства.

1.2. ПРЕДМЕТ, МЕТОД И ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Предметом математического программирования является класс задач на экстремум (максимум или минимум) функции со многими неизвестными и с системой ограничений на область изменения этих неизвестных. К нему относятся множество экономических, производственных и других многовариантных задач.

Методом математического программирования является метод математического моделирования реальных процессов.

Чтобы найти наилучшее решение многовариантной задачи с помощью методов математического программирования, необходимо следующее:

1. Дать качественную постановку задачи, т.е. словесно изложить суть задачи с указанием всех известных и неизвестных параметров, ограничительных условий и цели (целей) решения.

2. Сформировать на основании качественной постановки задачи ее математическую модель — абстрактное отображение реального процесса в виде количественных закономерностей (математических уравнений и неравенств). В математическую модель включаются ограничительные условия задачи (система ограничений) и критерий эффективности (функция цели), выражающий(ая) поставленную цель. Естественно, математическая модель в силу своей абстрактности характеризует процесс (явление, исследуемый объект) более или менее точно, так как она содержит не все, а наиболее существенные факторы, отражающие основные черты и свойства реального процесса.

3. Реализовать математическую модель одним из множества методов математического программирования, т.е. методов решения задач линейной, нелинейной, динамической, стохастической, целочисленной оптимизации и других, или разработать алгоритм решения задачи. Алгоритм решения задачи представляет собой конечное число последовательно и однозначно выполняемых предписаний, позволяющих получить решение задачи при заданных исходных данных.

4. Разработать и отладить программу реализации разработанного алгоритма на ЭВМ.

5. Осуществить верификацию.

Безусловно, такая этапная схема решения задач в большей мере характерна для разработки информационных технологий. Что же касается применения разработанных информационных технологий в автоматизированных системах управления и вычислительных центрах, то она иная. В работающей системе все системное и программное обеспечение для решения задач находится в оперативной или пассивной памяти ЭВМ. Там же находятся программы ввода исходной и вывода выходной информации в удобочитаемой форме для пользователя, а вся нормативно-справочная информация хранится в банке данных. Технология решения задач отработана до мелочей. Поэтому для решения любой задачи пользователю достаточно вызвать и загрузить необходимую программу, введя предварительно исходную информацию.

Рассмотрим несколько примеров задач и их математические модели, реализуемые методами математического программирования.

Пример 1.1. (Задача раскроя материалов.) На деревообрабатывающем предприятии листы фанеры для изготовления деталей изделий могут раскраиваться несколькими способами. Если лист раскроить по j-му способу раскроя ($j = \overline{1, n}$), то получится a_{ij} деталей i-го вида ($i = \overline{1, m}$), при этом величина отхода с одного листа равна c_j м^2.

Требуется найти, сколько листов фанеры раскраивать по каждому из способов раскроя, чтобы получить деталей i-го вида не менее b_i единиц с минимальным количеством отходов.

Составим математическую модель данной задачи. Обозначим через x_j количество листов фанеры, раскраиваемых по j-му способу, тогда суммарное количество отходов по всем вариантам раскроя (которое следует минимизировать) составит

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \min. \tag{1.1}$$

Запишем ограничения на изготовление деталей:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1,m}. \tag{1.2}$$

Количество листов фанеры, раскраиваемых по j-му способу, должно быть неотрицательным:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{1.3}$$

Пример 1.2. (Задача производственного планирования.) Для производства продукции j-го вида ($j = \overline{1,n}$) предприятие располагает ограниченными ресурсами (станочный парк, трудовые, финансовые ресурсы, материалы и др.) в объемах b_i единиц ($i = \overline{1,m}$). Расход ресурсов i-го вида на единицу продукции j-го вида известен и составляет a_{ij} единиц ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$); прибыль от единицы продукции j-го вида равна p_j единицам.

Требуется найти, сколько и какой продукции производить, чтобы получить максимальную прибыль. Будем считать, что сбыт продукции каждого вида обеспечивается полностью.

Обозначим через x_j объем производства продукции j-го вида ($j = \overline{1,n}$). Тогда максимальная прибыль — функция математической модели задачи — будет иметь вид

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{j=1}^{n} p_jx_j \to \max. \tag{1.4}$$

Ограничения по ресурсам:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1.5}$$

условие неотрицательности объемов производства:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{1.6}$$

Пример 1.3. (Задача о рационе.) Сельскохозяйственное предприятие для откорма скота располагает n видами корма (сочные корма, грубые корма, концентраты и др.). Каждый вид корма характеризуется содержанием питательных веществ (кормовые единицы, белки, фосфор, кальций и др.). Известны содержание i-го питательного вещества в единице корма j-го вида — a_{ij} единиц ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$), а также стоимость единицы корма j-го вида — c_j ($j = \overline{1,n}$) и минимальная суточная потребность в i-м питательном веществе — b_i ($i = \overline{1,m}$).

Требуется составить рацион минимальной стоимости.

Обозначим через x_j количество корма j-го вида, включаемого в рацион ($j = \overline{1, n}$), и запишем математическую модель задачи.

Функция

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \tag{1.7}$$

отражает минимальную суммарную стоимость рациона.

Суточная потребность животного в питательном веществе i-го вида должна быть не меньше минимального количества b_i, это выразится в виде следующего неравенства:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1, m}. \tag{1.8}$$

Естественно, количество потребляемого животным корма не может быть отрицательной величиной:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.9}$$

Пример 1.4. (Задача о назначениях.) Имеется n механизмов, которые могут использоваться для выполнения n работ. Известна производительность c_{ij} каждого i-го механизма ($i = \overline{1, n}$) при выполнении j-й работы ($j = \overline{1, n}$). Требуется так закрепить механизмы за работами, чтобы суммарная производительность механизмов была максимальной.

Для составления математической модели задачи введем неизвестные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й механизм назначается на выполнение } j\text{-й работы;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда критерий эффективности — суммарная производительность оборудования — имеет вид

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max \tag{1.10}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \tag{1.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.12}$$

Выражение (1.11) выполняет требование, чтобы i-й механизм был назначен только на одну работу. Ограничение (1.12) обеспечивает выполнение каждой работы только одним механизмом.

Пример 1.5. (Задача оптимального размещения.) Отраслью заключены договоры на поставку продукции потребителям в заданных ассортименте, объеме и сроках. Для выполнения договорных обязательств руководство отрасли разрабатывает мероприятия по расширению производства на ряде предприятий, по проведению их реконструкции, а также по строительству и вводу новых мощностей.

Требуется определить объемы производства продукции на действующих, реконструируемых и вновь вводимых предприятиях, а также объемы поставок продукции от предприятий-поставщиков к потребителям, чтобы суммарные затраты на производство и доставку продукции были минимальными.

Введем обозначения и построим математическую модель задачи:

i — вид производимой продукции ($i = \overline{1, m}$);

j — номер предприятия, производящего продукцию ($j = \overline{1, n}$);

k — номер потребителя продукции ($k = \overline{1, K}$);

b_{ij} — мощности j-го предприятия по производству продукции i-го вида;

c_{ij} — стоимость производства единицы продукции i-го вида на j-м предприятии;

c_{ijk} — затраты на перевозку единицы продукции i-го вида от j-го предприятия k-му потребителю;

p_{ik} — объем поставки продукции i-го вида k-му потребителю согласно договорным обязательствам;

x_{ij} — искомый объем производства продукции i-го вида на j-м предприятии;

x_{ijk} — объем поставки j-м предприятием продукции i-го вида k-му потребителю.

С учетом обозначений суммарные производственные и транспортные затраты в математической модели определяются следующим выражением:

$$Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{m} c_{ijk}x_{ijk} \to \min. \quad (1.13)$$

Ограничения задачи:

по мощностям каждого предприятия

$$\sum_{k=1}^{K} x_{ijk} \le b_{ij}, \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}; \quad (1.14)$$

по балансу производства и потребления продукции

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{K} x_{ijk}, \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}; \quad (1.15)$$

по удовлетворению спроса потребителей

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = p_{ik}, \quad i = \overline{1,m}; \quad k = \overline{1,K}; \quad (1.16)$$

по неотрицательности объемов поставок и производства продукции

$$x_{ij} \ge 0, \quad x_{ijk} \ge 0, \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}; \quad k = \overline{1,K}. \quad (1.17)$$

Из приведенных примеров видно, что задачи, решаемые с помощью методов математического программирования, имеют общие черты. В каждой задаче находятся значения неизвестных величин, доставляющих максимум или минимум (экстремум) функции. Неизвестные величины должны удовлетворять некоторой системе ограничений. Это позволяет сформулировать общую задачу математического программирования (информационных технологий оптимальных решений):

Найти такие неотрицательные значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых достигается экстремум функции

$$Z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1.18}$$

и выполняются ограничения

$$\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{\le, =, \ge\}b_i, (i = \overline{1,m}). \tag{1.19}$$

Величины b_i $(i = \overline{1,m})$ в ограничениях (1.19) являются некоторыми действительными числами.

Значения неизвестных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющие ограничениям (1.19), называются *решением* задачи (1.18)–(1.19). В некоторых литературных источниках их называют *планом.*

Решение $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, доставляющее экстремум функции (1.18), называется *оптимальным решением.*

Если выражения (1.18) и (1.19) линейны относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то рассматриваемые задачи относятся к классу задач *линейной оптимизации.* Если же хотя бы одно из названных выражений не линейно, то задача называется *нелинейной.*

1.3. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ MICROSOFT EXCEL 2000

1.3.1. Запуск и основные компоненты Microsoft Excel

Запуск и компоненты экрана

Microsoft Excel (MS Excel) относится к программному обеспечению, известному под названием **электронные таблицы**. Запуск MS Excel может быть реализован разными способами. Рассмотрим один из них, который осуществляется путем установки курсора на кнопку **Пуск** панели задач **Windows** и щелчка левой кнопкой мыши. Затем, после установки курсора в меню **Пуск** на команду **Программы**, рядом с командой высветится меню программ, в котором следует подвести курсор на **MS Excel** и щелкнуть левой кнопкой мыши (в дальнейшем один щелчок левой кнопкой мыши будет обозначаться **М1**, двойной щелчок — **М2**, **МП** — один щелчок правой кнопкой и **МН** — нажатие левой кнопки мыши и перемещение ее при нажатой кнопке). На экране — пустая книга Excel.

Вид электронной таблицы Excel на экране (рис. 1.1) зависит от установленного монитора, но в любом случае содержит следующие области: строку главного меню (**Файл, Правка, Вид, ...**); кнопки панелей инструментов (**Стан-**

дартная и **Форматирование**) — расположены, как правило, ниже строки главного меню (в дальнейшем — меню); строку формул; окно книги, разбитое на ячейки вертикальными и горизонтальными линиями; строку состояния, расположенную в нижней части экрана. Эти пять областей составляют рабочую область Excel.

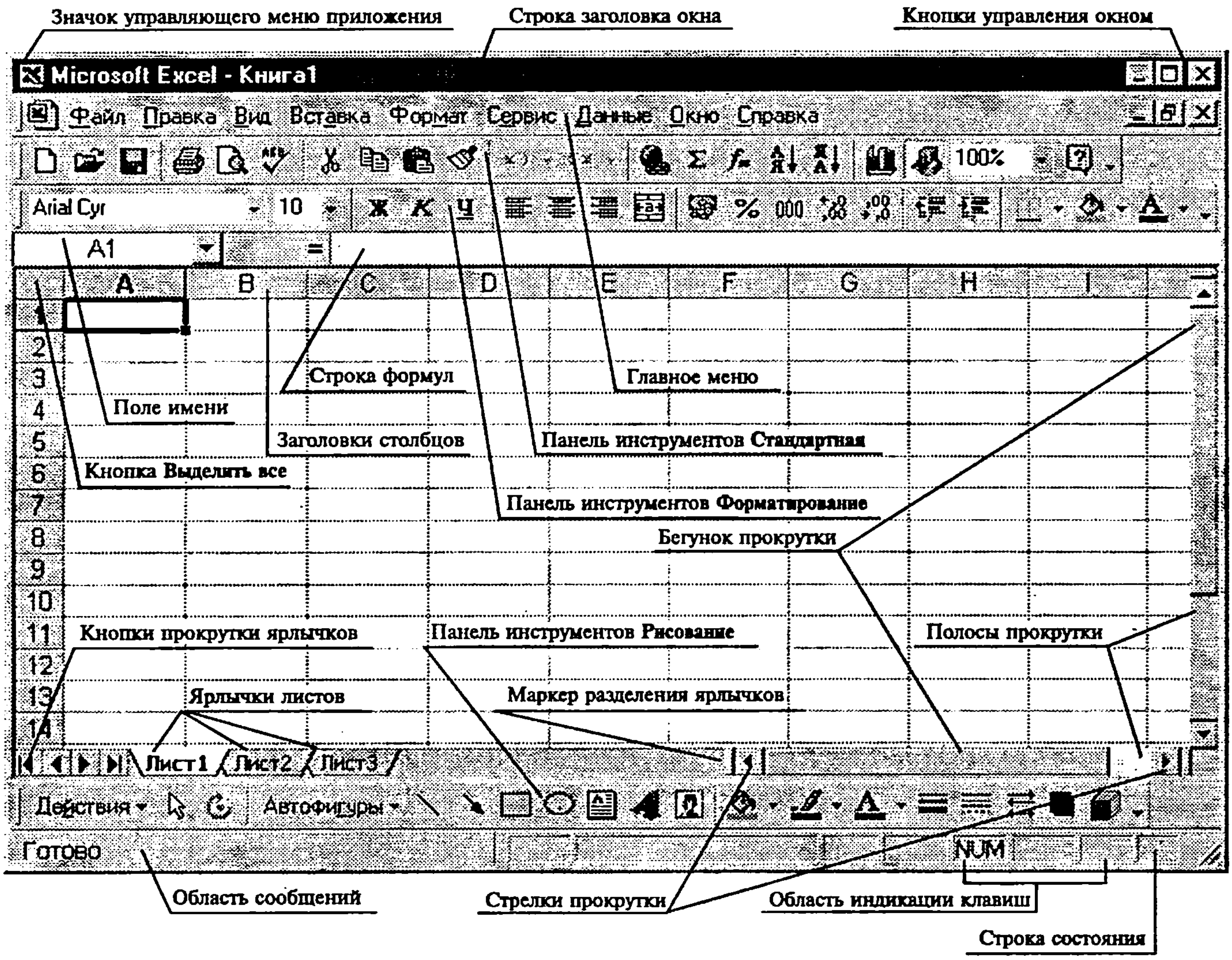


Рис. 1.1

Выше строки состояния представлены ярлычки листов (**Лист 1, Лист 2, Лист 3**, ...). В этой же строке левее листов расположены четыре кнопки, которые служат для просмотра содержания книги, когда листов в книге много и видны не все ярлычки. Две крайние кнопки выполняют прокрутку к первому или последнему ярлычку книги, а средние — перемещают на один ярлычок влево или вправо. Кнопки прокрутки не активизируют листы книги. Чтобы активизировать лист после прокрутки, необходимо выполнить **М1** по ярлычку листа. Количество видимых на экране ярлычков можно изменить, перетащив маркер разделения ярлычков (**МН** — и перетащить).

Окно книги содержит заголовок, который находится в его верхней части. Справа в строке заголовка находятся три кнопки управления окном: левая — **Свернуть**, средняя — **Развернуть** и правая — **Закрыть**. Если щелкнуть **M1** по кнопке **Развернуть**, то активный лист занимает всю рабочую область Excel, а на экране на месте кнопки **Развернуть** появляется кнопка **Восстановить** с двумя маленькими прямоугольниками. Нажатие **M1** на эту кнопку делает окно плавающим. Размеры плавающего окна можно менять, перетащив мышью его границы. Для этого необходимо установить на границу окна курсор (он будет выглядеть в виде двойной горизонтальной или вертикальной стрелки, в зависимости от границы), и с помощью **МН** перетащить границу на нужное место. Если нажать кнопку **Свернуть**, окно книги свернется и станет похожим на строку заголовка, а в нижней части экрана, рядом с названием книги, будут расположены три кнопки. На месте кнопки **Свернуть** появится кнопка **Восстановить** с двумя прямоугольниками.

Когда одновременно открыто несколько книг, то их свертывание позволяет оперативно наводить порядок в рабочей области. Для восстановления свернутой или развернутой книги необходимо произвести **M1** по кнопке **Восстановить**.

Прокрутка окна осуществляется для его просмотра с помощью **Полос прокрутки**, расположенных вдоль правой и нижней его сторон между стрелками прокрутки. Выполнение **M1** по соответствующей стрелке на полосе прокрутки перемещает лист на одну строку вверх (вниз) или на один столбец вправо (влево). Перетаскивая бегунок прокрутки, можно быстро перемещаться по листу. Для перемещения на один полный экран необходимо осуществить **M1** на полосе прокрутки.

При прокрутке можно закрепить области (строки и столбцы) командой **Закрепить области** в меню **Окно**. Отмена закрепления осуществляется командой **Снять закрепление областей**.

Окно можно разделить на части по горизонтали и вертикали. Чтобы разделить окно по горизонтали, необходимо установить курсор на горизонтальный делитель, который находится выше стрелки вертикальной полосы прокрутки (курсор превращается в двустороннюю стрелку с горизонтальными линиями), и с помощью **МН** переместить разделительную линию в нужное место. После снятия нажатия кнопки мыши — на экране два горизонтальных окна со своими полосами прокрутки. Аналогично делится окно вертикальным делителем, который находится правее правой стрелки горизонтальной полосы прокрутки.

Командой **Расположить** в меню **Окно** можно выбрать один из вариантов **Расположения окон**: рядом, сверху вниз, слева направо или каскадом. Это необходимо, чтобы окна всех рабочих книг были видны на экране (рабочие книги рассматриваются после рабочих листов). В диалоговом окне меню **Окно** ниже команд приводится список имен рабочих книг, открытых в данный момент.

Если ведется работа с несколькими окнами, созданными командой **Новое** в диалоговом окне меню **Окно** активной рабочей книги, то активизация нужного окна осуществляется щелчком **M1** по нему. Окно активизируется также щелчком **M1** по его имени в диалоговом окне меню **Окно**.

Нажатием клавиш <Ctrl> + <Shift> + <F6> (такая запись означает одновременное нажатие этих клавиш) циклически активизируются окна открытых рабочих книг, а активизация окон в обратном порядке производится нажатием клавиш <Ctrl> + <F6> или <Ctrl> + <Tab>.

Отметим существенную разницу между командой **Новое** из меню **Окно** и командой **Создать** из меню **Файл**. Команда **Новое** создает окно для активной книги (под именем Книга 1.1, Книга 1.2 и т.д.), а команда **Создать** из меню **Файл** создает совершенно новую книгу, которая выводится в новом окне.

Панели инструментов

Панели инструментов (**Стандартная и Форматирование**) представляют собой набор кнопок для быстрого ввода команд. Для подачи команды достаточно установить курсор на нужную кнопку и выполнить **M1**. Строка **Стандартной** панели инструментов содержит следующие кнопки (команды): **Создать, Открыть, Сохранить,** которые позволяют создать и открыть новую рабочую книгу, выбрать и открыть существующую и сохранить существующую рабочую книгу соответственно; **Печать** — инициирует печать; **Предварительный просмотр** — позволяет просмотреть информацию перед выводом на печать; **Орфография** — проверяет орфографию в набранном тексте; **Вырезать, Копировать и Вставить** — первая удаляет выделенную информацию с активного рабочего листа и заносит в буфер обмена, вторая — копирует в буфер обмена, а с помощью третьей можно вставить информацию в нужное место данного рабочего листа, других листов, книг и файлов из буфера обмена; **Формат по образцу** — считывает формат выделенных ячеек и распространяет его на выделяемые; **Отменить, Вернуть** — отменяет и воспроизводит последнее выполненное действие соответственно; **Добавление гиперссылки** — позволяет установить связь с файлом и сделать ссылку на документ либо конкретный объект в документе (закладку, именованный диапазон); **Автосумма** — складывает числа в выделенном диапазоне; **Вставка функции** — помогает формировать функцию из имеющегося набора функций; **Сортировка по возрастанию (убыванию)** — сортирует информацию от меньших значений к большим (от больших к меньшим) в выделенном диапазоне, а текстовую — по алфавиту в прямом (обратном) порядке; **Мастер диаграмм** — позволяет строить диаграммы по заданной информации и размещать их; **Рисование** — открывает панель инструментов для создания рисунков; **Масштаб** — увеличивает (уменьшает) рабочий лист на экране; **Справка** — позволяет получить совет (запросить справку).

Строка панели **Форматирование** содержит следующие кнопки: **Шрифт, Размер** — служат для выбора шрифта и размера текста в выделенной ячейке или диапазоне ячеек; **Ж, К, Ч** (полужирный, курсив, подчеркнутый) — позволяют изменять форму начертания шрифта в выделенной ячейке или диапазоне ячеек; четыре кнопки выравнивания текста (**По левому краю, По центру, По правому краю, Объединить и поместить в центре**); три кнопки формата представления чисел (**Денежный, Процентный** и **Формат с разделителями**); две кнопки **Увеличения (Уменьшения) разрядности** чисел (каждый щелчок по кнопке изменяет на единицу количество десятичных разрядов); две кнопки — **Увеличить (Уменьшить) отступ**; три кнопки выбора линии границы, цвета заливки и цвета шрифта.

Панели подразделяются на поставляемые и формируемые пользователем. Весьма полезно осуществить знакомство с поставляемыми панелями, вызвав их на экран. Для этого необходимо: установить курсор на любую кнопку, **МП** (на экране контекстное меню с перечнем панелей); установить курсор на имя нужной панели, **М1** (на экране вызываемая панель); установить стрелку на кнопку панели, не нажимая кнопки мыши (на экране ниже кнопки — ее название). Вызвать на экран панель инструментов можно командой **Панели инструментов** в меню **Вид**. Далее на **Панели инструментов** выделить нужную панель (на экране вызванная панель).

Панели инструментов можно перемещать по экрану в любое место, изменять их форму и размер. Чтобы создать панель пользователя, необходимо применить команду **Панели инструментов** из меню **Вид** и затем — **Настройка** (на экране диалоговое окно **Настройка**). На вкладке **Панели инструментов** щелкнуть по кнопке **Создать**. В появившемся диалоговом окне **Создание панели инструментов** ввести имя новой панели инструментов, активизировать **ОК**. (На экране в виде малого прямоугольника созданная панель рядом с диалоговым окном **Настройка**.) На вкладке команды выбрать нужные кнопки и перетащить их на создаваемую панель, установив курсор на перемещаемую кнопку и нажав кнопку мыши (повторить перемещение для всех необходимых категорий). Аналогично можно скопировать кнопки с других панелей инструментов. Применить команду **Закрыть** (на экране созданная панель).

Удаление созданной панели осуществляется командой **Панели инструментов** из меню **Вид** и затем командой **Настройка**. Для этого выделяют удаляемую панель на вкладке **Панели инструментов** и применяют команду **Удалить** (на высвеченный на экране вопрос об удалении выделенной панели ответить **ОК**). Панель удалена.

Рабочий лист, ячейки

Новая книга по умолчанию состоит из 3 рабочих листов. Число листов можно изменить, выбрав команду **Параметры** из меню **Сервис** и активизировав вкладку **Общие**. В строке **Листов новой книги** можно задать до 255 листов. Однако следует иметь в виду, что каждый лист в книге занимает дополнительное место на диске. Поэтому листы следует создавать по мере надобности.

Рабочий лист разделен сеткой на строки и столбцы. Каждый столбец озаглавлен одной или двумя буквами от A до Z (всего столбцов 256), которые означают его имя. Строки могут иметь номера (заголовки) от 1 до 65 536. На пересечении строк и столбцов находятся ячейки. В ячейку могут быть введены текст, число или формула. Каждая ячейка имеет адрес (координаты ячейки). Например, ячейки A15, AZ100, BA1 располагаются соответственно в 15-й строке столбца A, 100-й строке столбца AZ и 1-й строке столбца BA. Ячейка на рабочем листе, обрамленная черной рамкой, является активной (выделенной). Активизация ячейки на рабочем листе осуществляется щелчком **М1** или подводом курсора стрелками: <←>, <→>, <↑>, <↓>. Адрес (имя) активной ячейки выводится в поле имен (левая сторона строки формул).

Активной ячейке можно присвоить имя командой **Имя, Присвоить** в меню **Вставка**. В открывшемся диалоговом окне **Присвоить имя** вводят имя и нажимают кнопку **ОК**.

Переход от одного рабочего листа к другому осуществляется щелчком **М1** по ярлычку листа, а если он не виден на экране, то нужно прокрутить ярлычки с помощью кнопок их прокрутки. Лист быстро можно активизировать щелчком **МП** на одной из кнопок прокрутки ярлычков и выбором в появившемся на экране контекстном меню нужного листа.

Листы можно **Добавить**, **Удалить**, **Переименовать**, **Переместить/Скопировать** и **Выделить все**, применив названные команды. Для этого необходимо щелкнуть **МП** по ярлычку листа, в контекстном меню выбрать соответствующую команду, щелкнуть по ней **М1** и выполнить соответствующее действие. При добавлении листа в открывшемся диалоговом окне **Вставка** необходимо выполнить **М1** по вкладке **Общие**, выделить лист и выполнить **М1** по кнопке **ОК**. При переименовании листа командой **Переименовать** на месте выделенного ярлычка листа (окрашен в темный цвет) следует набрать на клавиатуре новое имя и нажать клавишу <Enter>. Выделенный лист можно переименовать также командой **Лист**, **Переименовать** в меню **Формат**, а вставить можно командой **Лист** в меню **Вставка**. Наиболее быстрый путь переименования листа осуществляется щелчком **М2** по ярлычку листа (он выделится в темный цвет), вводом нового имени и нажатием клавиши <Enter>. При удалении Excel предупреждает, что удаленный лист восстановить невозможно. Удалить лист можно и командой **Удалить лист** в меню **Правка**.

После выполнения команды **Выделить все листы** в Excel можно работать с выделенной группой листов в **групповом режиме** как с одним листом, а выделить в группу рядом стоящие листы можно, щелкнув **М1** на ярлычке первого листа и при нажатой клавише <Shift> на ярлычке последнего листа. Ярлычки выделенных в группу листов на экране представлены белым цветом. Выделенную группу листов можно перемещать, копировать и удалять, в нее можно вводить информацию как в один лист.

Группу листов можно разгруппировать. Для этого курсор подводится на ярлычок листа, который должен оставаться активным, и выполняется **МП**. В появившемся контекстном меню следует выполнить **М1** на команде **Разгруппировать листы**.

В меню **Вид** команда **Масштаб** позволяет в окне **Масштаб** установить масштаб листа от 10 до 400 %, но проще использовать команду **Масштаб** на стандартной панели инструментов.

1.3.2. Краткие сведения о справочной системе Excel

Вызов справки

Чтобы получить справку в меню **Справка**, необходимо с помощью **М1** активизировать команду **Справка по Microsoft Excel**. На экране появится диалоговое окно **Справка Microsoft Excel** с тремя вкладками: **Содержание**, **Мастер ответов** и **Указатель**. Во вкладке **Содержание** размещено оглавление справки со значком закрытой книги перед каждым разделом и значком «+». Если щелкнуть **М1** по знаку «+» или **М2** по названию заголовка раздела во вкладке **Содержание**, то на экран будет выведен следующий уровень детализации. После нахождения интересующей темы, чтобы вывести ее на экран, необходимо щелкнуть **M1** по знаку вопроса перед ней или по ее названию (в правой части окна справки будет выведена искомая справка). Вкладка **Указатель** позволяет находить описание пояснений по ключевым словам, а в **Мастере ответов** необходимо ввести свой вопрос и щелкнуть **M1** по кнопке **Найти**. На экран будет выведена справка по заданному вопросу. Если после щелчка справка не выводится, то необходимо щелкнуть **M1** по кнопке , которая находится слева вверху, ниже заголовка **Справка Microsoft Excel**. При отключенном помощнике диалоговое окно **Справка Microsoft Excel** выводится также щелчком **M1** по знаку вопроса или нажатием клавиши <F1>. Если помощник включен, то справку можно получить, щелкнув по нему **M1**, или щелкнув **M1** по знаку вопроса , или нажав клавишу <F1>. Во всех случаях на экране появится выноска с заголовком **Действие** со словами: **Введите свой вопрос и нажмите кнопку «Найти»**. После ввода вопроса и нажатия кнопки **Найти** помощник выведет разделы справки, имеющие отношение к заданному вопросу. После щелчка по нужному разделу на экране появится диалоговое окно **Справка Microsoft Excel**, с которым работают так, как было указано выше. Если список разделов в выноске **Действие** не устраивает, то нужно попробовать перефразировать (уточнить) вопрос, добавив несколько новых, более близких к теме слов.

На выноске **Действие** имеется кнопка **Параметры**, нажатие которой с помощью **M1** вызовет появление окна диалога **Помощник** со вкладками **Коллекция** и **Параметры**. Вкладка **Коллекция** служит для выбора помощника из нескольких претендентов, а **Параметры** — для установления функций помощника.

Кроме указанных способов получения справки, можно воспользоваться меню **Справка**, которая наряду с командой **Справка Microsoft Excel** содержит еще следующие команды: **Скрыть помощника** или **Показать помощника** (в зависимости от того, включен помощник или отключен); **Что это такое?** (<Shift> + <F1>) — позволяет получить информацию об элементе, указанном на экране; **Office на Web** — запускает броузер (обозреватель) и подключает к узлам Microsoft в Интернете для получения дополнительной свежей справочной информации; **О программе** — сообщает информацию о программе Microsoft Excel; **Найти и устранить** — предназначена для устранения ошибок, которые могли возникнуть при установке Excel.

Получение подсказки с помощью команды «Что это такое?»

В Excel можно получить подсказку об элементе, указанном на экране. Для этого выполняют **M1** по команде **Что это такое?** в меню **Справка**. Рядом появится вопросительный знак со стрелкой . Установив курсор со значком вопроса на интересующем элементе экрана, выполняют **M1**. В результате будет получена интересующая подсказка.

Можно получить справку, выделив элемент и нажав клавиши <Shift> + <F1>. После этого появится курсор со знаком вопроса. Щелкнув по интересующему элементу экрана **M1**, получают подсказку системы.

Отображение полезных советов

Помощник следит за работой и, если у него появляется полезный совет по более эффективному использованию Excel, «зажигает» электрическую лампочку.

Если щелкнуть **М1** по электрической лампочке, то на экране рядом с помощником появится совет.

Всплывающие подсказки

Несмотря на то что нарисованные значки на кнопках панели инструментов отображают их предназначение, в Excel предусмотрена возможность выдавать пользователю пояснения выполняемой функции каждой кнопкой. При установлении курсора на кнопку (без нажатия мыши) через мгновение рядом с кнопкой появится небольшой ярлычок с кратким описанием выполняемой функции. Эти ярлычки называют *всплывающими подсказками.*

Автоматическое получение справки

Помощник автоматически, без получения вопроса, предлагает разделы справки и советы по выполняемым процедурам решения задач.

1.3.3. Работа с файлами

Excel работает в основном с файлами типа «рабочая книга» с расширением .XLS и файлами шаблона с расширением .XLT.

Работа с файлами книг осуществляется с помощью меню **Файл**. MS Excel помнит четыре последних файла, с которыми работал пользователь, и выводит их на экран при щелчке **М1** по имени файла в меню **Файл**.

Создание файла

Excel автоматически создает новую рабочую книгу после его запуска с именем **Книга 1**. Создать новую рабочую книгу можно нажатием кнопки или выбором команды **Создать** в меню **Файл**, или нажатием клавиш <Ctrl> + <N>.

При нажатии кнопки **Создать** или клавиш <Ctrl> + <N> на экране появляется созданная книга. Если создается книга при открытой другой книге, то новая книга выводится поверх существующей с номером, на единицу большим номера последней созданной книги. Для переключения с одной книги на другую необходимо выполнить **М1** по нужной строке в списке книг меню **Окно**.

При создании книги командой **Создать** в меню **Файл** на экране появляется диалоговое окно **Создание документа**. По вкладке **Общие** этого окна создается пустая книга, а по вкладке **Решения** можно создать шаблон рабочей книги (**Авансовый отчет**, **Заказ** и др.) для решения некоторых типовых задач. После щелчка **М1** по одному из выведенных на экран значков и по клавише **ОК** Excel откроет копию книги.

Сохранение рабочей книги

В меню **Файл** имеются следующие команды, позволяющие сохранять рабочую книгу (файл): **Сохранить, Сохранить как..., Сохранить как Web-страницу***, **Сохранить рабочую область..., Закрыть, Выход**. Кроме того, файл можно сохранить щелчком **М1** по кнопке (сохранить) на панели инструментов или нажатием клавиш: <Ctrl> + <S> либо <Shift> + <F12>. В результате выполнения одного из указанных действий, если рабочая книга сохранялась на диске ранее, она сохранится на нем под тем же именем. При сохранении рабочей книги в первый раз с помощью любой из команд сохранения на экране появится диалоговое окно

*В кратком варианте меню **Файл** команд **Сохранить как Web-страницу** и **Сохранить рабочую область** нет. Для их вызова следует нажать двойную стрелку в нижней части меню.

Сохранение документа. В поле **Имя файла** этого окна выведено предлагаемое по умолчанию имя файла, например «Книга 3». Чтобы изменить его и вывести имя, отражающее суть содержания книги, вводят в поле **Имя файла** новое имя. Как только начинают вводить новое имя, содержимое этого поля исчезает (Расширение .XLS Excel добавит автоматически). После ввода имени щелкают **М1** по команде **Сохранить**. После сохранения файла окно книги в рабочей области останется открытым, а в строке заголовка появится новое имя книги.

При выполнении команды **Сохранить рабочую область** сохраняется текущее состояние среды Excel: расположение всех открытых книг и все установки, которые были даны в процессе работы. По умолчанию рабочая область сохраняется в файле **Resume. XLW**, но можно, как и ранее, присвоить другое имя.

При применении команды **Сохранить как Web-страницу** книга сохраняется в формате HTML — языка Web.

Закрытие рабочей книги

Закрыть рабочую книгу можно одной из команд: **Закрыть** или **Выход** из меню **Файл** либо нажатием клавиш: <Ctrl> + <F4> или <Ctrl> + <W>.

Если в рабочей книге были сделаны изменения, то перед ее закрытием MS Excel всегда выдает запрос: «Сохранить изменения в файле?», на что дается соответствующий ответ щелчком **М1** по кнопкам **Да**, **Нет** или **Отмена**.

Открытие рабочей книги

Открыть существующую рабочую книгу можно: выбором команды **Открыть** из меню **Файл** или нажатием кнопки на панели инструментов, или нажатием клавиш <Ctrl> + <O>. В результате выполнения любого из этих действий на экране высветится диалоговое окно **Открытие документа**. В поле **Папка** указаны имена рабочих книг. Устанавливают курсор на нужное имя и щелчком **М1** выделяют его. Щелчком **М1** по кнопке **Открыть** вызывают необходимую рабочую книгу. Файл, с которым недавно работали, можно открыть, используя меню **Файл** (отметим еще раз, что в этом меню хранится список последних четырех открывавшихся файлов), щелчком **М1** по его имени.

Чтобы найти файл на диске, применяют команду **Открыть** из меню **Файл**. В диалоговом окне **Открытие документа** открывают меню **Сервис** и выполняют **М1** по команде **Найти**. В открывшемся диалоговом окне **Найти** задают условия поиска файла (вводят имя файла в поле **Имя файла**) и щелкают **М1** по кнопке **Найти**.

Удаление рабочей книги

Для удаления файла рабочей книги открывают файл командой **Открыть** в меню **Файл**. В диалоговом окне **Открытие документа** устанавливают курсор на имя файла и щелчком **МП** выводят контекстное меню, в котором выбирают команду **Удалить**. После щелчка **М1** по ней на экране высвечивается диалоговое окно **Подтверждение удаления файла**. Щелчком **М1** в этом окне по кнопке **Да** файл удаляется. Файл в диалоговом окне **Открытие документа** можно удалить, выделив его (он окрашивается синим фоном) и нажав клавишу <Delete>. В появившемся окне **Подтверждение удаления файла** следует щелкнуть **М1** по кнопке Да, чтобы файл удалился.

Защита файлов, их открытие и снятие защиты

Файлы в Excel можно защитить от доступа к ним и от внесения изменений. Чтобы защитить файл от доступа к нему, необходимо применить команду **Со-**

хранить как ... в меню **Файл**. В диалоговом окне **Сохранение документа** ввести присваиваемое файлу имя, щелкнуть **M1** по кнопке **Сервис** и далее — по команде **Общие параметры**. В открывшемся диалоговом окне **Параметры сохранения** в строке **Пароль для открытия файла** ввести пароль (до 15 символов) и щелкнуть **M1** по кнопке **ОК** (пароль может включать сочетание латинских букв, цифр и специальных символов, режим букв в пароле учитывается). При вводе пароля в строке **Пароль для открытия файла** появятся звездочки вместо введенных символов. На экране — диалоговое окно **Подтверждение пароля**. Ввести еще раз пароль и щелкнуть **M1** по кнопке **ОК**. На экране — диалоговое окно **Сохранение документа**. Щелкнуть **M1** по кнопке **Сохранить** и убрать файл с экрана.

Аналогично устанавливается пароль разрешения записи. Третий вариант защиты — **Рекомендовать доступ только для чтения** устанавливается флажком в диалоговом окне **Параметры сохранения**.

Чтобы открыть защищенный файл, используют команду **Открыть** в меню **Файл**. На экране — диалоговое окно **Открытие документа**. Выделяют открываемый файл, щелкнув **M1** по его имени, а также по кнопке **Открыть**. На экране появится диалоговое окно **Введите пароль**. Вводят пароль в окно с мигающим курсором и щелкают **M1** по кнопке **ОК**. На экране появится защищенный файл.

Для снятия защиты от доступа к файлу вызывают его на экран и применяют команду **Сохранить как ...** в меню **Файл**. На экране — диалоговое окно **Сохранение документа**. Щелкают **M1** по кнопке **Сервис** и команде **Общие параметры**. На экране — диалоговое окно **Параметры сохранения**. Нажимают клавишу <Delete> и щелкают **M1** по кнопке **ОК**. На экране — диалоговое окно **Сохранение документа**. Щелкают **M1** по кнопке **Сохранить**. На экране вопрос: «Заменить существующий файл?» В ответ щелкают по кнопке **Да**.

1.3.4. Ввод, форматирование, редактирование и копирование информации

Выделение ячеек

Ввод, форматирование, редактирование и копирование данных, как правило, требуют выделения ячеек, строк, столбцов и диапазонов ячеек. Под диапазоном ячеек понимается прямоугольная группа ячеек. Адрес диапазона ячеек состоит из адресов его левой верхней и правой нижней ячеек, разделенных двоеточием, например: A3:C8, W7:AB10 и т.д. В формулах несмежные диапазоны записываются через знак « ; », например, A3:C8 ; C10: E15.

Выделение ячейки осуществляется посредством щелчка **M1** после установки на ней курсора. В результате ячейка выделена рамкой, а в поле имени указан адрес этой активной ячейки. Чтобы выделить строку (столбец), необходимо курсор установить на номер строки (имя столбца) и щелкнуть **M1**. Чтобы выделить блок ячеек, необходимо выполнить **MH** на угловой ячейке и перетащить курсор в противоположный угол блока или щелкнуть **M1** по угловой ячейке и, при нажатой клавише <Shift>, щелкнуть **M1** по противоположной ячейке. Чтобы выделить все ячейки электронной таблицы, необходимо щелкнуть **M1** по прямоугольнику в левом верхнем углу таблицы. Чтобы выделить несколько блоков, нужно выделить, как указано ранее, первый блок, подвести курсор в угол второго блока, нажать клавишу <Ctrl> и, удерживая ее, с помощью **МН** перетащить в противоположный угол блока. Для отмены выделения необходимо щелкнуть **М1** в любом месте таблицы.

Ввод информации

Ввод информации в ЭВМ с клавиатуры может производиться с помощью русских (кириллица) и латинских букв. Символы греческого алфавита вводятся клавишами латинского алфавита с помощью шрифта Symbol. Чтобы ввести текст в ячейку, ее предварительно необходимо выделить. Обратите внимание, что адрес выделенной ячейки указывается в поле имени строки формул, и, как только начинается ввод информации в ячейку, слева в строке формул правее адреса ячейки появляются три кнопки: — отмена, — ввод, — изменить формулу (в некоторых версиях Excel она называется кнопкой мастера функций). Вводимый в активную ячейку текст дублируется в строке формул. Ввод текста в ячейку заканчивается нажатием клавиши <Enter> или кнопки ввода. Щелчком **М1** по кнопке или нажатием клавиши <Esc> можно отменить ввод информации в ячейку и очистить строку формул. Если до начала ввода в ячейке была информация, то она восстанавливается. Удаление введенной информации в ячейку осуществляется посредством ее выделения и нажатием клавиши <Delete>.

При вводе длинных слов или предложений введенный текст, например в ячейке А2, визуально занимает следующие за А2 ячейки строки, однако на самом деле ячейки, следующие за ячейкой А2, пусты. В этом легко убедиться, делая их активными.

Размер ячейки определяется шириной столбца и высотой строки. Высота строки, как и шрифта, изменяется в пунктах и определяется размером назначенного шрифта. Ширину столбцов можно изменять, для этого следует курсор поместить на правую границу столбца в строке его имени (курсор имеет вид вертикальной черты с двусторонними стрелками) и, выполнив **МН**, переместить вправо до нужной ширины столбца. Чтобы изменить ширину нескольких столбцов, нужно выделить их, курсор поместить на правую границу любого столбца в строке имен и с помощью **МН** перетащить до нужной ширины столбцов; убрать выделение. Для изменения ширины заполненных столбцов необходимо: выделить эти столбцы, установить курсор в строку их имен на границу между любыми столбцами, щелкнуть **М2**, убрать выделение. На экране ширина каждого столбца будет соответствовать количеству символов, размещенных в нем. Такой результат достигается командой **Столбец, Автоподбор ширины** в меню **Формат**. Аналогично изменяется высота строк. Восстановление стандартной ширины столбцов осуществляется командой **Стандартная** в подменю **Столбец** меню **Формат**, для чего достаточно щелкнуть **М1** по кнопке **ОК** в диалоговом окне **Ширина столбца**. Это окно можно использовать для изменения ширины столбцов.

При решении оптимизационных задач приходится вводить переменные величины с индексами. В этом случае вводят символ основного шрифта. Командами: **Ячейки ...**, **Шрифт** в меню **Формат** вызывают диалоговое окно **Формат ячеек**. В группе команд **Эффекты** этого окна отмечают нужный индекс, устанавливают его размер и нажимают **М1** по **ОК**. Далее вводят индекс и нажимают клавишу <Enter>.

Ввод формул и функций

Для вычисления возвращаемой величины необходимо ввести в ячейку нужную формулу. Формула в ячейке обязательно должна начинаться с равенства «=» и может содержать адреса или имена ячеек, операторы (+ , — , * , / , ^ , =, > , <), числа, функции, пары круглых скобок. Функции вводятся командой **Функция** в меню **Вставка** или щелчком по кнопке — **Мастер функций**.

Отображение формул в ячейках осуществляется командой **Параметры** в меню **Сервис**. В поле **Параметры** диалогового окна **Параметры** (ярлычок **Вид**) следует выбрать формулы и щелкнуть **М1** по **ОК**. Вместе с тем формулу можно видеть на экране в строке формул после выделения ячейки с формулой. Например, после ввода в ячейку А2 формулы = 5 + 10 и нажатия клавиши <Enter> в А2 будет стоять число 15, однако после выделения ячейки А2 в строке формул в этой ячейке появится введенная формула =5 + 10. Примеры формул: = А5 + В7 — сложение содержимого ячеек; =5 * 10 — умножение двух чисел; = МОБР (А1:В2) — найти обратную матрицу к матрице, находящейся в диапазоне ячеек А1:В2.

Excel при копировании изменяет в формулах относительные ссылки на адреса ячеек в соответствии с новым положением этих формул, т.е. происходит автоматическая настройка на новый адрес. Например, в ячейке А1 находится формула = В1 + D1. Если ячейку А1 скопировать в ячейку А3, ее содержанием будет = В3 + D3.

Для сохранения в новом адресе при копировании номера строки (имени столбца) необходимо перед номером строки (именем столбца) в адресе копируемой ячейки поставить символ $. Например, в адресе $BC$12 при копировании сохраняется имя столбца ВС и номер строки 12.

Использование функций Microsoft Excel

Под функцией понимается формула, оперирующая с одним или несколькими значениями, которая возвращает найденные значения. Каждая функция Excel имеет имя и аргументы. Аргумент заключается в круглые скобки. Например, суммы значений ячеек А1 + В1 + С1 + D1 + E1 + F1 и В1 + В2 + В3 + В4 + В5 + В6 + В7 в Excel вычисляются функцией СУММ (А1: F1) и СУММ (В1:В7) соответственно. В записанных формулах СУММ — имя функции, а (А1:F1) и (В1:В7) — аргументы. Учитывая, что функция СУММ используется достаточно часто, на панели инструментов выведена специальная кнопка — **Автосуммирование**. Чтобы найти значение функции с помощью кнопки **Автосуммирование**, необходимо выделить ячейку для размещения результата, щелкнуть **М1** по кнопке **Автосуммирование**, протащить указатель мыши через нужный диапазон ячеек и нажать клавишу <Enter>. Можно поступить проще. Выделить ячейку для размещения результата суммирования и щелкнуть **М1** по кнопке **Автосуммирование**, которая вставит в ячейку формулу и представит диапазон суммирования (если он правильный), нажать клавишу <Enter>; если же диапазон не совпадает с нужным, то перед нажатием клавиши <Enter> следует протащить указатель мыши через нужный диапазон.

Другие функции Excel можно вызвать в диалоговом окне **Мастер функций**, вызываемом командой **Функция** из меню **Вставка**, или щелчком **M1** по кнопке **Мастер функций** на панели инструментов (последний, по утверждению разработчиков, самый простой и удобный способ использования встроенных функций Excel).

Мастер функций содержит следующие категории функций: **10 недавно использовавшихся функций, полный алфавитный перечень, математические, дата и время, логические, ссылки и массивы, текстовые, финансовые, работа с базой данных, проверка свойств и значений, статистические.** Информацию о функциях и ее аргументах можно получить в [9] или других руководствах по Excel.

Встроенные функции используются для создания сложных формул типа =МУМНОЖ (МОБР (A1:B2); E1:E2), что означает: умножить обратную матрицу к матрице массива A1:B2 на матрицу, расположенную в массиве E1:E2; а также объемных формул типа =СУММ (Лист1: Лист12! D10) — эта формула, например, может отражать нахождение заработной платы коллектива предприятия за год. Заработная плата по каждому из 12 месяцев находится в ячейке D10 каждого из 12 листов книги, а заработная плата за год может быть записана, например, в ячейку D10 Листа 13. Строится рассматриваемая формула следующим образом: вводят функцию =СУММ в ячейку D10 листа 13; щелкают **M1** по ярлычку **Лист 1** и, используя кнопку прокрутки листов, выводят на экран **Лист 12**; нажимают клавишу <Shift> и, удерживая ее, щелкают **M1** по ярлычку **Лист 12** (все ярлычки листов на экране становятся белыми, это означает, что листы выделены для включения в создаваемую ссылку формулы); выделяют ячейку D10 и нажимают <Enter>.

С объемными ссылками можно использовать следующие функции: **СУММ, СЧЕТЗ, СРЗНАЧ, МАКС, МИН, СТАНДОТКЛОН, СТАНДОТКЛОНП, ДИСП, ДИСПР, СЧЕТ**.

Форматирование

Вводимые числовые или вычисляемые значения в ячейках, как правило, не отформатированы. Для форматирования данных в выделенной ячейке необходимо: вызвать командой **Ячейки** в меню **Формат** диалоговое окно **Формат ячеек**, выбрать в нем с помощью вкладки **Число** нужный формат и щелкнуть **M1** по **ОК**. Диалоговое окно **Формат ячеек** можно вызвать также с помощью контекстного меню, щелкнув по ячейке **МП**.

Кроме **Общего** и **Числового** (**Общий** принят по умолчанию) диалоговое окно **Формат ячеек** содержит еще следующие форматы: **Денежный, Финансовый, Дата, Время, Процентный, Дробный, Экспоненциальный, Текстовый** и **Дополнительный**. Кроме того, строка **Все форматы** в этом диалоговом окне позволяет пользователю создавать свои форматы. Не останавливаясь на рассмотрении всех форматов, отметим, что **Общий** используется для отображения текстовых и числовых значений произвольного типа. Однако целые числа с большим количеством цифр в ячейке со стандартной шириной **Общий** формат выводит в экспоненциальной форме.

Этот же формат длинные десятичные числа округляет или представляет в экспоненциальной форме, не выводит незначимые нули, десятичную дробь, введенную без числа до десятичной запятой, выводит с нулем перед запятой.

С помощью числового формата можно установить количество выводимых десятичных знаков (от 0 до 30) посредством ввода нужного значения в поле **Число десятичных знаков** диалогового окна **Формат ячеек** или прокрутки с помощью кнопок прокрутки в этом же поле до необходимого количества цифр. Например, при установке трех десятичных знаков число 125,97582 выведется как 125,976, 125,9 — как 125,900, а целое 125 — как 125,000. Флажком **Разделитель групп разрядов** можно установить пробелы между сотнями и тысячами, тысячами и миллионами и т.д. Изменять формат вывода отрицательных чисел и выделять их красным цветом можно с помощью списка **Отрицательные числа**.

Форматирование информации удобно осуществлять с помощью специально созданной в Excel панели инструментов **Форматирование** (см. в 1.3.1 «Панели инструментов»). Применение нужного формата осуществляется к выделенной ячейке или диапазону ячеек щелчком M1 по кнопке панели инструментов. Так, например, увеличить количество разрядов можно, щелкнув M1 по кнопке , уменьшить — по кнопке , вставить разделитель и отобразить числа с двумя знаками после запятой — по кнопке . Аналогично можно применять другие кнопки. Чтобы удалить формат, достаточно щелкнуть по соответствующей кнопке снова.

Автоформат из меню **Формат** может освободить пользователя от процедуры форматирования, автоматически применяя заранее определенные сочетания числового формата, шрифта, выравнивания, ширины столбца, высоты строки, рамки и узора.

Чтобы применить автоформатирование, нужно:

— ввести в рабочий лист необходимую информацию (дополнение);

— выделить область, подлежащую форматированию;

— выбрать команду **Автоформат...** в меню **Формат**. На экране откроется диалоговое окно **Автоформат**;

— вывести на экран секцию **Изменить**, щелкнув M1 по кнопке **Параметры** в окне **Автоформат** (отказаться от некоторых типов формата можно, щелкнув M1 по соответствующему флажку. При этом сразу будут видны соответствующие изменения в секции **Образец**);

— выбрать нужный формат в списке форматов окна **Автоформат** и щелкнуть M1 по кнопке **ОК**;

— снять выделение с форматируемой области посредством выделения ячейки вне этой области (на экране — результаты форматирования).

Редактирование

В меню **Сервис** командой **Параметры** можно вывести на экран диалоговое окно **Правка**, содержащее набор параметров, связанных с редактированием рабочих листов, которые позволяют править прямо в ячейке, перемещать объекты вместе с ячейками, автозаполнять ячейки, перетаскивать ячейки и выполнять другие процедуры редактирования.

Редактирование непосредственно в ячейках осуществляется при установленном флажке **Правка прямо в ячейке**. После установки флажка нужно щелкнуть **M2** по ячейке или нажать клавишу <F2> и выполнить необходимые процедуры редактирования стандартными средствами Windows, выделив в ячейке редактируемую часть. Текст в ячейке или строке формул можно выделить перемещением нажатой кнопки мыши (**МН**), клавишами <↑> <↓> <←> <→> при нажатой клавише <Shift> или с помощью **М2** в начале выделяемого текста и **М1** в его конце при нажатой клавише <Shift>. Средствами редактирования (командами или кнопками на панели инструментов) можно вставлять, удалять и очищать ячейки или группы ячеек (блоки), удалять и вставлять столбцы и строки.

Часто при редактировании необходимо скопировать, перенести или вырезать какую-то информацию. Это осуществляется командами копирования и переноса.

Копирование и перенос информации

Перед копированием нужную информацию необходимо выделить. Далее выделенная информация копируется в буфер обмена командой **Копировать** из меню **Правка** или нажатием клавиш <Ctrl> + <C> (<Ctrl> + <Insert>), или щелчком **М1** по кнопке **Копировать**. На экране выделенная информация представлена в двойной подвижной рамке. После этого содержимое буфера обмена вставляется в нужное место, для чего необходимо курсор установить в левый верхний угол нового положения копируемой информации и щелкнуть **М1**, применить команду **Вставить** из меню **Правка** или щелкнуть **М1** по кнопке **Вставить**. На экране появится скопированная информация.

Копировать можно с помощью мыши. Для этого выделяют информацию, устанавливают стрелку курсора на границу выделенной области, нажимают и удерживают клавишу <Ctrl> (на экране к стрелке курсора добавляется знак плюс), **МН** и, продолжая удерживать клавишу <Ctrl>, перемещают копируемую информацию в нужное место, отпускают кнопку мыши (на экране в новом месте скопированная информация), отпускают клавишу <Ctrl> и убирают выделение.

Перемещение информации, находящейся в ячейке или диапазоне ячеек, на новое место осуществляется следующим образом: выделяют ячейку или диапазон ячеек, устанавливают стрелку курсора на границу выделенной области, выполняют **МН**, перетаскивают информацию на новое место (при перемещении появляется серая рамка, которая служит ориентиром правильного нового размещения информации) и отпускают кнопку мыши.

Выделенную информацию можно копировать в буфер обмена с удалением командой **Вырезать** из меню **Правка** или щелчком **М1** по кнопке панели инструментов — **Вырезать**, или нажатием клавиш <Shift> + <Delete> (<Ctrl> + + <x>). Вставка содержимого буфера обмена в нужное место осуществляется так же, как и при копировании.

При решении оптимизационных задач используются формулы (функции), в которых аргументами являются адреса ячеек. При их копировании в другие ячейки система Excel, как указывалось ранее, создает относительные ссылки, которые автоматически настраиваются на сохранение в новом положении формул прежних связей. Однако во многих случаях требуется осуществить копирование с сохранением адресов для создания в формулах абсолютных ссылок.

Чтобы скопировать информацию с сохранением адресов ячеек, необходимо в адреса, находящиеся в копируемой ячейке, вставить символ денежной единицы $. Если необходимо, например, сохранить при копировании адрес D5, то перед именем столбца D и номером строки 5 следует вставить символ $, т.е. представить адрес в виде $D$5. Такое представление называют абсолютной ссылкой адреса, а представление адреса D5 — относительной ссылкой. В смешанной ссылке $D5 или D$5 знак денежной единицы поставлен перед ее абсолютной частью, которая при копировании сохраняется.

Для создания абсолютных или относительных ссылок удобно использовать клавишу <F4> (циклического переключения ссылок между их комбинациями с D5 — на $D$5, на D$5, на $D5 и снова на D5). Например, в ячейке H3 находится формула СУММПРОИЗВ (A1:D1; A3:D3). Чтобы номер строки в (A1:D1) не изменялся при копировании, нужно выделить эту часть формулы в строке формул (или в ячейке) и, нажимая <F4>, поставить знак $ перед единицами, т.е. = СУММПРОИЗВ (A$1:D$1; A3:D3). При копировании в ячейки H4 и H5 эта формула будет иметь вид = СУММПРОИЗВ (A$1:D$1; A4:D4) и =СУММПРОИЗВ (A$1: D$1; A5:D5) соответственно.

1.3.5. Вывод информации на печать

Для подготовки информации к печати необходимо осуществить ряд процедур, таких как: подбор шрифта, цвет фона, выравнивание текста, установка параметров страницы, предварительный просмотр документа и др.

Подбор шрифта

Создавать различные шрифтовые эффекты позволяет вкладка **Шрифт** диалогового окна **Формат ячеек,** открываемого командой **Ячейки** из меню **Формат**. Изменить тип и размер шрифта можно с помощью кнопок Arial Cyr — **Шрифт** и 10 — **Размер шрифта** на панели инструментов **Форматирование**, щелкнув **M1** по соответствующей кнопке с треугольником и выбрав необходимые параметры шрифта в открывшихся диалоговых окнах. Задать печатание текста полужирным, курсивным или подчеркнутым шрифтом можно кнопками Ж К Ч соответственно.

Цвет фона

Цвет фона выбирается с помощью кнопки , а цвет шрифта — кнопки . Щелчком **M1** по значку треугольника, находящемуся справа от соответствующей кнопки, на экран выводится окно с цветными квадратиками. Щелчком **M1** по квадратику с выбранным цветом будет установлен нужный цвет.

Выравнивание текста

Числа, введенные в ячейки по умолчанию, выравниваются по правому краю, а текст — по левому.

Вкладка **Выравнивание** диалогового окна **Формат ячеек**, открываемого командой **Ячейки** из меню **Формат,** позволяет изменять ориентацию текста в ячейке, переносить текст по словам внутри ячеек и выравнивать текст по горизонтали и вертикали.

Выравнивание текста можно осуществить также с помощью кнопок на панели инструментов **Форматирование**: — выравнивание по левому краю, — выравнивание по правому краю и — выравнивание по центру. Кнопка — позволяет объединить информацию и поместить в центре.

Параметры страницы

Параметры страницы устанавливаются с помощью вкладки **Страница** диалогового окна **Параметры страницы** из меню **Файл**. Эта вкладка позволяет задать масштаб, размер бумаги, качество печати, ориентацию (книжную или альбомную), размер полей и колонтитулов и другие параметры.

Используя диалоговое окно **Параметры страницы**, можно вывести информацию для просмотра. По умолчанию сетка в Excel не печатается, независимо от того, видна она на экране или нет. Если требуется напечатать сетку, то устанавливается флажок **Сетка** на вкладке **Лист** диалогового окна **Параметры страницы**.

Печать документа

Командой **Печать** из меню **Файл** или нажатием кнопки — **Печать** на панели инструментов **Стандартная** осуществляется печать документа.

В диалоговом окне **Печать** можно выбрать варианты печати, задать принтер, число копий и другие параметры. Используя средство Excel, можно информацию представлять в виде графических объектов (диаграмм, гистограмм, рисунков и др.).

Применение MS Excel для решения оптимизационных и других задач рассматривается в конце данной главы и в других главах пособия.

1.4. ПРИМЕНЕНИЕ EXCEL В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОСНОВАХ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

1.4.1. Математические основы оптимальных решений

Математические основы оптимальных решений, наряду с другими методами, представляют жордановы исключения. Рассмотрим модифицированные жордановы исключения, так как их аппарат применяется при изложении ряда тем настоящего учебного пособия.

Пусть имеется система m линейных уравнений

$$y_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \ldots + b_{ij}x_j + \ldots + b_{in}x_n, \quad i=\overline{1,m}. \tag{1.20}$$

Решим систему методом Жордана-Гаусса, для чего предварительно запишем ее в следующем виде:

$$y_i = (-b_{i1})(-x_1) + (-b_{i2})(-x_2) + \ldots + (-b_{ij})(-x_j) + \ldots + (-b_{in})(-x_n), \quad i=\overline{1,m}. \tag{1.21}$$

Обозначим

$$b_{ij} = a_{ij}. \tag{1.22}$$

В результате система будет иметь вид

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + \ldots + a_{1j}(-x_j) + \ldots + a_{1n}(-x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_i = a_{i1}(-x_1) + a_{i2}(-x_2) + \ldots + a_{ij}(-x_j) + \ldots + a_{in}(-x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r = a_{r1}(-x_1) + a_{r2}(-x_2) + \ldots + a_{rj}(-x_j) + \ldots + a_{rn}(-x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}(-x_1) + a_{m2}(-x_2) + \ldots + a_{mj}(-x_j) + \ldots + a_{mn}(-x_n). \end{cases} \tag{1.23}$$

Используя метод Гаусса, выразим из i-го уравнения системы (1.23) неизвестную x_j:

$$x_j = \frac{1}{a_{ij}}[a_{i1}(-x_1) + a_{i2}(-x_2) + \ldots + 1(-y_i) + \ldots + a_{in}(-x_n)], \quad a_{ij} \neq 0. \tag{1.24}$$

Исключим x_j из остальных уравнений системы (1.23), для чего подставим ее выражение из (1.24). В частности, для r-го уравнения получим

$$y_r = a_{r1}(-x_1) + a_{r2}(-x_2) + \ldots + a_{rj}\left(-\frac{1}{a_{ij}}\right)[a_{i1}(-x_1) + a_{i2}(-x_2) + \ldots$$

$$\ldots + 1 \cdot (-y_i) + \ldots + a_{in}(-x_n)] + \ldots + a_{rn}(-x_n). \tag{1.25}$$

Раскрыв скобки, приведем подобные члены относительно неизвестных.

$$y_r = \left(a_{r1} - \frac{a_{rj}a_{i1}}{a_{ij}}\right)(-x_1) + \left(a_{r2} - \frac{a_{rj}a_{i2}}{a_{ij}}\right)(-x_2) + \ldots$$

$$\ldots + \left(-\frac{a_{rj}}{a_{ij}}\right)(-y_i) + \ldots + \left(a_{rn} - \frac{a_{rj}a_{in}}{a_{ij}}\right)(-x_n). \tag{1.26}$$

Выражение (1.26) справедливо для любого $r = \overline{1,m}$, т.е. для всех уравнений системы (1.23), а следовательно, и (1.20).

Обозначим коэффициенты при неизвестных в уравнениях системы (1.26) через

$$c_{rs} = a_{rs} - \frac{a_{rj}a_{is}}{a_{ij}} = \frac{a_{rs}a_{ij} - a_{rj}a_{is}}{a_{ij}}, \quad r = \overline{1,m}; \quad s = \overline{1,n}; \quad r \neq i.$$

С учетом введенного обозначения перепишем систему (1.26), заменив в ней уравнение с номером i уравнением (1.24):

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}(-x_1) + c_{12}(-x_2) + \ldots + (-\dfrac{a_{1j}}{a_{ij}})(-y_i) + \ldots + c_{1n}(-x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_j{}' = \dfrac{a_{i1}}{a_{ij}}(-x_1) + \dfrac{a_{i2}}{a_{ij}}(-x_2) + \ldots + \dfrac{1}{a_{ij}}(-y_i) + \ldots + \dfrac{a_{in}}{a_{ij}}(-x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r = c_{r1}(-x_1) + +c_{r2}(-x_2) + \ldots + (-\dfrac{a_{rj}}{a_{ij}})(-y_i) + \ldots + c_{rn}(-x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = c_{m1}(-x_1) + c_{m2}(-x_2) + \ldots + (-\dfrac{a_{mj}}{a_{ij}})(-y_i) + \ldots + c_{mn}(-x_n). \end{cases} \tag{1.27}$$

Запишем систему уравнений (1.23) в модифицированную таблицу Жордана (табл. 1.1). В табл. 1.2 запишем систему уравнений (1.27).

Таблица 1.1

	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_j$	...	$-x_n$
$y_1=$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...	...	...
$y_i=$	a_{i1}	a_{i2}	...	$\boxed{a_{ij}}$	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...
$y_r=$	a_{r1}	a_{r2}	...	a_{rj}	...	a_{rn}
...	...	...	...	...	...	...
$y_m=$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Преобразование табл. 1.1 в табл. 1.2 называется *шагом модифицированных жордановых исключений,* оно равносильно переходу от системы (1.23) к системе (1.27). В табл. 1.2 неизвестные y_i и x_j поменялись местами.

В исходной таблице (табл. 1.1) строка с номером i называется *разрешающей строкой*, столбец с номером j — *разрешающим столбцом*, а элемент $a_{ij} \neq 0$, находящийся на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, — *разрешающим элементом* (разрешающий элемент в таблице будем заключать в рамку).

Сформулируем правила расчета элементов новой таблицы, полученной с помощью модифицированных жордановых исключений.

Таблица 1.2

	$-x_1$	$-x_2$	...	$-y_i$	...	$-x_n$
$y_1 =$	c_{11}	c_{12}	...	$-\dfrac{a_{1j}}{a_{ij}}$	...	c_{1n}
...	...	...	...	...	...	...
$x_j =$	$\dfrac{a_{i1}}{a_{ij}}$	$\dfrac{a_{i2}}{a_{ij}}$	...	$\dfrac{1}{a_{ij}}$	...	$\dfrac{a_{in}}{a_{ij}}$
...	...	...	...	...	...	...
$y_r =$	c_{r1}	c_{r2}	...	$-\dfrac{a_{rj}}{a_{ij}}$	...	c_{rn}
...	...	...	...	...	...	...
$y_m =$	c_{m1}	c_{m2}	...	$-\dfrac{a_{mj}}{a_{ij}}$	...	c_{mn}

1. Вместо разрешающего элемента в новой таблице ставится обратная ему величина.

2. Элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент.

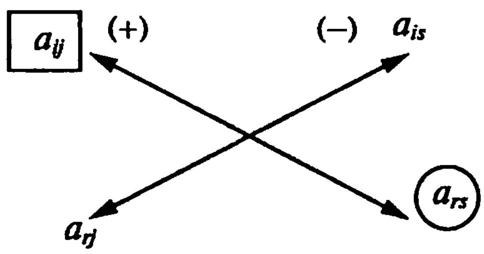
3. Элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и записываются с противоположным знаком.

4. Все прочие элементы таблицы вычисляются по формуле

$$c_{rs} = \frac{a_{rs}a_{ij} - a_{rj}a_{is}}{a_{ij}}, \quad r,i = \overline{1,m}, \quad s,j = \overline{1,n}, \quad r \neq i, \quad s \neq j, \tag{1.28}$$

которая носит название *правила прямоугольника.*

Сначала по этому правилу вычисляется произведение элементов a_{rs} и a_{ij} (разрешающий элемент), которые находятся в двух противоположных вершинах прямоугольника. После вычисляется произведение элементов, расположенных в двух других вершинах прямоугольника. Разность между найденными произведениями делится на разрешающий элемент. Схематически это можно представить так:



Отметим, что при практическом применении модифицированных жордановых исключений не требуется перехода от системы уравнений (1.20) к системе (1.23). Система уравнений (1.20) сразу записывается в модифицированную таблицу Жордана, при этом неизвестные $x_j (j = \overline{1,n})$ записываются в заглавную строку со знаком минус и изменяются знаки на обратные у всех коэффициентов b_{ij}, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$.

Обыкновенные жордановы исключения отличаются от модифицированных тем, что в обыкновенной таблице Жордана неизвестные записываются в верхней заглавной строке с положительным знаком.

Правила перехода от одной обыкновенной таблицы Жордана к другой несколько отличаются от модифицированных и сводятся к следующему:

1. Вместо разрешающего элемента в новой таблице ставится обратная величина.

2. Элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент и записываются с обратным знаком.

3. Элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент.

4. Все прочие элементы таблицы находятся по правилу прямоугольника.

Читателю предлагается самостоятельно осуществить исключение неизвестной x_j из уравнений системы (1.20), выразив предварительно ее из i-го уравнения этой системы, и убедиться в правильности сформулированного правила применения обыкновенных жордановых исключений.

Модифицированные и обыкновенные жордановы исключения применяются при обработке информации для нахождения ранга матриц, обратных матриц, для решения систем линейных уравнений и задач линейной оптимизации.

Пример 1.6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Поместим матрицу в обыкновенную таблицу Жордана (табл. 1.3), обозначив строки y_1, y_2, y_3, а столбцы — x_1, x_2, x_3. Согласно теореме Стейница, ранг матрицы равен количеству «переброшенных» в верхнюю часть таблицы «игреков».

Разрешающим элементом выберем (1) и, применяя правила обыкновенных жордановых исключений, рассчитаем элементы табл. 1.4.

Таблица 1.3

	x_1	x_2	x_3
y_1	2	3	5
y_2	3	$\boxed{1}$	2
y_3	8	5	9

Таблица 1.4

	x_1	y_2	x_3
y_1	$\boxed{-7}$	3	−1
x_2	−3	1	−2
y_3	−7	5	−1

Аналогично найдены элементы табл. 1.5 на основе пересчета элементов табл. 1.4 с разрешающим элементом (–7).

Таблица 1.5

	y_1	y_2	x_3
x_1	−1/7	3/7	−1/7
x_2	3/7	−2/7	−11/7
y_3	1	2	0

Неизвестную y_3 в табл. 1.5 наверх перебросить невозможно, так как на пересечении третьей строки и третьего столбца находится нулевой элемент. Следовательно, ранг матрицы равен 2 ($r_A = 2$). Из табл. 1.5 видна линейная зависимость третьей строки от двух первых, т.е. $y_3 = y_1 + 2y_2$. В самом деле: $1 \cdot (2\,3\,5) + 2 \cdot (3\,1\,2) = (8\,5\,9)$.

Пример 1.7. Найти обратную матрицу A^{-1} к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поместим матрицу в таблицу Жордана (табл. 1.6) и будем перемещать y_i, $i = \overline{1,3}$, в верхнюю часть таблицы. Если перемещать y_1 вместо x_1, y_2 вместо x_2 и y_3 вместо x_3, то в последней таблице будет получена обратная матрица; если такого порядка замены игреков иксами не соблюдать, то (для получения обратной матрицы) в последней таблице нужно поменять местами строки (столбцы) так, чтобы игреки в верхней части таблицы и иксы в левом заглавном столбце стояли в порядке возрастания их номеров. В табл. 1.6 разрешающим элементом выбран элемент $a_{11} = 1$, в табл. 1.7 — $a_{32} = 1$, в табл. 1.8 — $a_{23} = -16$. В результате последовательных преобразований с указанными разрешающими элементами игреки переброшены в верхнюю часть таблицы (табл. 1.9). Однако строки и столбцы в табл. 1.9 не упорядочены.

Таблица 1.6

	x_1	x_2	x_3
y_1	$\boxed{1}$	1	2
y_2	3	1	4
y_3	4	5	1

Таблица 1.7

	y_1	x_2	x_3
x_1	1	−1	−2
y_2	3	−2	−2
y_3	4	$\boxed{1}$	−7

Таблица 1.8

	y_1	y_3	x_3
x_1	5	−1	−9
y_2	11	−2	$\boxed{-16}$
x_2	−4	1	7

Чтобы получить обратную матрицу, упорядочим строки и столбцы табл. 1.9. Результат запишем в табл. 1.10.

Таблица 1.9

	y_1	y_3	y_2
x_1	−19/16	1/8	9/16
x_3	11/16	−1/8	−1/16
x_2	13/16	1/8	−7/16

Таблица 1.10

	y_1	y_2	y_3
x_1	−19/16	9/16	1/8
x_2	13/16	−7/16	1/8
x_3	11/16	−1/16	−1/8

Таким образом,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -19/16 & 9/16 & 1/8 \\ 13/16 & -7/16 & 1/8 \\ 11/16 & -1/16 & -1/8 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность расчетов путем умножения матрицы A на обратную матрицу A^{-1}

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -19/16 & 9/16 & 1/8 \\ 13/16 & -7/16 & 1/8 \\ 11/16 & -1/16 & -1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как в результате умножения получена единичная матрица E, то расчет произведен верно.

Пример 1.8. Применяя модифицированные жордановы исключения, решить систему уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$$

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} 0 = (-2)(-x_1) + 3(-x_2) + 1(-x_3) + 6, \\ 0 = 1(-x_1) + 1(-x_2) + (-1)(-x_3) + 3, \\ 0 = 1(-x_1) + 2(-x_2) + 8. \end{cases}$$

Занесем преобразованную систему уравнений в модифицированную таблицу Жордана (табл. 1.11). В системе и в таблице запись уравнений тождественная. Например, первое уравнение в таблице читается так: нуль равен коэффициенту (–2), умноженному на $(-x_1)$, плюс 3, умноженное на $(-x_2)$, плюс 1, умноженное на $(-x_3)$, и плюс 6.

Чтобы решить систему, необходимо переместить все нули в верхнюю часть таблицы, т.е. поменять их местами с иксами.

Таблица 1.11

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
0 =	−2	3	$\boxed{1}$	6
0 =	1	1	−1	3
0 =	1	2	0	8

Выберем в таблице разрешающий элемент (1) в 1-й строке и рассчитаем по правилу модифицированных жордановых исключений табл. 1.12.

Таблица 1.12

	$-x_1$	$-x_2$	0	1
x_3 =	−2	3	1	6
0 =	−1	4	1	9
0 =	$\boxed{1}$	2	0	8

Отметим, что столбец с нулевым элементом в верхней части таблицы не влияет на значения неизвестных, так как коэффициенты, стоящие в этом столбце, умножаются на нуль. Следовательно, при перемещении нулей в верхнюю часть таблицы соответствующие столбцы можно опускать, за счет этого таблицы на каждом шаге жордановых преобразований будут уменьшаться на один столбец.

В третьей строке табл. 1.12 выберем разрешающий элемент, равный 1, и рассчитаем элементы новой таблицы (табл. 1.13).

Выполнив еще один шаг модифицированных жордановых исключений с разрешающим элементом 6, получим решение системы уравнений в табл. 1.14.

Таблица 1.13

	$-x_2$	1
x_3 =	7	22
0 =	$\boxed{6}$	17
x_1 =	2	8

Таблица 1.14

	1
x_3 =	13/6
x_2 =	17/6
x_1 =	7/3

Из табл. 1.14 видно, что $x_1 = 7/3$; $x_2 = 17/6$; $x_3 = 13/6$.

Для нахождения решений систем уравнений могут применяться обыкновенные жордановы исключения, а также другие технологические способы представления информации в жордановых таблицах.

1.4.2. Решение прикладных задач средствами Excel

Применение информационных технологий Excel рассмотрим на примерах.

Пример 1.9. Найти обратную матрицу к матрице A из примера 1.7.

Введем элементы матрицы A в диапазон ячеек B5:D7 (после ввода в ячейку соответствующего элемента нажимаем клавишу <Enter>). Выделим область (диапазон из 9 ячеек) F5:H7 для размещения обратной матрицы. Найдем обратную матрицу с помощью функции **МОБР**, для чего: щелкнем **М1** по кнопке (вставка функции) стандартной панели инструментов (на экране диалоговое окно **Мастер функций**). В левом окне подведем курсор на категорию **математические** и выделим ее щелчком **М1** (строка окрасится в синий цвет). В поле **Функция** этого окна с помощью кнопок прокрутки найдем функцию **МОБР**.

Выделим функцию **МОБР** щелчком **М1**. В текущем окне щелкнем **М1** по кнопке **OK** (на экране диалоговое окно **МОБР**). В поле **Массив** с мигающим курсором введем диапазон размещения элементов матрицы A. Это можно сделать двумя способами.

Первый способ. Установим курсор на красную стрелку в правой стороне поля **Массив** и щелкнем **М1** (на экране в строке ниже строки формул — кнопка с красной стрелкой, направленной вниз, и массив матрицы A). Выделим диапазон ячеек B5:D7 (массив матрицы A). Для этого установим курсор в ячейку B5 и с помощью **МН** протащим его в ячейку D7. В результате диапазон ячеек заключен в прямоугольную подвижную рамку (на экране в строку формул занесена функция =МОБР(B5:D7), в строку ниже строки формул также занесен диапазон B5:D7. Подведем курсор к кнопке с красной стрелкой, находящейся ниже строки формул, и щелкнем **М1** (на экране снова окно **Массив** с введенным диапазоном). Нажав клавиши <Ctrl> + <Shift> + <Enter> (нажатием этих клавиш мы указываем программе, что она должна выполнить операцию над массивами), на экране в выделенном диапазоне получим обратную матрицу с элементами в десятичной форме.

Второй способ. В поле **Массив с** клавиатуры введем диапазон B5:D7 (можно малые латинские буквы) и нажмем клавиши <Ctrl> + <Shift> + <Enter> (на экране обратная матрица).

Второй способ может показаться читателю проще, однако с помощью первого способа удобнее формировать сложные функции. Чтобы напечатать обратную матрицу на принтере, выделим ее на экране, включим принтер и применим команду **Печать** из меню **Файл** (на экране диалоговое окно **Печать**). В поле **Вывести на печать** диалогового окна **Печать** активизируем **выделенный диапазон**, щелкнув **М1**. В окне поля **Копии** установим число копий «1» и щелкнем **М1** по кнопке **ОК**. На печать будет выведена обратная матрица к матрице A:

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА К МАТРИЦЕ (A)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1{,}1875 & 0{,}5625 & 0{,}125 \\ 0{,}8125 & -0{,}4375 & 0{,}125 \\ 0{,}6875 & -0{,}0625 & -0{,}125 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -8, \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 28, \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 14. \end{cases}$$

Решить систему $Ax = B$, где A — матрица из коэффициентов при неизвестных, x — вектор-столбец неизвестных, B — вектор-столбец свободных членов, можно по формуле $x = A^{-1}B$, где A^{-1} — обратная матрица к матрице A.

Занесем матрицу A в ячейки B2:D4, а вектор B в ячейки F2:F4. Выделим диапазон ячеек G2:G4 для размещения вектора решений x, введем в него формулу =МУМНОЖ(МОБР(B2::D4); F2:F4) и нажмем клавиши <Ctrl> + <Shift> + <Enter>.

В ячейках G2:G4 значения неизвестных: $x_1 = 2$; $x_2 = -3$; $x_4 = 5$.

Отметим, что формулу можно ввести в ЭВМ с клавиатуры, но можно и по-другому, например: выделим ячейки G2:G4 под результат, щелкнем M1 по кнопке **Вызов функции**, активизируем в диалоговом окне **Мастер функций** категорию **математические** и функцию **МУМНОЖ** (на экране в строке формул функция = **МУМНОЖ ()**, в поле **Массив 1** — мигающий курсор). Наберем в этом поле с клавиатуры функцию МОБР и левую круглую скобку «(» , щелкнем M1 по красной стрелке в поле **Массив 1**. Чтобы ввести диапазон ячеек размещения матрицы A, выделим ячейки B2:D4 (они окаймлены подвижной рамкой), щелкнем M1 по красной стрелке в строке, расположенной ниже строки формул (на экране в поле **Массив 1** — «МОБР(B2:D4» и мигающий курсор). Введем с клавиатуры правую скобку и переведем курсор в поле **Массив 2**, щелкнув M1 по красной стрелке в этом поле. Отметим открывшийся массив F2:F4 и щелкнем M1 по красной стрелке в строке под строкой формул (на экране в строке формул — полностью введенная формула). Нажав <Ctrl> + <Shift> + <Enter>, получим тот же результат.

Пример 1.11. (Модель международной торговли.) Четыре страны договорились осуществлять между собой сбалансированную (бездефицитную) торговлю на сумму S млн. ден. ед.

Бюджет j-й страны на закупку товаров обозначим через $x_j (j = \overline{1,4})$, а долю бюджета, которую j-я страна тратит на закупку товаров у i-й страны, через a_{ij}. Тогда с учетом обозначений и при условии, что весь бюджет расходуется на закупку товаров как внутри страны, так и у других стран, т.е. $\sum_{i=1}^{4} a_{ij} = 1$, $j = \overline{1,4}$, структурная матрица торговли будет иметь вид : $A = \|a_{ij}\|_{4\times4}$. Необходимо найти величину бюджета каждой страны $x_j (j = \overline{1,4})$ при бездефицитной торговле.

Учитывая, что бюджет каждой страны на закупку товаров должен быть сбалансированным, запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = x_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = x_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = x_4. \end{cases}$$

или в матрично-векторной форме $A\overline{x} = \overline{x}$, где $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Уравнение $A\overline{x} = \overline{x}$ означает, что собственный вектор $\overline{x}$ матрицы A, отвечающий ее собственному значению $\lambda = 1$, представляет собой бюджеты стран бездефицитной международной торговли.

Чтобы найти $\overline{x}$, преобразуем уравнение $A\overline{x} = \overline{x}$ к виду $(A - E)\overline{x} = 0$. Это преобразование получено переносом $\overline{x}$ в левую часть уравнения и вынесением его за скобки. Здесь E — единичная матрица.

Записанную систему дополним неравенством $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le S$, которое отражает, что сумма бюджетов должна быть не больше заданной величины S.

Решим задачу при $S = 7\ 680$ млн ден.ед. и структурной матрице

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Уравнение $(A - E)\bar{x} = 0$ имеет вид

$$\left[\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Дополнив его неравенством $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 7680$, окончательно получим систему для нахождения бюджетов стран

$$\begin{cases} -0{,}8x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}1x_4 = 0, \\ 0{,}3x_1 - 0{,}7x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}2x_4 = 0, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 - 0{,}5x_3 + 0{,}4x_4 = 0, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 - 0{,}7x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 7680. \end{cases}$$

Найти решение этой системы по схеме, рассмотренной в предыдущем примере, не представляется возможным по двум причинам: первая — нельзя найти обратную матрицу к неквадратной матрице (матрица в нашей задаче имеет размерность 5x4); вторая — пятое ограничение в системе записано в виде неравенства. Поэтому для решения задачи возьмем функцию $\sum_{j=1}^{4} x_j \to \max$ и воспользуемся командой **Поиск решения** из меню **Сервис** MS Excel, позволяющей решать оптимизационные задачи.

Введем исходные данные задачи в ЭВМ (рис. 1.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ	(бюджеты стран)			
2		X1	X2	X3	X4	Левая часть ограничения	Знак	Правая часть
3	Ограничение 1	-0,8	0,2	0,1	0,1	=СУММПРОИЗВ(B$8:E$8;B3:E3)	=	0
4	Ограничение 2	0,3	-0,7	0,1	0,2	=СУММПРОИЗВ(B$8:E$8;B4:E4)	=	0
5	Ограничение 3	0,4	0,3	-0,5	0,4	=СУММПРОИЗВ(B$8:E$8;B5:E5)	=	0
6	Ограничение 4	0,1	0,2	0,3	-0,7	=СУММПРОИЗВ(B$8:E$8;B6:E6)	=	0
7	Сумма бюджетов	1	1	1	1	=СУММПРОИЗВ(B$8:E$8;B7:E7)	<=	7680
8	Значения переменных							

Рис. 1.2

Ввод в ячейку каждого коэффициента при неизвестной заканчивается нажатием клавиши <Enter>. Под значения переменных отведем массив B8:E8. В массиве G3:G7 запишем знаки равенств и знак неравенства, в массив H3:H7 занесем правые части системы ограничений, а в массив F3:F7 — формулы, соответствующие сумме произведений значений переменных на коэффициенты при этих переменных.

Чтобы сформировать формулу в ячейке F3, щелкнем по кнопке на панели инструментов. На экране — диалоговое окно **Мастер функций.** В поле **Категория** выделим **математические**, щелкнув М1 по названию этой категории. Переведем курсор в поле **Функция** и, установив его на функцию СУММПРОИЗВ, щелкнем М1 и далее щелкнем М1 по кнопке **ОК**. На экране — диалоговое окно **СУММПРОИЗВ** и поле массивов. В строке формул также находится функция СУММПРОИЗВ. Щелкнем по красной стрелке в поле **Массива 1.** (На экране исчезло диалоговое окно.) Установим курсор в ячейку В8, выполним **МН** и протащим курсор до ячейки Е8. В результате выделится массив В8:Е8 (он окаймлен подвижной рамкой). Нажмем **М1** по красной стрелке в строке, находящейся ниже строки формул. Диапазон В8:Е8 введен в формулу. Нажмем дважды клавишу <F4> для ввода символа $ перед номером строки и установки этим абсолютной ссылки на номер 8-й строки, где будут расположены вычисляемые значения переменных. Переведем мигающий курсор в поле **Массива 2** и тоже щелкнем **М1** по красной стрелке в этом поле. Выделим диапазон В3:Е3 с коэффициентами при неизвестных в **Ограничении 1** и щелкнем **М1** по красной кнопке, расположенной, как и ранее, в строке ниже строки формул. Массив В3:Е3 введен в формулу. Учитывая, что ввод массивов закончен, щелкнем **М1** по кнопке **ОК**. Чтобы ввести аналогичные формулы в диапазон ячеек F4:F7, выделим ячейку F3 и установим курсор на малый черный квадрат в правом углу этой ячейки (курсор превратится в черный крестик), с помощью **МН** переместим курсор последовательно по ячейкам от F4 до F7 и отпустим кнопку мыши. Нужные формулы введены в соответствующие ячейки.

Далее применим команду **Поиск решения** из меню **Сервис**, щелкнув последовательно **М1** по названиям. На экране диалоговое окно **Поиск решения**. В поле **Установить целевую ячейку** занесем $F$7, так как именно в ячейке F7 будет вычисляться сумма бюджетов стран. Эта сумма, исходя из цели решения задачи, должна быть максимальной, но не превышающей заданной величины 7 680 млн ден. ед., поэтому после слова **Равной** выделим **Максимальному значению**, щелкнув **М1**. В поле **Изменяя ячейки:** занесем диапазон В8:Е8, так как именно эти ячейки отведены под значения вычисляемых переменных, щелкнув **М1** по красной стрелке в этом поле. На экране диалоговое окно **Поиск решения** в виде двух строк. Выделим, как и ранее, диапазон В8:Е8 и щелкнем **М1** по красной стрелке в поле **Поиск решения**. На экране — выделенный диапазон занесен в поле **Изменяя ячейки:**.

Занесем ограничения задачи в поле **Ограничения:**, для чего щелкнем **М1** по кнопке **Добавить**. На экране диалоговое окно **Добавление ограничения**. В поле **Ссылка на ячейку:** занесем диапазон F3:F6 , щелкнув по кнопке , в среднее поле занесем равенство, выделив его в открывшемся окне. В правое поле занесем правые части ограничений, расположенные в диапазоне Н3:Н6. Смысл указанных действий — левые части ограничений с 1-го по 4-е должны быть равны соответствующим правым частям. Щелкнем **М1** по кнопке **Добавить** и внесем ограничение для суммы бюджетов F7<= Н7.

Так как все условия задачи введены, щелкнем **М1** по **ОК** (отметим, что если диалоговое окно не закрывает массив исходных данных, то для занесения ячеек или их диапазонов в то или другое поле не нужно нажимать красные стрелки, а достаточно разместить курсор в нужном поле и выделить ячейки). На экране диалоговое окно **Поиск решения**. Щелкнем **М1** по кнопке **Параметры** (на экране диалоговое окно **Параметры** поиска решения). В этом окне можно изменять при необходимости параметры поиска решения (максимальное время решения задачи, предельное число итераций и др.). Для сохранения модели задачи на диске необходимо щелкнуть **М1** по кнопке **Сохранить модель** и ввести в открывшемся диалоговом окне **Сохранить модель** область модели. В диалоговом окне **Параметры** поиска решения отметим галочкой **Линейная модель**, **Неотрицательные значения** и **Автоматическое**

масштабирование, щелкнув М1 по их именам. Щелкнем М1 по ОК. На экране диалоговое окно **Поиск решения**. Щелкнем М1 по кнопке **Выполнить** (на экране диалоговое окно **Результаты поиска решения**). В этом окне отмечаем, при необходимости, тип отчета, щелкнув по нему М1. После завершения необходимых установок щелкнем М1 по ОК. На экране — результаты решения. В нижней части экрана, в строке состояния, размещены названия типов отчетов. Щелкнув М1 по любому из них, он будет выведен на экран.

Для вывода результата решения задачи на печать щелкнем М1 по кнопке — **Печать**. Результаты следующие:

	ПЕРЕМЕННЫЕ (бюджеты стран)						
	X1	X2	X3	X4			
Ограничение 1	-0,8	0,2	0,1	0,1	2,84217E-14	=	0
Ограничение 2	0,3	-0,7	0,1	0,2	0	=	0
Ограничение 3	0,4	0,3	-0,5	0,4	6,82121E-13	=	0
Ограничение 4	0,1	0,2	0,3	-0,7	-2,27374E-13	=	0
Сумма бюджетов	1	1	1	1	7680	<=	7680
Значения переменных	1015,36	1458,23	3251,31	1955,105			

Из решения видно, что бюджет первой страны $x_1 = 1\,015{,}36$; второй — $x_2 = 1\,458{,}23$; третьей — $x_3 = 3251{,}31$ и четвертой — $x_4 = 1\,955{,}105$, а их сумма равна заданной величине 7 680 млн ден. ед. Ограничения задачи также выполнены. Суммы произведений коэффициентов на значения переменных в левых частях 1, 3 и 4-го ограничений представлены в экспоненциальной форме и равны нулю. При необходимости можно вывести на печать и все отчеты: по результатам, по устойчивости и по пределам.

Упражнения

1.1. Четыре отрасли выпускают продукцию в объемах 300, 400, 400 и 350 млрд руб. соответственно. Каждая отрасль какую-то долю своей продукции и продукции других отраслей тратит на производственные нужды, а остальная продукция реализуется вне отраслей производителей (объем конечного потребления). Долю продукции i-й отрасли ($i = \overline{1,4}$), потребляемую j-й отраслью ($j = \overline{1,4}$), обозначим a_{ij}. Тогда эти доли образуют матрицу

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{4\times4} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти величину $y_i (i = \overline{1,4})$ продукции, предназначенной для реализации вне отраслей производителей, и дать характеристику работы отраслей.

Указание. Для решения задачи обозначим объемы производства продукции отраслями вектором

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 400 \\ 350 \end{pmatrix},$$

а объемы продукции, предназначенной для реализации вне отраслей производителей, вектором

$$\overline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\overline{Y} = \overline{x} - A\overline{x}$ или $\overline{Y} = (E - A)\overline{x}$, где E — единичная матрица.

1.2. Условие такое же, как и в упражнении 1.1, т.е. матрица A остается неизменной. Однако нужно найти вектор $\overline{x}$, характеризующий общие объемы выпуска продукции каждой отраслью при заданном векторе

$$\overline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 170 \\ 200 \\ 150 \\ 190 \end{pmatrix}$$

характеризующем объемы конечной продукции, реализуемой вне этих отраслей (млрд руб.).

Указание. Из уравнения $\overline{Y} = (E - A)\overline{X}$ имеем $\overline{X} = (E - A)^{-1}\overline{Y}$, где $(E - A)^{-1}$ — обратная матрица к матрице $(E - A)$.

1.3. Предприятие получило государственный заказ на производство четырех видов продукции в объемах, заданных вектором

$$\overline{P} = (p_1, p_2, p_3, p_4) = (140, 160, 200, 150).$$

Нормы расхода пяти видов ресурсов на производство единицы продукции каждого вида представлены матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Требуется определить потребность в ресурсах на выполнение государственного заказа.

1.4. Нормы расхода пяти видов сырья на производство четырех видов продукции представлены матрицей A из упражнения 1.3. Объемы производства продукции (шт.) заданы вектором $\overline{P} = (200, 300, 100, 500)$. Стоимость единицы каждого вида сырья и затраты на его доставку (тыс. ден. ед.) представлены матрицей

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

В первой строке матрицы приведены значения стоимости сырья, а во второй — затрат на его доставку.

Требуется найти:

1. Стоимость сырья, расходуемого на единицу каждого вида продукции, и затраты на его доставку;

2. Суммарную стоимость сырья, расходуемого на производство продукции в объеме, заданном вектором $\overline{P}$, и затраты на его доставку.

Указание. Обозначим через C' матрицу стоимости сырья, расходуемого на каждый вид продукции, и затрат на его доставку. Тогда ответ на второй вопрос выразится соотношением $C'' = \overline{P} \cdot (C')^{\mathrm{T}}$, где $(C')^{\mathrm{T}}$ — транспонированная матрица C'.

РАЗДЕЛ II

Методы оптимальных решений в информационных технологиях управления

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

2.1. ОБЩАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И МЕТОДЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

2.1.1. Формы записи задач линейной оптимизации

Наиболее разработанным разделом информационных технологий оптимальных решений является раздел оптимизации, включающий теорию и методы решения практических задач, в которых критерий оптимальности линейно зависит от параметров задачи, а ограничениями являются линейные уравнения и неравенства.

Начало линейной оптимизации было положено в 1939 г., когда вышла в свет работа профессора Ленинградского университета Л.В. Канторовича «Математические методы организации и планирования производства». Академик Л.В. Канторович за разработку методов решения оптимизационных задач был удостоен звания лауреата Ленинской премии (1964) и Нобелевской премии по экономике (1975).

Современные информационные технологии оптимизации решений широкого класса практических задач включают их качественную и количественную постановку (математическую модель), математические методы и программы для ЭВМ решения этих задач, а также методы экономико-математического анализа оптимальных решений.

Общая задача линейной оптимизации состоит в нахождении максимума (минимума) линейной функции

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \le b_i, \quad i = \overline{1,k}, \tag{2.2}$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n = b_i, \quad i = \overline{k+1,m}, \tag{2.3}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.4}$$

Эквивалентная запись этой задачи с использованием знака суммирования выглядит так:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min), \tag{2.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,k}, \tag{2.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{k+1,m}, \tag{2.7}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{2.8}$$

Функцию Z называют *целевой* функцией, *критерием оптимальности* или *линейной формой.*

Если в математической модели задачи линейной оптимизации (2.5)–(2.8) исключить ограничения (2.7), то полученная задача будет называться *симметричной* задачей.

Если в задаче (2.5)–(2.8) исключить ограничения (2.6) , то полученная задача будет называться *канонической* задачей линейной оптимизации.

Совокупность значений неизвестных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условиям задачи (2.5)–(2.8), называется *решением.*

Решение $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ называется *оптимальным*, если оно обеспечивает максимальное (минимальное) значение целевой функции (2.5).

Покажем, как с помощью несложных преобразований можно перейти от одной формы записи задачи к другой.

Любое ограничение-неравенство задачи линейной оптимизации вида «≤» преобразуется в равенство добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, а неравенство вида «≥» — вычитанием из его левой части дополнительной неотрицательной переменной. Например, неравенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_i, \quad i = \overline{1,m},$$

преобразуются в равенства путем добавления к левой части соответствующих дополнительных неизвестных y_i $(i = \overline{1,m})$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + y_i = b_i, \quad y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m},$$

а неравенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \ge b_i, \quad i = \overline{1,m},$$

после вычитания дополнительных неизвестных преобразуются в равенства вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - y_i = b_i, \quad y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

В реальных практических задачах дополнительные неизвестные имеют определенный смысл. Например, если левая часть ограничений задачи отражает расход ресурсов на производство продукции в объемах x_j, $j = \overline{1,n}$, а правые части — наличие производственных ресурсов, то числовые значения дополнительных неизвестных y_i $(i = \overline{1,m})$ означают объем неиспользованных ресурсов i-го вида.

Каждое равенство системы ограничений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = \overline{1,m},$$

можно представить в виде двух неравенств:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_i, \quad i = \overline{1,m},$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \ge b_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

Если на какую-то неизвестную x_s не наложено условие неотрицательности, то ее можно заменить двумя неотрицательными неизвестными u_s и v_s, приняв $x_s = u_s - v_s$.

2.1.2. Геометрическая интерпретация и графический метод решения задач линейной оптимизации

Напомним определение и свойства выпуклых множеств и некоторые другие понятия из курса высшей математики.

Множество точек называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя своими точками содержит их произвольную выпуклую линейную комбинацию. Геометрически это означает, что если множеству с любыми двумя его произвольными точками полностью принадлежит и отрезок, соединяющий эти точки, то оно будет выпуклым. Например, выпуклыми множествами являются прямолинейный отрезок, прямая, круг, шар, куб, полуплоскость, полупространство и др.

Точка множества называется *граничной*, если любой шар сколь угодно малого размера с центром в этой точке содержит точки, как принадлежащие множеству, так и не принадлежащие ему.

Граничные точки множества образуют его *границу*. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки.

Ограниченным называется множество, если существует шар с радиусом конечной длины и центром в любой точке множества, содержащий полностью в себе данное множество. В противном случае множество будет *неограниченным*.

Пересечение двух или более выпуклых множеств будет выпуклым множеством, так как оно отвечает определению выпуклого множества.

Выпуклой линейной комбинацией произвольных точек $x_1, x_2, \dots, x_n$ евклидова пространства E_n называется сумма $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$, где α_i $(i = \overline{1,n})$ — произвольные неотрицательные числа, сумма которых равна 1.

Точка выпуклого множества называется *угловой*, если она не может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации двух других различных точек этого множества. Так, угловые точки треугольника — его вершины, круга — точки окружности, его ограничивающие, а прямая, полуплоскость, плоскость, полупространство, пространство не имеют угловых точек.

Выпуклое замкнутое ограниченное множество на плоскости, имеющее конечное число угловых точек, называется *выпуклым многоугольником*, а замкнутое выпуклое ограниченное множество в трехмерном пространстве, имеющее конечное число угловых точек, называется *выпуклым многогранником*.

Плоскость в трехмерной координатной системе выражается уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c, \text{ или в векторной форме } \quad \bar{a} \cdot \bar{x} = c,$$

где $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ — направляющий вектор, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — вектор с текущими координатами x_1, x_2, x_3.

Если рассматривать уравнение с n координатами ($n > 3$):

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c, \text{ или в векторной форме } \quad \bar{a} \cdot \bar{x} = c,$$

где $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — векторы евклидова n-мерного пространства, каждый из которых рассматривается как упорядоченная совокупность чисел, то по аналогии с трехмерным пространством назовем множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c,$$

плоскостью, а чтобы подчеркнуть, что это плоскость n-мерного пространства, назовем ее *гиперплоскостью* (приставка «гипер» означает «сверх»).

Прямая на плоскости делит последнюю на две полуплоскости, плоскость в трехмерном пространстве делит его на два полупространства; по аналогии будем считать, что гиперплоскость тоже делит n-мерное пространство на два полупространства.

2.1.2.1. Геометрическая интерпретация задачи линейной оптимизации

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min), \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.11}$$

Каждое из неравенств системы ограничений (2.10) и (2.11) в евклидовом n-мерном пространстве является полупространством с граничными гиперплоскостями

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad \text{и} \quad x_j = 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Поскольку полупространство является выпуклым множеством, то пересечение полупространств (выпуклых множеств), заданных названной системой ограничений, если она совместна (не противоречива), будет выпуклым многогранником (множеством), который образует область допустимых решений (ОДР) системы ограничений. По аналогии с трехмерным пространством будем считать, что угловыми точками выпуклого многогранника в n-мерном пространстве являются его вершины, образованные пересечением гиперплоскостей.

Любая внутренняя и граничная точка ОДР является решением задачи. Приравняем функцию (2.9) к нулю, тогда уравнение

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = 0$$

представляет собой в E_n гиперплоскость, проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору-градиенту (направляющему вектору) $\bar{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Направление вектора-градиента показывает направление возрастания функции. Поэтому, чтобы найти максимум функции, необходимо передвигать гиперплоскость в направлении вектора как можно дальше от начала координат, но чтобы она имела с ОДР хотя бы одну общую точку. Чтобы найти минимум функции, нужно определить ближайшую точку в ОДР от начала координат.

Для двумерного евклидова пространства на рис. 2.1 показано, что в угловой точке A функция достигает максимального значения, а в точке B — минимального.

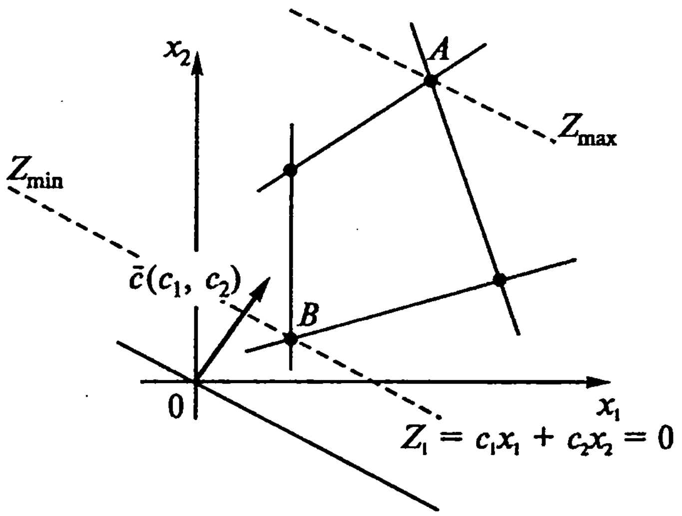


Рис. 2.1

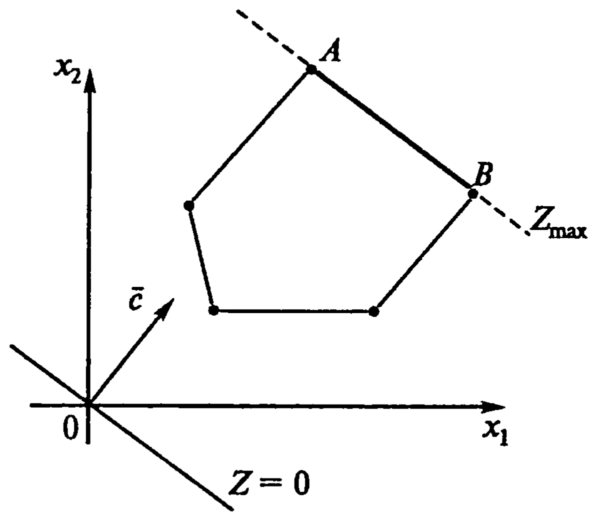


Рис. 2.2

Рис. 2.2 отражает случай, когда прямая функции параллельна отрезку AB, принадлежащему ОДР. Максимум функции Z достигается в точке A и в точке B, следовательно, и в любой точке отрезка AB, так как эти точки могут быть выражены в виде линейной комбинации угловых точек A и B.

На рис. 2.3 изображен вариант, когда система ограничений образует неограниченное сверху множество. Функция Z при этом стремится к бесконечности, так как прямую функции можно передвигать в направлении вектора градиента как угодно далеко. На рис. 2.4 представлен случай несовместной системы ограничений.

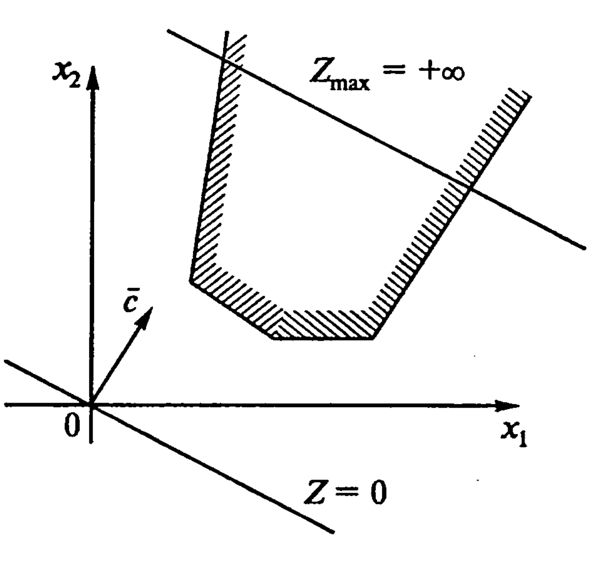


Рис. 2.3

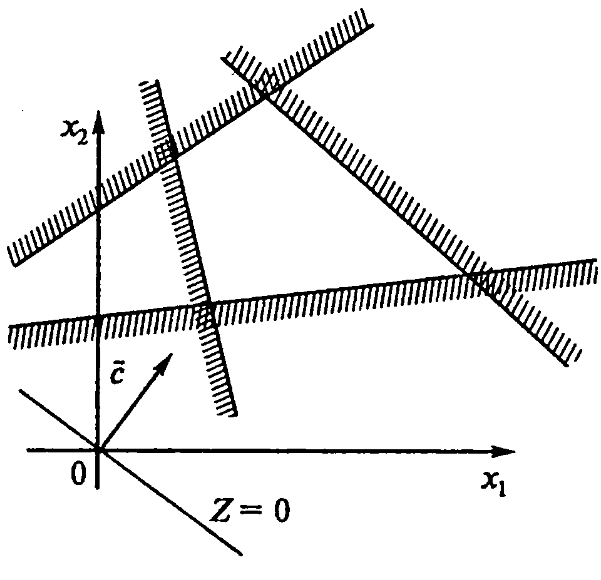


Рис. 2.4

2.1.2.2. Графический метод решения

Графический метод решения задач линейной оптимизации рассмотрим на примере задачи производственного планирования при $n = 2$.

Пусть предприятие изготавливает изделия двух видов *А* и *В*. Для производства изделий оно располагает сырьевыми ресурсами трех видов *С*, *D* и *Е* в объемах 600, 480 и 240 единиц соответственно. Нормы расхода ресурсов на единицу продукции каждого вида известны и представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

	A	*B*
C	24	8
D	8	8
E	3	8

Прибыль от реализации изделия *А* составляет 40 млн руб., а изделия *В* — 50 млн руб. Требуется найти объемы производства изделий *А* и *В*, обеспечивающие максимальную прибыль.

Построим математическую модель задачи, для чего обозначим через x_1 и x_2 объемы производства изделий *А* и *В* соответственно.

Тогда максимальная прибыль предприятия от реализации x_1 изделий *А* и x_2 изделий *В* составит

$$Z = 40x_1 + 50x_2 \to \max.$$

Ограничения по ресурсам будут иметь вид:

$$\begin{cases} 24x_1 + 8x_2 \le 600, \\ 8x_1 + 8x_2 \le 480, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 240. \end{cases}$$

Естественно, объемы производства должны быть неотрицательными:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение сформулированной задачи найдем, используя геометрическую интерпретацию. Определим сначала многоугольник решений, для чего систему ограничений-неравенств запишем в виде уравнений и пронумеруем их:

$$\begin{cases} 24x_1 + 8x_2 = 600, & (1) \\ 8x_1 + 8x_2 = 480, & (2) \\ 3x_1 + 8x_2 = 240, & (3) \\ x_1 = 0, & (4) \\ x_2 = 0. & (5) \end{cases}$$

Каждое из записанных уравнений представляет собой прямую на плоскости, причем 4-я и 5-я прямые являются координатными осями.

Чтобы построить первую прямую, найдем точки ее пересечения с осями координат: при $x_1 = 0$, $x_2 = 75$, а при $x_2 = 0$, $x_1 = 25$. Далее нас интересует, по какую сторону от прямой будет находиться полуплоскость, соответствующая первому неравенству. Чтобы определить искомую полуплоскость, возьмем точку $O(0,0)$ и подставим ее координаты в неравенство — оно удовлетворяется. Так как точка $O(0,0)$ лежит левее первой прямой, то и полуплоскость будет находиться левее прямой $24x_1 + 8x_2 = 600$. На рис. 2.5 расположение полуплоскости относительно первой прямой отмечено стрелками.

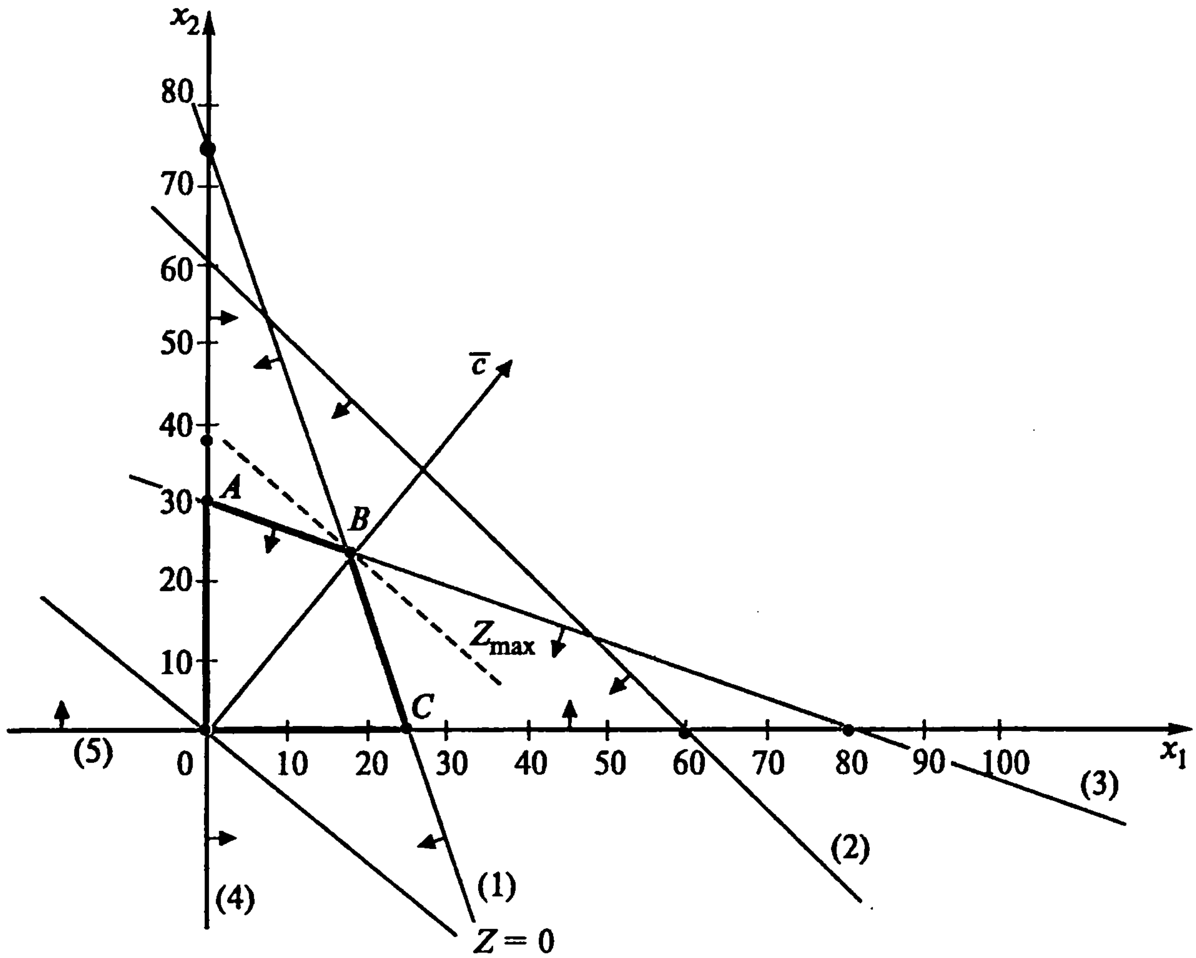


Рис. 2.5

Аналогично построены 2-я и 3-я прямые и найдены полуплоскости, соответствующие 2-му и 3-му неравенствам. Точки, удовлетворяющие ограничениям $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, находятся в первом квадранте.

Множество точек, удовлетворяющих всем ограничениям одновременно, является ОДР системы ограничений. На графике (рис. 2.5) это многоугольник *OABC*.

Любая точка многоугольника решений удовлетворяет системе ограничений задачи и, следовательно, является ее решением. Это говорит о том, что данная задача линейной оптимизации имеет множество допустимых решений, т.е. многовариантна. Нам же необходимо найти решение, обеспечивающее максимальную прибыль.

Приравняем функцию к нулю и построим соответствующую прямую. Вектор-градиент прямой функции $40x_1 + 50x_2 = 0$ имеет координаты $\bar{c} = (40;50)$. Изобразим вектор на графике и построим прямую перпендикулярно этому вектору (рис. 2.5). Перемещая прямую функции параллельно самой себе в направлении вектора, увидим, что последней точкой многоугольника решений, которую пересечет прямая функции, является угловая точка *B*. Следовательно, в точке *B* функция достигает максимального значения.

Координаты точки *B* найдем, решая систему уравнений, прямые которых пересекаются в данной точке:

$$\begin{cases} 24x_1 + 8x_2 = 600, & (1) \\ 3x_1 + 8x_2 = 240. & (3) \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что $x_1 = 17,14; x_2 = 23,57$. Следовательно, если предприятие изготовит изделия в найденных объемах, то получит максимальную прибыль, равную

$$Z_{\max} = 40 \cdot 17,14 + 50 \cdot 23,57 = 1\,864{,}1 \text{ (млн руб.)}.$$

2.1.3. Симплекс-метод решения задач линейной оптимизации

Из геометрической интерпретации задачи линейной оптимизации видно, что максимум или минимум функции достигается в угловой точке выпуклого многогранника — ОДР — системы ограничений. Поэтому в основу симплекс-метода положена идея рассмотрения и испытания на оптимальность только угловых точек — вершин многогранника, а не всего бесконечного множества его точек.

Итак, рассмотрим некоторую исходную задачу линейной оптимизации, заданную в симметричной форме:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max, \qquad (2.12)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2} + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (2.13)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (2.14)$$

После приведения ограничений задачи к каноническому виду имеем:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + y_i = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n + y_r = b_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m. \end{cases} \qquad (2.15)$$

Запишем эту задачу в векторной форме:

$$Z = \bar{c} \cdot \bar{x} \to \max, \tag{2.16}$$

при ограничениях

$$x_1\bar{p}_1 + x_2\bar{p}_2 + \ldots + x_n\bar{p}_n + y_1\bar{p}_{n+1} + \ldots + y_i\bar{p}_{n+i} + \ldots + y_m\bar{p}_{n+m} = \bar{p}_0, \tag{2.17}$$

$$x \geq 0, \tag{2.18}$$

где $\bar{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — векторы, $\bar{c} \cdot \bar{x}$ — скалярное произведение векторов, $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_{n+m}$ и $\bar{p}_0$ — m-мерные векторы, составленные из коэффициентов при неизвестных и свободных членов системы ограничений задачи:

$$\bar{p}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \bar{p}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \ \bar{p}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ \bar{p}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \bar{p}_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$\ldots \ \bar{p}_{n+m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}, \ \bar{p}_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Векторы $\bar{p}_{n+1}, \bar{p}_{n+2}, \ldots, \bar{p}_{n+m}$ единичные и линейно независимые. Поскольку количество этих векторов равно m, то они образуют базис в m-мерном пространстве (базис n-мерного векторного пространства образует любая совокупность из n линейно независимых векторов данного пространства).

Неизвестные y_i, $i = \overline{1,m}$, соответствующие m базисным векторам, будем называть *базисными*, а остальные неизвестные x_j, $j = \overline{1,n}$, соответствующие небазисным векторам, — *небазисными* (*свободными*).

Выразим в системе ограничений (2.15) базисные неизвестные через небазисные, т.е. разрешим систему относительно базисных неизвестных:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + \ldots + a_{1k}(-x_k) + \ldots + a_{1n}(-x_n) + b_1, \\ y_2 = a_{21}(-x_1) + a_{22}(-x_2) + \ldots + a_{2k}(-x_k) + \ldots + a_{2n}(-x_n) + b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_i = a_{i1}(-x_1) + a_{i2}(-x_2) + \ldots + a_{ik}(-x_k) + \ldots + a_{in}(-x_n) + b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r = a_{r1}(-x_1) + a_{r2}(-x_2) + \ldots + a_{rk}(-x_k) + \ldots + a_{rn}(-x_n) + b_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}(-x_1) + a_{m2}(-x_2) + \ldots + a_{mk}(-x_k) + \ldots + a_{mn}(-x_n) + b_m. \end{cases} \tag{2.19}$$

Придавая небазисным неизвестным в системе (2.19) некоторые числовые значения, можно однозначно найти значения базисных неизвестных, т.е. получить частные решения системы. Таких частных решений существует бесконечное множество.

Частное решение, в котором все небазисные переменные равны нулю, называют *базисным решением* системы.

Итак, базисное решение системы (2.19) будет следующим:

$$x_j = 0, \quad j = \overline{1,n}; \quad y_i = b_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

Очевидно, что значение функции (2.12) при данном решении равно нулю ($Z = 0$).

Если в решении задачи линейной оптимизации базисные неизвестные принимают неотрицательные значения, то такое решение называют *опорным* (*опорным планом*). Если же хотя бы одна базисная неизвестная принимает отрицательное значение, то решение задачи будет неопорным.

Опорному решению задачи линейной оптимизации геометрически соответствует вершина области допустимых решений.

Опорное решение задачи называется невырожденным, если все базисные неизвестные больше нуля. Если же хотя бы одна базисная неизвестная в решении задачи равна нулю, то такое решение называется вырожденным.

Решение вырожденных задач линейной оптимизации рассматривается в п. 2.1.3.3.

2.1.3.1. Алгоритм нахождения опорного решения

Занесем выражения для ограничений (2.19) и функции (2.12) в модифицированную таблицу Жордана (табл. 2.2). (В дальнейшем такую таблицу будем называть симплексной в соответствии с названием аналитического метода решения задач линейной оптимизации.) Базисные неизвестные (Б.Н.) запишем в левый заглавный столбец, а небазисные неизвестные (Н.Н.) — в верхнюю заглавную строку. Числовые значения правой части системы ограничений запишем в правом столбце таблицы (в столбце свободных членов), в месте пересечения верхней заглавной строки и этого столбца поставим единицу. Коэффициенты при небазисных неизвестных запишем под ними. Функцию запишем в последней строке таблицы. В правой клетке этой строки запишем значение функции ($Z = 0$).

Пусть решение в табл. 2.2 неопорное (элемент $b_r < 0$). Чтобы получить опорное решение, воспользуемся правилом преобразования таблиц с помощью модифицированных жордановых исключений, в соответствии с которым элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент и записываются в новой таблице с тем же знаком. Поэтому, чтобы вместо $b_r < 0$ получить число положительное, необходимо, чтобы разрешающий элемент был в данной строке и имел отрицательный знак.

Если же в строке с отрицательным свободным членом нет отрицательных элементов, то задача не имеет опорного решения, система ограничения задачи несовместна.

Пусть в r-й строке имеются отрицательные элементы a_{r2} и a_{rk}. Если за разрешающий элемент принять $a_{rk} < 0$ или $a_{r2} < 0$ и рассчитать новую таблицу, то гарантировано, что вместо элемента $b_r < 0$ будет положительное число, равное b_r / a_{rk} или b_r / a_{r2}, однако в столбце свободных членов вместо положительных элементов может появиться не один, а несколько отрицательных элементов. Чтобы этого не случилось, рекомендуется разрешающий элемент выбирать по наименьшему симплексному отношению, т.е. отношению элементов столбца свободных членов к соответствующим элементам разрешающего столбца. За разрешающий столбец выбирается тот, в котором находится отрицательный элемент в строке с отрицательным свободным членом. В нашем случае за разрешающий столбец можно выбрать 2-й или k-й, так как $a_{r2} < 0$ и $a_{rk} < 0$. Выберем за разрешающий столбец k-й. Тогда, обозначив симплексные отношения буквой t, найдем наименьшее из них среди положительных отношений:

$$t = \min\left(\frac{b_1}{a_{1k}}; \dots \frac{b_i}{a_{ik}}; \dots \frac{b_r}{a_{rk}}; \dots \frac{b_m}{a_{mk}}\right) = \frac{b_r}{a_{rk}} > 0.$$

Это отношение определило разрешающую строку и разрешающий элемент a_{rk}. Симплексные отношения удобно рассчитывать в таблице (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Б.Н. \ Н.Н.	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_k$	...	$-x_n$	1	$t \ge 0$
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	...	a_{1n}	b_1	b_1 / a_{1k}
$y_i =$	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ik}	...	a_{in}	b_i	b_i / a_{ik}
$y_r =$	a_{r1}	a_{r2}	...	$\boxed{a_{rk}}$	...	a_{rn}	b_r	b_r / a_{rk}
$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mk}	...	a_{mn}	b_m	b_m / a_{mk}
$Z =$	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_k$	...	$-c_n$	0	

Рассмотрим теорему о выборе разрешающего элемента.

Теорема. *Если разрешающий элемент выбирать по наименьшему симплексному отношению, то вместо свободного члена разрешающей строки в новой симплексной таблице будет всегда число положительное, а остальные элементы столбца свободных членов не меняют знака.*

В табл. 2.2 разрешающим выбран элемент a_{rk}, так как $\dfrac{b_r}{a_{rk}} = \min\limits_i \left(\dfrac{b_i}{a_{ik}}\right) > 0.$

Доказательство первой части теоремы очевидно, поскольку в новой таблице вместо элемента $b_r < 0$ будет элемент $b_r / a_{rk} > 0$, который как минимальное симплексное отношение определил разрешающий элемент $a_{rk} < 0$.

Докажем вторую часть теоремы, для чего исследуем знак свободного члена b_i.

Вместо b_i в новой таблице будет элемент b_i', который рассчитывается по правилу прямоугольника:

$$b_i' = \frac{b_i a_{rk} - b_r a_{ik}}{a_{rk}} = b_i - \frac{b_r a_{ik}}{a_{rk}} = a_{ik}\left(\frac{b_i}{a_{ik}} - \frac{b_r}{a_{rk}}\right). \tag{2.20}$$

Напомним, что $b_r < 0$, $a_{rk} < 0$ и отношение b_k / a_{rk} — наименьшее. Тогда:

1. Пусть $b_i < 0$ и $a_{ik} < 0$. Подставляя эти значения в выражение (2.20), находим, что $b_i' < 0$.

2. Пусть $b_i < 0$, а $a_{ik} > 0$. В этом случае тоже $b_i' < 0$.

3. Пусть $b_i > 0$ и $a_{ik} > 0$. Исследуя при этих значениях выражение (2.20), находим, что $b_i' > 0$.

4. Пусть $b_i > 0$, а $a_{ik} < 0$. Очевидно, что и в этом случае $b_i' > 0$.

5. При $a_{ik} = 0$, $b_i' = b_i$.

Таким образом, вторая часть теоремы доказана.

Сформулируем *алгоритм нахождения опорного решения задачи.*

Пусть условия задачи занесены в симплексную таблицу.

1. Просматриваем элементы столбца свободных членов, если все они положительные, то опорное решение найдено и начинается этап нахождения оптимального решения.

2. Если среди элементов столбца свободных членов имеются отрицательные, то выбираем любой из них и, просматривая элементы строки с выбранным отрицательным свободным членом, фиксируем в ней отрицательные элементы. Любой столбец с отрицательным элементом в рассматриваемой строке берем за разрешающий.

Если же в строке с отрицательным свободным членом нет отрицательных элементов, то система ограничений несовместна. Задача решения не имеет.

3. Разрешающую строку находим по наименьшему симплексному отношению.

4. С выделенным разрешающим элементом, находящимся на пересечении разрешающих строки и столбца, рассчитываем новую симплексную таблицу.

Анализ новой таблицы начинаем с пункта 1 алгоритма. Так действуем до тех пор, пока не найдем опорное решение или не убедимся, что его не существует.

Пример 2.1. Найти опорное решение задачи

$$Z = 4x_1 + x_2 - x_3 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \ge 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \ge 6, \\ -4x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Приведем систему ограничений к каноническому виду. Умножив первые три ограничения на −1 и добавив к левым частям ограничений неотрицательные дополнительные неизвестные y_i, $i = \overline{1,4}$, имеем:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + y_1 = -5, \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + y_2 = -6, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + y_3 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + y_4 = 3. \end{cases}$$

Очевидно, что векторы-столбцы при неизвестных y_i, $i = \overline{1,4}$, являются единичными и образуют базис в четырехмерном пространстве. Поэтому неизвестные y_i, $i = \overline{1,4}$, будут базисными. Выразим из системы ограничений базисные неизвестные:

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 5 \ge 0, \\ y_2 = 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 6 \ge 0, \\ y_3 = -4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3 \ge 0, \\ y_4 = -x_1 - x_2 - x_3 + 3 \ge 0, \end{cases}$$

Занесем коэффициенты системы ограничений и функции в симплексную таблицу (табл. 2.3).

Таблица 2.3

	Н.Н. / Б.Н.	$-x_1$ ↓	$-x_2$	$-x_3$	1	$t \ge 0$
	$y_1 =$	−2	3	2	−5	5/2
→	$y_2 =$	−3	2	4	−6	2
	$y_3 =$	4	1	−2	−3	—
	$y_4 =$	1	1	1	3	3
	$Z =$	−4	−1	1	0	

Решение в табл. 2.3 неопорное, так как небазисные неизвестные $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, первые три базисные неизвестные меньше нуля:

$$y_1 = -5,\ y_2 = -6,\ y_3 = -3,\ y_4 = 3,\ Z = 0.$$

Учитывая, что в первой строке с отрицательным свободным членом (−5) имеется отрицательный элемент (−2), то первый столбец берем за разрешающий. Вычислив симплексные отношения, видим, что наименьшее отношение (2) определяет вторую строку. Следовательно, эта строка будет разрешающей, а разрешающим элементом будет элемент −3. Заключим в рамку разрешающий элемент, а также выделим (стрелками) разрешающие строку и столбец.

В новой симплексной таблице (табл. 2.4) решение также неопорное.

Таблица 2.4

Б.Н. \ Н.Н.	↓ $-y_2$	$-x_2$	$-x_3$	1	$t \geq 0$
$y_1 =$	$\boxed{-2/3}$	5/3	−2/3	−1	3/2
→ $x_1 =$	−1/3	−2/3	−4/3	2	–
$y_3 =$	4/3	11/3	10/3	−11	–
$y_4 =$	1/3	5/3	7/3	1	3
$Z =$	−4/3	−11/3	-13/3	8	

В первой строке табл. 2.4 находится отрицательный свободный член (−1), а в ее первом и третьем столбце — отрицательные элементы (−2/3). Выберем первый столбец за разрешающий. Наименьшее симплексное отношение (3/2) определяет разрешающую строку — первую. С выделенным разрешающим элементом рассчитываем новую симплексную таблицу (табл. 2.5).

Таблица 2.5

Б.Н. \ Н.Н.	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_2 =$	−3/2	−5/2	1	3/2
$x_1 =$	−1/2	−3/2	−1	5/2
$y_3 =$	2	7	2	−13
$y_4 =$	1/2	5/2	2	1/2
$Z =$	−2	−7	−3	10

В табл. 2.5 решение неопорное, поскольку базисная неизвестная $y_3 = -13$. Просматривая элементы третьей строки, видим, что она не содержит отрицательных элементов. Следовательно, задача не имеет опорного решения, а система ограничений задачи несовместна.

2.1.3.2. Алгоритм нахождения оптимального решения

Предположим, что в результате нескольких шагов жордановых преобразований найдено опорное решение задачи (все базисные неизвестные принимают положительные значения), т.е имеем таблицу, в которой часть игреков переброшена в верхнюю часть, а часть иксов перешла в число базисных неизвестных (табл. 2.6).

Таблица 2.6

Б.Н. \ Н.Н.	$-y_1$	$-y_2$	$-\ldots$	$-x_k$	$-\ldots$	$-x_n$	1
$x_1 =$	b_{11}	b_{12}	...	b_{1k}	...	b_{1n}	b'_1
$x_2 =$	b_{21}	b_{22}	...	b_{2k}	...	b_{2n}	b'_2
...	...	...	...	...	...	...	...
$y_i =$	b_{i1}	b_{i2}	...	b_{ik}	...	b_{in}	b'_i
...	...	...	...	...	...	...	...
$y_s =$	b_{s1}	b_{s2}	...	$\boxed{b_{sk}}$	...	b_{sn}	b'_s
...	...	...	...	...	...	...	...
$y_m =$	b_{m1}	b_{m2}	...	b_{mk}	...	b_{mn}	b'_m
$Z =$	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n	P

Все элементы таблицы $b'_i > 0,\ i = \overline{1,m}$. В строке функции среди элементов $p_j,\ j = \overline{1,n}$, а также среди элементов $b_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$, могут быть положительные, отрицательные и равные нулю.

Рассмотрим, как найти максимум функции Z, в частности, от чего зависит ее значение.

За разрешающий столбец выберем столбец с номером k, полагая, что в этом столбце элемент $b_{sk} > 0$. И другие элементы k-столбца b_{ik} $(i = \overline{1,m})$ могут быть положительными. Чтобы сохранить положительные элементы в столбце свободных членов, выберем разрешающую строку по наименьшему симплексному отношению t: $t = \min\limits_i \frac{b'_i}{b_{ik}} = \frac{b'_s}{b_{sk}}$. Следовательно, строка с номером s — разрешающая, а разрешающим элементом будет b_{sk}. Подчеркнем еще раз, что $b'_s > 0$ и $b_{sk} > 0$.

Найдем, чему равно в новой таблице значение функции P':

$$P' = \frac{pb_{sk} - b'_s p_k}{b_{sk}} = P - \frac{b'_s p_k}{b_{sk}}.$$

Очевидно, что величина P' зависит от значения элемента p_k строки функции. Рассмотрим возможные значения элемента p_k и определим, как будет вести себя величина P' по отношению к значению функции P в табл. 2.6.

1. Пусть $p_k = 0$, тогда $P' = P$, т.е. если за разрешающий столбец выбрать столбец, в котором элемент в строке функции $p_k = 0$, то значение функции в новой таблице не изменится.

2. Пусть $p_k > 0$, тогда $P' < P$, т.е. значение функции уменьшится при любом значении P.

3. Пусть $p_k < 0$, тогда $P' > P$, т.е. значение функции в новой таблице увеличится.

Теперь уже не трудно определить признак оптимальности значения функции. Этот признак сформулирован в теореме об оптимальности решения задачи линейной оптимизации.

Теорема. *Если в строке функции все коэффициенты, за исключением свободного члена, неотрицательные, то решение задачи будет оптимальным. Если среди коэффициентов строки функции имеются отрицательные, то значение функции можно улучшить (увеличить).*

Доказательство этой теоремы вытекает из проведенного выше исследования зависимости значения функции от значения коэффициентов ее строки в симплексной таблице.

Сформулируем *алгоритм нахождения оптимального (максимального) значения функции* задачи линейной оптимизации.

1. Считаем, что в симплексной таблице получено опорное решение. Просматриваем коэффициенты строки функции этой таблицы. Если все они неотрицательные, то оптимальное решение задачи достигнуто. В этом решении все небазисные неизвестные равны нулю, а базисные — свободным членам таблицы.

2. Если среди коэффициентов строки функции имеются отрицательные (за исключением свободного члена), то выбираем среди них наибольший по абсолютной величине, и столбец, в котором находится этот коэффициент, берем за разрешающий.

3. Разрешающую строку находим по наименьшему симплексному отношению.

4. С найденным разрешающим элементом рассчитываем новую таблицу. Анализ новой таблицы начинаем с пункта 1 настоящего алгоритма. Так действуем до тех пор, пока не найдем оптимального решения или не убедимся, что его не существует.

5. Если в разрешающем столбце симплексной таблицы все элементы неположительны, то разрешающую строку выбрать невозможно. Задача в этом случае решения не имеет. Функция в области допустимых решений задачи не ограничена сверху и может принимать сколь угодно большое значение ($Z \to +\infty$).

Докажем последнее утверждение.

Пусть в табл. 2.6 элемент $p_k < 0$, а элементы $b_{ik} \le 0$, $i = \overline{1,m}$. Выпишем из табл. 2.6 i-е ограничение и функцию:

$$y_i = b_{i1}(-y_1) + b_{i2}(-y_2) + \ldots + b_{ik}(-x_k) + \ldots + b_{in}(-x_n) + b_i',$$

$$Z = p_1(-y_1) + p_2(-y_2) + \ldots + p_k(-x_k) + \ldots + p_n(-x_n) + P.$$

Покажем, что для любого $i = \overline{1,m}$ $y_i \ge 0$.

Положив все небазисные переменные равными нулю, за исключением элемента x_k, получим

$$y_i = b_{ik}(-x_k) + b_i', \quad i = \overline{1,m}, \tag{2.21}$$

$$Z = p_k(-x_k) + p. \tag{2.22}$$

Из равенства (2.21) видно, что $y_i > 0$ при любых сколь угодно больших положительных значениях x_k, так как $b_{ik} \le 0$, а $b_i' > 0$, $i = \overline{1,m}$. В этом случае и $Z \to +\infty$ при $x_k \to +\infty$, поскольку $p_k < 0$, а $p_k(-x_k) \to +\infty$.

Если в строке функции симплексной таблицы с оптимальным решением задачи линейной оптимизации имеется хотя бы один нулевой элемент (за исключением элемента, находящегося в столбце свободных членов), то задача имеет множество оптимальных планов.

Допустим, что решение в табл. 2.6 оптимальное ($Z^* = P$). Пусть в этой таблице элемент Z-строки $p_k = 0$. Оптимальное решение в данной таблице $Z_1^* = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)})$. Преобразовав таблицу с k-м разрешающим столбцом, получим в новой таблице другой набор базисных и небазисных неизвестных, а значение функции не изменится, т.е. $Z^* = P$. Оптимальное решение в новой таблице обозначим через $Z_2^* = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_m^{(2)})$. Учитывая, что оптимальное решение достигается в вершинах многогранника решений Z_1^* и Z_2^*, то оно достигается и в любой точке, которая является выпуклой линейной комбинацией Z_1^* и Z_2^*.

В заключение рассмотрим решение задач линейной оптимизации на минимум функции.

Пусть необходимо найти минимум функции

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

при заданной системе ограничений. Для решения задачи достаточно умножить на (-1) функцию Z и найти максимум функции

$$-Z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n,$$

а $\min Z = -\max(-Z)$.

Значения неизвестных в оптимальном решении задачи с измененной функцией совпадают со значениями неизвестных в оптимальном решении задачи с исходной функцией.

Пример 2.2. Предприятие выпускает три вида продукции: I, II, III. Для производства продукции оно располагает ресурсами в следующих объемах (единиц):

Комплектующие изделия	3120
Сырье	3000
Материалы	3150

Расход ресурсов на единицу продукции каждого вида представлен в таблице:

Ресурсы	Вид продукции		
	I	II	III
Комплектующие изделия	4	6	8
Сырье	2	8	10
Материалы	6	9	4

Прибыль от единицы продукции I вида составляет 240 млн руб., II — 210 млн руб. и III — 180 млн руб.

Требуется определить производственную программу предприятия, обеспечивающую максимальную прибыль.

Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_1, x_2, x_3 искомые объемы производства продукции, а через Z — прибыль предприятия от производства и реализации всей продукции, которая с учетом обозначений определяется следующей функцией:

$$Z = 240x_1 + 210x_2 + 180x_3 \to \max.$$

Запишем ограничения по ресурсам:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \le 3\,120, \\ 2x_1 + 8x_2 + 10x_3 \le 3\,000, \\ 6x_1 + 9x_2 + 4x_3 \le 3\,150. \end{cases}$$

Объемы производства продукции не могут быть отрицательными, поэтому $x_1, x_2, x_3 \ge 0$.

Приведем ограничения задачи к каноническому виду, добавив к их левым частям соответствующие положительные неизвестные y_1, y_2, y_3. В результате ограничения запишутся в виде равенств:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + y_1 = 3\,120, \\ 2x_1 + 8x_2 + 10x_3 + y_2 = 3\,000, \\ 6x_1 + 9x_2 + 4x_3 + y_3 = 3\,150. \end{cases}$$

Дополнительные неизвестные y_1, y_2, y_3 будут базисными, так как им соответствуют единичные векторы, которые образуют базис в трехмерном пространстве. Разрешив систему относительно базисных неизвестных, получим:

$$y_1 = -4x_1 - 6x_2 - 8x_3 + 3\,120 \ge 0,$$
$$y_2 = -2x_1 - 8x_2 - 10x_3 + 3\,000 \ge 0,$$
$$y_3 = -6x_1 - 9x_2 - 4x_3 + 3\,150 \ge 0.$$

Занесем условия задачи в симплексную таблицу (табл. 2.7).

Таблица 2.7

Б.Н. \ Н.Н.	↓ $-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1	$t \ge 0$
$y_1 =$	4	6	8	3 120	780
$y_2 =$	2	8	10	3 000	1 500
→ $y_3 =$	$\boxed{6}$	9	4	3 150	525
$Z =$	−240	−210	−180	0	

Базисное решение задачи в табл. 2.7 следующее: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (как небазисные неизвестные), т.е. предприятие продукции не выпускает. Тогда $y_1 = 3\,120$, $y_2 = 3\,000$, $y_3 = 3\,150$. Игреки означают количество неиспользуемых ресурсов. В самом деле, коль продукция не выпускается, то, естественно, ресурсы не используются, и прибыль при этом равна нулю ($Z = 0$).

Решение задачи опорное, так как базисные неизвестные принимают положительные значения. Переходим к поиску оптимального решения. В строке функции наибольший по абсолютной величине (среди отрицательных) элемент находится в первом столбце, поэтому этот столбец берем за разрешающий и выделяем его сверху стрелкой. Разрешающую строку находим по наименьшему симплексному отношению

$$t = \min\left(\frac{3\,120}{4}; \frac{3\,000}{2}; \frac{3\,150}{6}\right) = \min(780; 1\,500; 525) = 525.$$

Наименьшее симплексное отношение соответствует 3-й строке, следовательно, она будет разрешающей. Отметим эту строку в табл. 2.7 стрелкой. Выделим в таблице и разрешающий элемент, который находится на пересечении разрешающих строки и столбца.

Симплекс-метод хорошо согласуется с экономической логикой. За разрешающий столбец мы выбрали первый, так как от единицы продукции I вида самая высокая прибыль — 240 млн руб. Симплексные отношения означают возможные объемы производства продукции I вида из имеющихся ресурсов, а наименьшее симплексное отношение означает максимально возможный выпуск этой продукции. В самом деле, третий ресурс позволяет изготовить лишь 525 единиц продукции, в то время как первый ресурс — 780, а второй — 1 500.

Рассчитаем элементы новой симплексной таблицы (табл. 2.8).

Таблица 2.8

Б.Н. \ Н.Н.	$-y_3$	$-x_2$	$-x_3$	1	$t \geq 0$
$y_1 =$	−2/3	0	$\boxed{16/3}$	1 020	191,25
$y_2 =$	−1/3	5	26/3	1 950	225
$x_1 =$	1/6	3/2	2/3	525	787,5
$Z =$	40	150	−20	126 000	

Выпишем решение из табл. 2.8:

$$x_1 = 525, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad y_1 = 1\,020, \quad y_2 = 1\,950, \quad y_3 = 0,$$

$$Z = 126\,000 \text{ (млн руб.)}.$$

Это решение означает следующее: предприятие может изготовить продукции I вида в объеме 525 единиц, при этом оно получит прибыль в размере 126 000 млн руб., третий ресурс будет использован полностью ($y_3 = 0$), а первый и второй ресурсы не используются в объемах 1 020 и 1 950 единиц соответственно. Решение в табл. 2.8 не является оптимальным, так как в строке функции имеется отрицательный элемент (−20).

В соответствии с алгоритмом выберем разрешающий элемент (16/3) и осуществим еще одно симплексное преобразование. В табл. 2.9 получено оптимальное решение:

$$x_1 = 397{,}5;\ x_2 = 0;\ x_3 = 191{,}25;\ y_1 = y_3 = 0;\ y_2 = 292{,}5.$$

$$Z_{max} = 129\,825 \text{ (млн руб.)}.$$

Таблица 2.9

Б.Н. \ Н.Н.	$-y_3$	$-x_2$	$-y_1$	1
$x_3 =$				191,25
$y_2 =$				292,5
$x_1 =$				397,5
$Z =$	37,5	150	3,75	129 825

Из решения видно, что продукция III вида с самой малой прибылью (180 млн руб.) вошла в оптимальное решение задачи. Это произошло потому, что у этого вида продукции низкая норма расхода третьего ресурса. Поэтому оптимальное сочетание выпуска продукции I и III вида позволило увеличить прибыль по сравнению с предыдущим решением на 3 825 млн руб.

2.1.3.3. Вырожденные задачи линейной оптимизации

При решении задач линейной оптимизации мы полагали, что среди элементов правых частей системы ограничений нет нулевых элементов. Если же среди базисных неизвестных в исходной задаче имеется одна или несколько неизвестных, равных нулю, или нулевое значение базисной неизвестной получено на каком-то шаге симплексных преобразований, то налицо вырожденная задача линейной оптимизации.

Вырожденность может иметь место при нахождении опорного и оптимального решений задачи. Способы ликвидации вырожденности в обоих случаях одни и те же. Рассмотрим, чем «опасна» вырожденность.

Итак, если мы находим опорное решение, то, в соответствии с алгоритмом, за разрешающий столбец принимаем тот, который содержит отрицательный элемент в строке с отрицательным свободным членом. Разрешающей строкой в этом случае будет та, в которой базисная неизвестная равна нулю, так как наименьшее отношение будет равно нулю. Это значит, что величина новой переменной, вводимой в базис, будет равна нулю, и решение в новой симплексной таблице останется неопорным. При продолжении процесса нахождения опорного решения строка с нулевым элементом в столбце свободных членов будет оставаться разрешающей, а изменения будут происходить в наборе базисных и небазисных неизвестных, и мы можем прийти к таблице, которая уже была, т.е. может наступить случай зацикливания (возврат к старому базису).

Чтобы избежать вырожденности, а следовательно, и зацикливания, искусственно припишем нулевому элементу в столбце свободных членов знак плюс, а разрешающим столбцом будем выбирать тот, в котором находятся два отрицательных элемента: один в строке с отрицательным, а другой в строке с нулевым свободным членом. Тогда, согласно общему правилу нахождения неотрицательного наименьшего симплексного отношения, строка с нулевым свободным членом не может быть разрешающей. Разрешающей будет другая строка, и при расчете элементов новой таблицы вместо нулевого элемента в столбце свободных членов появится ненулевое число, т.е. решение будет невырожденным.

Аналогично поступаем с вырожденной задачей и при нахождении оптимального решения. В этом случае в качестве разрешающего столбца рекомендуется выбирать тот, в котором находится один отрицательный элемент в строке функции, а второй отрицательный элемент — в строке с нулевым свободным членом, которому приписывается знак плюс.

Разрешающая строка находится, как всегда, по наименьшему симплексному отношению, не считая строки с нулевым свободным членом.

Если при нахождении опорного или оптимального решения задачи невозможно выбрать разрешающий столбец, в котором был бы отрицательный элемент в строке с нулевым свободным членом, то разрешающие столбец и строка находятся по общему правилу и осуществляется расчет элементов новой таблицы. После расчета изменится набор базисных и небазисных неизвестных, поменяются числа в таблице, и, возможно, найдется столбец, в котором будут отрицательные числа: одно — в строке с нулевым свободным членом, а другое — в строке с отрицательным свободным членом, если находится опорное решение; или же одно — в строке функции, а другое — в строке с нулевым свободным членом, если находится оптимальное решение задачи.

Если же снова свободный член в таблице будет отрицательным, то при дальнейших расчетах рекомендуется следить, нет ли зацикливания.

Пример 2.3. Найти максимум функции $Z = -12x_1 + 5x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_2 \le 3, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 0, \\ -2x_1 - x_2 \le -3, \\ -4x_1 + x_2 \le 4. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

После приведения системы ограничений к каноническому виду и нахождения базисных неизвестных имеем:

$$\begin{cases} y_1 = -x_2 + 3 \ge 0, \\ y_2 = -3x_1 + 5x_2 \ge 0, \\ y_3 = 2x_1 + x_2 - 3 \ge 0, \\ y_4 = 4x_1 - x_2 + 4 \ge 0. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Заносим условия задачи в исходную симплексную таблицу (табл. 2.10).

Так как базисная неизвестная $y_2 = 0$, то имеем вырожденную задачу, в которой решение неопорное, ввиду того что $y_3 = -3$.

Таблица 2.10

Б.Н. \ Н.Н.	$-x_1$	↓ $-x_2$	1	$t \geq 0$
$y_1 =$	0	1	3	3
$y_2 =$	3	−5	+0	—
→ $y_3 =$	−2	$\boxed{-1}$	−3	3
$y_4 =$	−4	1	4	4
$Z =$	12	−5	0	

Находим опорное решение. Чтобы определить разрешающий столбец, просматриваем строку с отрицательным свободным членом и фиксируем в ней отрицательные элементы в первом и втором столбцах. днако учитывая, что задача вырожденная, за разрешающий столбец берем 2-й, так как в этом столбце и строке с нулевым свободным членом стоит отрицательное число (−5). Разрешающая строка определена по наименьшему симплексному отношению. С разрешающим элементом (−1) рассчитываем новую таблицу (табл. 2.11), решение в которой опорное и вырожденное.

Таблица 2.11

Б.Н. \ Н.Н.	$-x_1$	↓ $-y_3$	1	$t \geq 0$
→ $y_1 =$	-2	$\boxed{1}$	0	0
$y_2 =$	13	−5	15	—
$x_2 =$	2	−1	3	—
$y_4 =$	−6	1	1	1
$Z =$	22	−5	15	

Таблица 2.12

Б.Н. \ Н.Н.	$-x_1$	$-y_1$	1
$y_3 =$	−2	1	0
$y_2 =$	3	5	15
$x_2 =$	0	1	3
$y_4 =$	−4	−1	1
$Z =$	12	5	15

Переходим к нахождению оптимального решения.

Разрешающим столбцом в табл. 2.11 выбираем 2-й, так как нет других вариантов выбора. Разрешающий элемент находим по наименьшему симплексному отношению.

В табл. 2.12 решение оптимальное. Оно следующее:

$$x_1 = y_1 = y_3 = 0,\ x_2 = 3,\ y_2 = 15,\ y_4 = 1;\ Z_{\max} = 15.$$

2.1.3.4. Решение общей задачи линейной оптимизации

Пусть в задаче линейной оптимизации (2.1)–(2.4) k ограничений заданы в виде неравенств и $m - k$ ограничений — в виде равенств. Все свободные члены в ограничениях-равенствах будем считать неотрицательными, так как если в каком-то равенстве свободный член отрицательный, то это ограничение достаточно умножить на (−1).

После приведения ограничений к каноническому виду и разрешения относительно базисных неизвестных, т.е. переноса небазисных неизвестных в правую часть, в ограничениях-неравенствах слева будут базисные неизвестные, а в равенствах — нули, т.е. получим задачу вида:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + \ldots + a_{1r}(-x_r) + \ldots + a_{1n}(-x_n) + b_1 \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_i = a_{i1}(-x_1) + a_{i2}(-x_2) + \ldots + a_{ir}(-x_r) + \ldots + a_{in}(-x_n) + b_i \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = a_{k1}(-x_1) + a_{k2}(-x_2) + \ldots + a_{kr}(-x_r) + \ldots + a_{kn}(-x_n) + b_k \geq 0, \\ 0 = a_{k+1,1}(-x_1) + a_{k+1,2}(-x_2) + \ldots + a_{k+1,r}(-x_r) + \ldots + a_{k+1,n}(-x_n) + b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = a_{m1}(-x_1) + a_{m2}(-x_2) + \ldots + a_{mr}(-x_r) + \ldots + a_{mn}(-x_n) + b_m. \end{cases} \tag{2.23}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}; \tag{2.24}$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_rx_r + \ldots + c_nx_n \to \max(\min). \tag{2.25}$$

Занесем условия задачи в симплексную таблицу. В табл. 2.13 вместо части базисных неизвестных стоят нули. Переместим нули в верхнюю строку таблицы, но в данном случае, в отличие от того, как мы выбирали разрешающий элемент, решая систему уравнений в примере 1.8, будем выбирать его специальным образом. А именно, учитывая, что в столбце свободных членов все элементы от b_{k+1} до b_m неотрицательные и их неотрицательность нужно сохранить при переходе к новым симплексным таблицам, разрешающим выберем столбец, в котором находится положительный элемент на пересечении со строкой с нулевым элементом в заглавном столбце.

Разрешающая строка находится по наименьшему симплексному отношению, что гарантирует сохранение знака элементов столбца свободных членов. Если система ограничений задачи совместна, то последовательно все нули можно переместить в верхнюю строку таблицы, а вместо них в заглавный столбец переместится часть иксов с верхней строки, которые будут базисными, т.е. в результате преобразований получим обычную симплексную таблицу, в которой далее находятся опорное решение и оптимальное.

Таблица 2.13

Б.Н. \ Н.Н.	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_r$	...	$-x_n$	1
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1r}	...	a_{1n}	b_1
....	....	....	....	....	....	....	....
$y_i =$	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ir}	...	a_{in}	b_i
....	....	....	....	....	....	....	....
→ $y_k =$	a_{k1}	a_{k2}	...	a_{kr}	...	a_{kn}	b_k
$0 =$	$a_{k+1,1}$	$a_{k+1,2}$	...	$a_{k+1,r}$	...	$a_{k+1,n}$	b_{k+1}
....	....	....	....	....	....	....	....
$0 =$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mr}	...	a_{mn}	b_m
$Z =$	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_r$	...	$-c_n$	0

Если в задаче все ограничения записаны в виде равенств, то она решается аналогично. Подчеркнем, что если нуль из заглавного столбца перемещается в верхнюю строку таблицы, то элементы данного столбца можно не вычислять, этот столбец просто можно опустить (вычеркнуть).

Если все уравнения системы линейно независимы и $m < n$, то все нули переместятся в верхнюю строку таблицы и в результате получим обычную симплексную таблицу, в которой решение опорное. Если же $m = n$, то получается единственное решение, а при $m > n$ и $r = n$ (ранг равен числу неизвестных) в верхнюю строку будет переброшено n нулей заглавного столбца. В результате определятся значения n неизвестных, которые будут удовлетворять и остальным уравнениям системы.

Если $m \le n$ и $r < m$, то можно переместить только r нулей. При совместной системе ограничений в $m - r$ строках будут находиться одни нули. Признаком несовместности системы ограничений является следующая ситуация: в левом заглавном столбце стоит нулевой элемент, и в строке, где он находится, все коэффициенты равны нулю, а свободный член в правой части таблицы отличен от нуля.

Пример 2.4. Найти минимальное значение функции

$$Z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 8, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

После преобразования системы ограничений имеем:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 4 \ge 0, \\ y_2 = -2x_1 - x_2 + x_3 + 8 \ge 0, \\ 0 = -x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 3. \end{cases}$$

Занесем условия задачи в симплексную таблицу (табл. 2.14), изменив направление оптимизации функции:

$$-Z = -2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 \to \max.$$

Таблица 2.14

Б.Н. \ Н.Н.	$\downarrow -x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1	$t \ge 0$
$y_1 =$	−1	1	−2	1	−4	4
$y_2 =$	2	1	−1	0	8	4
$\rightarrow$ 0 =	$\boxed{1}$	−1	−1	3	3	3
$-Z =$	2	1	1	4	0	

Чтобы перебросить нулевой элемент заглавного столбца в верхнюю строку таблицы, в качестве разрешающего столбца выберем 1-й, так как в нем находится положительный элемент (1) в третьей строке. Разрешающая строка определена по наименьшему симплексному отношению.

После необходимых расчетов придем к обычной симплексной таблице, в которой базисные неизвестные y_1, y_2, x_1, а небазисные x_2, x_3, x_4. Решение в табл. 2.15 неопорное.

Таблица 2.15

Б.Н. \ Н.Н.	$-x_2$	$\downarrow -x_3$	$-x_4$	1	$t \ge 0$
$\rightarrow y_1 =$	0	$\boxed{-3}$	4	−1	1/3
$y_2 =$	3	1	−6	2	2
$x_1 =$	−1	−1	3	3	—
$-Z =$	3	3	−2	−6	

В соответствии с алгоритмом выбираем разрешающий элемент (−3) и осуществляем расчет новой таблицы (табл. 2.16), в которой решение опорное и оптимальное.

$$-Z_{\max} = -7; \ Z_{\min} = 7;$$

$$x_1 = 10/3; \ x_2 = 0; \ x_3 = 1/3; \ x_4 = 0; \ y_1 = 0; \ y_2 = 5/3.$$

Таблица 2.16

Б.Н. \ Н.Н.	$-x_2$	$-y_1$	$-x_4$	1
$x_3 =$	0	−1/3	−4/3	1/3
$y_2 =$	3	1/3	−14/3	5/3
$x_1 =$	−1	−1/3	5/3	10/3
$-Z =$	3	1	2	−7

Пример 2.5. Найти максимум функции

$$Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = -10, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15, \\ x_2 - x_3 + x_5 = 8. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

После умножения первого уравнения на −1 и перемещения левых частей уравнений в правую часть получим:

$$\begin{cases} 0 = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 10, \\ 0 = -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 15, \\ 0 = -x_2 + x_3 - x_5 + 8. \end{cases}$$

Занесем условия задачи в симплексную таблицу (табл. 2.17) и начнем перемещение нулей левого заглавного столбца в верхнюю строку таблицы. Для переброски нуля из первой строки в верхнюю заглавную строку в качестве разрешающего можно выбрать 1-й или 3-й столбец, так как в первой строке в этих столбцах стоят положительные числа 1 и 3.

Выберем 1-й столбец в качестве разрешающего, а с помощью наименьшего симплексного отношения определим, что разрешающей строкой является 1-я. С разрешающим элементом (1) рассчитаем новую таблицу. Первый столбец в табл. 2.18 не рассчитываем. В последующих таблицах при переброске нулей наверх соответствующие столбцы тоже не будем рассчитывать.

Таблица 2.17

	Б.Н. \ Н.Н.	↓ $-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	1	$t \geq 0$
→	0 =	$\boxed{1}$	−2	3	−1	−2	10	10
	0 =	1	−2	1	1	1	15	15
	0 =	0	1	−1	0	1	8	–
	$Z =$	−3	−1	2	1	−1	0	

Таблица 2.18

Б.Н. \ Н.Н.	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	1	$t \geq 0$
$x_1 =$	−2	3	−1	−2	10	–
$0 =$	0	−2	2	3	5	–
→ $0 =$	$\boxed{1}$	−1	0	1	8	8
$Z =$	−7	11	−2	−7	30	

Таблица 2.19

Б.Н. \ Н.Н.	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	1	$t \geq 0$
$x_1 =$	1	−1	0	26	–
→ $0 =$	−2	$\boxed{2}$	3	5	5/2
$x_2 =$	−1	0	1	8	–
$Z =$	4	−2	0	86	

Осуществив преобразования табл. 2.18 и 2.19 с соответствующими разрешающими элементами, получим оптимальное решение задачи в табл. 2.20.

Таблица 2.20

Б.Н. \ Н.Н.	$-x_3$	$-x_5$	1
$x_1 =$	0	3/2	57/2
$x_4 =$	−1	3/2	5/2
$x_2 =$	−1	1	8
$Z =$	2	3	91

$$Z_{max} = 91;\ x_1 = 57/2;\quad x_2 = 8;\quad x_3 = 0;\quad x_4 = 5/2;\quad x_5 = 0.$$

2.1.4. Информационные технологии линейной оптимизации

При решении задач на ПЭВМ используется программа симплекс-метода — **Simplex**. Отметим, что для решения любой задачи линейной оптимизации нет необходимости приводить вручную математическую модель к каноническому виду или изменять направление оптимизации. Все эти операции выполняет

ЭВМ. Рассмотрим применение программы **Simplex** для решения задачи производственного планирования (пример 2.2). Для удобства читателя запишем математическую модель названной задачи еще раз:

$$Z = 240x_1 + 210x_2 + 180x_3 \to \max.$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \le 3\,120, \\ 2x_1 + 8x_2 + 10x_3 \le 3\,000, \\ 6x_1 + 9x_2 + 4x_3 \le 3\,150, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

В меню программных средств подведем курсор на имя **Simplex.exe** и дважды нажмем левую клавишу мыши. На экране появится сервисное главное меню.

Ключ	Главное меню
<F1>	Меню ввода
<F2>	Решение задачи
<F3>	Смена базиса
<F4>	Обратная матрица баз
<F5>	Вывод решения
<F6>	Задача файла (если файл на диске)
<F7>	Пакетный режим
<F8>	Меню вывода решения (с заданием параметров вывода)
<F9>	Выход в операционную систему
<F10>	Помощь

Здесь <F1>, <F2>, ..., <F10> — функциональные клавиши.

Для ввода данных нажмем функциональную клавишу <F1>. На экране появится меню ввода со своим набором функциональных клавиш. Нажмем в нем <F2> — новая задача. На запрос **Имя новой задачи** введем имя и нажмем клавишу <Enter> (в нашем примере имя — **pr 26**). На запрос **Критерий** ответим **max**, так как наша задача на максимум функции, и нажмем <Enter>. На запросы **Число ограничений**, **Число неизвестных** введем соответствующий параметр задачи (числовые данные) и нажмем <Enter>. Для ввода матрицы коэффициентов при неизвестных нажмем <F3> (экранный редактор), на экране появится имя задачи **pr 26** , под ним — **max** (направление оптимизации), в верхней строке — неизвестные задачи x_1, x_2, x_3, в левом столбце — наименование ограничений (мы их обозначим $Y_i, i = \overline{1,3}$). Введем данные задачи. В строке, где записан **max**, под соответствующими неизвестными наберем коэффициенты функции. После набора каждого числа курсор в новую позицию перемещаем с помощью блока стрелок. В строках $Y_i, i = \overline{1,3}$, наберем элементы матрицы коэффициентов при неизвестных. Введем также данные для ограничений.

Протокол записи исходных данных на экране ПЭВМ выглядит следующим образом:

pr 26	x_1	x_2	x_3	
max	240	210	180	
Y_1	4	6	8	<= 3 120
Y_2	2	8	10	<= 3 000
Y_3	6	9	4	<= 3 150

Запись в протоколе понимаем так: числа, записанные под иксами, умножаются на них.

Для сохранения введенных данных нажмем <F4>. Далее нажмем <F9>, чтобы выйти в главное меню. Для решения задачи нажмем в нем <F2>. На запрос ответим нажатием клавиши <Enter>, и на экране появится полученное решение задачи. Чтобы распечатать результат, нажмем <F8> и, если нужно вывести решение с анализом чувствительности, нажмем четыре ключа: <F1>, <F2>, <F3>, <F4>. Для выхода в главное меню нажмем <F9> и в нем — <F5> для распечатывания результата. При затруднениях можно обратиться за помощью, нажав <F10> главного меню.

Ниже приводится протокол оптимального решения задачи.

pr 26	ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ			ДАТА	06-09-1999	ВРЕМЯ	14:19:52
МАКСИМУМ		В БАЗИС		БАЗИС X:	2	ПЕРЕМЕН.:	3
ИТЕР.	2	ИЗ БАЗ.		БАЗИС Y:	1	ДОП.П.:	3
П.ОБРАЩ.	0	ОНБП	0	КРИТ.	129825	ОГРАНИЧЕНИЙ:	3

БАЗИС	x_3	Y_2	x_1
ПРЯМАЯ	191,25	292,5	397,5
ДВ.	3,75	0	37,5

pr 26	РЕШЕНИЕ НА МАКСИМУМ	КРИТ.	129825	ДАТА	06-09-1999
	ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ			ВРЕМЯ	14:19:59

ПЕРЕМЕН.	ТИП	ЗНАЧ.	КРИТ./К-Т	ВЛИЯНИЕ	ИЗМ. КРИТ.
x_1	БАЗИС	397,5	240	240	0
x_2	СВОБОДН	0	210	360	-150
x_3	БАЗИС	191,25	180	180	0
Y_1	СВОБОДН	0	0	3,75	-3,75
Y_2	БАЗИС	292,5	0	0	0
Y_3	СВОБОДН	0	0	37,5	-37,5

Из протокола видно, что базис содержит две неизвестные x и одну неизвестную Y, основных неизвестных в задаче — 3, дополнительных неизвестных — 3 и ограничений — 3. Значение критерия оптимальности равно 129 825. Ниже размещены базисные неизвестные x_3, Y_2, x_1 и под ними их значения (т.е. значения неизвестных прямой задачи) равные, соответственно, 191,25; 292,5 и 397,5, ниже — значения двойственных оценок (двойственные оценки рассматриваются в параграфе 2.2.4). Еще ниже, в более понятной форме, представлено решение задачи. В первом столбце записаны основные неизвестные (x_1, x_2, x_3) и дополнительные (Y_1, Y_2, Y_3), соответствующие ограничениям задачи. Далее — тип неизвестных в оптимальном решении (базисные или свободные) и их значения. В четвертом столбце приводятся коэффициенты при неизвестных в критерии оптимальности. В предпоследнем столбце записана сумма критериальных коэффициентов исходной задачи и соответствующих значений критериальных коэффициентов строки Z в оптимальном решении (табл. 2.9). В последнем столбце отражено изменение критериального коэффициента, т.е. разница между критериальным коэффициентом и значением, записанным в столбце ВЛИЯНИЕ.

Итак, из оптимального решения видно, что при производстве продукции I вида в количестве 397,5 единицы и III вида — 191,25 единицы достигается максимальная прибыль в объеме 129 825 млн руб. При этом первый ресурс (комплектующие изделия) и третий ресурс (материалы) используются полностью, а второй ресурс (сырье) не используется в объеме 292,5 единицы (y_2 = 292,5). Продукция II вида не вошла в оптимальное решение ввиду высоких норм расхода ресурсов, особенно сырья и материалов. Однако если бы критериальный коэффициент был не 210 млн руб., а 360, как это записано в столбце ВЛИЯНИЕ, то этот вид продукции вошел бы в оптимальное решение. Читателю рекомендуется решить задачу с критериальным коэффициентом при неизвестной x_2, равным 360 млн руб., и убедиться в правильности сделанного вывода.

Упражнения

2.1. Предприятие получило заказ на изготовление не менее 65 единиц продукции. Продукция может быть изготовлена по одной из трех отработанных на предприятии технологий. По 1-й технологии оно выпускает за рабочий день (8 часов) 2 единицы продукции; по 2-й — 4 единицы и по 3-й — 5 единиц продукции. Расход ресурсов на производство продукции за рабочий день при различных технологических способах производства, а также объем ресурсов, которыми располагает предприятие, представлены в следующей таблице:

Технологические способы производства	Ресурсы			
	Оборудование	Сырье	Рабочая сила	Электро-энергия
1	5	3	7	3
2	7	2	4	2
3	4	5	4	3
Объем ресурсов	96	70	100	60

Требуется определить, сколько дней производить продукцию по каждому технологическому способу производства, чтобы получить максимум прибыли от выполнения заказа, если известно, что за рабочий день по 1-му технологическому способу она составляет 80 усл. ед., по 2-му — 60 усл. ед. и 3-му — 70 усл. ед.

2.2. Необходимо найти кормовой рацион минимальной стоимости, содержащий не менее 32 кормовых единиц, 1,0 кг протеина, 85 г фосфора и 110 г кальция.

Содержание этих питательных веществ в 1 кг кормов, предполагаемых к включению в рацион, приведены в следующей таблице:

Питательные вещества	Корма			
	Сено	Силос	Корнеплоды	Концентраты
Кормовые единицы	0,6	0,4	0,8	1,0
Протеин, г	25	30	34	38
Фосфор, г	2	1,2	3	3,8
Кальций, г	1,3	3,0	3,0	4

Стоимость 1 кг сена составляет 10 усл. ед., силоса — 16 усл. ед., корнеплодов — 20 усл. ед. и концентратов — 24 усл. ед.

2.3. Для перевозки 120 единиц оборудования 1-го типа, 160 единиц — 2-го типа и 180 единиц — 3-го типа предприятие может заказать четыре вида транспорта. Количество единиц оборудования, вмещаемого на одно транспортное средство соответствующего вида, приведено в таблице.

Тип оборудования	Вид транспорта			
	А	Б	В	Г
1	5	2	4	6
2	7	2	3	4
3	5	6	7	9

Требуется определить оптимальный состав заказываемых транспортных средств, при котором на перевозку оборудования затраты будут минимальными, если известно, что каждая единица заказанного транспортного средства обходится соответственно в 12, 10, 11 и 14 усл. ед.

2.4. Клиент банка желает сформировать портфель из государственных долгосрочных облигаций (ГДО), государственных краткосрочных облигаций (ГКО), краткосрочных облигаций Национального банка (КО), муниципальных облигаций и акций предприятий. Процентные доходы по ГДО, ГКО и КО освобождены от всех налогов, по муниципальным облигациям — освобождены от муниципального налога, а акции предприятий не освобождены от налогов. Ставки налогов следующие: республиканского — 40 %, местного — 10 %. Будем считать, что к процентному доходу, облагаемому соответствующими видами налогов, применяется суммарная ставка по ним.

Цель клиента — максимизация общей ставки дохода после налогообложения для его портфеля ценных бумаг. Необходимо определить веса пяти видов ценных бумаг, включенных в портфель, при условии, что сумма всех весов должна быть равна единице, короткие позиции не допустимы; в любую ценную бумагу может быть вложено не более 30 % всех средств в ГДО — не более 20 %, в ГКО — не менее 15 %, в КО и в муниципальные облигации — не более 50 % средств. Дюрация портфеля не должна превышать 8,0, а средневзвешенный срок до погашения (грубая мера ликвидности портфеля) — 14.

Условные данные о ставках доходов и налогов, дюрации и сроках до погашения ценных бумаг представлены в таблице:

Ценная бумага	Ставки дохода до налогообложения	Ставки налога, %	Ставки дохода после налогообложения	Дюрация	Срок до погашения
ГДО	35,0	–	35,0	8,0	18,0
ГКО	40,0	–	40,0	1,5	3,0
КО	40,0	–	40,0	9,0	18,0
Муниципальные облигации	30,0	40,0	18,0	5,5	7,0
Акции предприятий	35,0	50,0	17,5	7,0	12,0

Ставка дохода после налогообложения в приведенной таблице получена умножением ставки дохода до налогообложения на (1–Сн), где Сн — применяемая ставка налога.

2.2. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

2.2.1. Постановка и правила построения двойственной задачи

Каждой задаче линейной оптимизации можно поставить в соответствие задачу, называемую *двойственной* к ней.

Пусть дана общая задача линейной оптимизации (исходная задача):

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{2.26}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i=\overline{1,m_1},\ m_1 \le m, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i=\overline{m_1+1,m}, \end{cases} \tag{2.27}$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n_1}, \quad n_1 \le n, \tag{2.28}$$

x_j произвольного знака при $j=\overline{n_1+1,n}$.

Двойственная к ней задача имеет вид:

$$\tilde{f}(u) = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \to \min, \tag{2.29}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \ge c_j, j = \overline{1, n_1}, n_1 \le n, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i = c_j, j = \overline{n_1 + 1, n}, \end{cases} \tag{2.30}$$

$$u_i \ge 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad m_1 \le m, \tag{2.31}$$

$$u_i \text{ произвольного знака при } i = \overline{m_1 + 1, m}.$$

Задача (2.29)–(2.31), двойственная задаче (2.26)–(2.28), строится по следующим правилам:

1) *упорядочивается запись исходной задачи, т.е. если целевая функция задачи максимизируется, то ограничения неравенства должны быть вида* $\le$, *если минимизируется — то вида* $\ge$. *Выполнение этих условий достигается умножением соответствующих ограничений на (−1);*

2) *если исходная задача является задачей максимизации, то двойственная будет задачей минимизации. При этом вектор, образованный из коэффициентов при неизвестных целевой функции исходной задачи, совпадает с вектором констант в правых частях системы ограничений двойственной задачи, и, наоборот, коэффициентами при неизвестных целевой функции двойственной задачи являются соответствующие правые части системы ограничений исходной задачи;*

3) *каждой переменной* u_i *двойственной задачи соответствует i-е ограничение исходной задачи, и, наоборот, каждой переменной* x_j *прямой задачи соответствует j-е ограничение двойственной задачи;*

4) *матрица из коэффициентов при неизвестных двойственной задачи образуется транспонированием матрицы* $A = \| a_{ij} \|_{m \times n}$, *составленной из коэффициентов при неизвестных системы ограничений исходной задачи;*

5) *если на j-ю переменную исходной задачи наложено условие неотрицательности, то j-е ограничение двойственной задачи будет неравенством, в противном случае j-е ограничение будет равенством; аналогично связаны между собой ограничения исходной задачи и переменные двойственной.*

Задачи (2.26)–(2.28) и (2.29)–(2.31) образуют *пару взаимно двойственных задач*. Дадим экономическую интерпретацию пары двойственных задач.

Рассмотрим задачу рационального использования ресурсов. Пусть предприятие располагает ресурсами $b_1, b_2, \dots, b_m$, которые могут использоваться для выпуска n видов продукции. Пусть также известны стоимость единицы j-го вида продукции c_j $(j = \overline{1, n})$ и норма потребления i-го ресурса $(i = \overline{1, m})$ на производство единицы j-й продукции — a_{ij}.

Требуется определить объем производства продукции каждого вида x_j $(j = \overline{1,n})$, максимизирующий суммарную стоимость

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{2.32}$$

При этом расход ресурсов не должен превышать их наличия:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \tag{2.33}$$

Все неизвестные по своему экономическому смыслу неотрицательны:

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{2.34}$$

По исходным данным сформулируем другую экономическую задачу (двойственную).

Предположим, что некоторая организация может закупить все ресурсы, которыми располагает предприятие. Необходимо определить оптимальные цены (оценки) u_i^* $(i = \overline{1,m})$ на эти ресурсы исходя из естественного условия, что покупающая организация стремится минимизировать общую оценку ресурсов. Нужно, однако, учитывать и тот факт, что за ресурсы покупающая организация должна уплатить сумму, не меньшую той, которую может выручить предприятие при организации собственного производства продукции.

Математическая модель задачи имеет вид

$$\tilde{f} = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m \to \min, \tag{2.35}$$

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \ge c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \ldots + a_{mj}u_m \ge c_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m \ge c_n, \end{cases} \tag{2.36}$$

$$u_i \ge 0 \; (i = \overline{1,m}). \tag{2.37}$$

Здесь $\tilde{f}$—общая оценка ресурсов. Каждое j-е ограничение из системы (2.36) представляет собой неравенство, левая часть которого равна оценке всех ресурсов, расходуемых на производство единицы j-го вида продукции, а правая — стоимости единицы этой продукции.

Заметим, что задачи (2.32)–(2.34) и (2.35)–(2.37) образуют *симметричную* пару взаимно двойственных задач.

Пример 2.6. Построить двойственную задачу к следующей задаче, заданной в общей форме:

$$f = 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + 3x_5 \ge 7, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_4 \ge 0.$$

Упорядочим запись исходной задачи. Так как требуется найти минимум целевой функции, то неравенства в системе ограничений должны быть вида $\ge$. Умножив первое и третье неравенства на (-1), приведем систему ограничений к виду

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \ge 8, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \ge -5, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + 3x_5 \ge 7. \end{cases}$$

Двойственная задача будет иметь четыре переменные, так как прямая задача содержит четыре ограничения.

В соответствии с указанными выше правилами запишем двойственную задачу:

$$\tilde{f} = -8u_1 + 6u_2 - 5u_3 + 7u_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} -3u_1 + u_2 - u_3 + 2u_4 \le 2, \\ 2u_1 + 3u_2 - u_3 - 5u_4 \le -1, \\ -u_1 + u_2 - u_3 = 1, \\ -u_1 + 3u_2 + u_3 + u_4 \le 1, \\ u_1 - 2u_2 + 3u_4 = -2, \end{cases}$$

$$u_1 \ge 0, u_3 \ge 0, u_4 \ge 0.$$

Третье и пятое ограничения двойственной задачи записаны в виде равенства, так как на соответствующие им переменные x_3 и x_5 в исходной задаче не наложено условие неотрицательности. На переменные u_1, u_3 и u_4 наложено условие неотрицательности в связи с тем, что в исходной задаче им соответствуют ограничения в виде неравенств.

Пример 2.7. Построить двойственную задачу к следующей задаче, заданной в канонической форме:

$$f = 2x_2 + x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + 3x_4 = 9, \\ 3x_2 - 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,5}).$$

Существуют два способа построения двойственной задачи.

1-й способ. Введем три переменные u_1, u_2, u_3 и по общим правилам запишем двойственную задачу:

$$\tilde{f} = 9u_1 + 5u_2 + 6u_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} u_3 \geq 0, \\ u_1 + 3u_2 + 2u_3 \geq 2, \\ u_1 \geq 0, \\ 3u_1 - 2u_2 + u_3 \geq 1, \\ u_2 \geq 0. \end{cases}$$

2-й способ. Отбросив в первом, втором и третьем уравнениях базисные переменные x_1, x_3 и x_5, приведем задачу к симметричной форме:

$$f = 2x_2 + x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 \leq 9, \\ 3x_2 - 2x_4 \leq 5, \\ 2x_2 + x_4 \leq 6, \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.$$

Записав для нее двойственную задачу, получим тот же результат, что и при 1-м способе построения.

Пример 2.8. Построить задачу, двойственную к задаче линейной оптимизации, заданной в симметричной форме:

$$f = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x + 2x_2 + x_3 \geq 9, \\ 2x_1 + x_3 \geq 4, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Двойственная задача будет иметь две переменные u_1 и u_2, так как исходная задача содержит два ограничения. Используя общие правила записи двойственной задачи, получим:

$$\tilde{f} = 9u_1 + 4u_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 \leq 1, \\ 2u_1 \leq 1, \\ u_1 + u_2 \leq 1, \end{cases}$$

$$u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0.$$

Упражнения

По общим правилам составить задачи, двойственные к задачам 2.5–2.11.

2.5.

$$f = 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}).$$

2.6.

$$f = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 9, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \ge 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}).$$

2.7.

$$f = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_3 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}).$$

2.8.

$$f = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 8, \end{cases}$$

2.9.

$$f = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 \le 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \le 9, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

2.10.

$$f = 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 12, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 10, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 7, \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

2.11. Показать, что задача, двойственная по отношению к двойственной в примере 2.6, будет совпадать с исходной.

2.2.2. Основные теоремы двойственности

Теорема 1. *Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение* $\overline{x^*} = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, *то и другая имеет оптимальное решение* $\overline{u^*} = (u_1^*, \ldots, u_m^*)$. *При этом экстремальные значения целевых функций задач совпадают, т.е.*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i^*.$$

Если целевая функция одной из задач двойственной пары не ограничена, то другая задача не имеет решения.

Из этой теоремы двойственности следует, что:

1) для разрешимости одной из двойственных задач необходимо и достаточно, чтобы каждая из задач имела хотя бы одно решение;

2) для того чтобы решения $\overline{x^*} = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ и $\overline{u^*} = (u_1^*, \ldots, u_m^*)$ являлись оптимальными решениями пары двойственных задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i.$$

Проиллюстрируем утверждения примером.

Пример 2.9. Найти максимум функции

$$f = 4x_1 + 2x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 \le 12, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Двойственная задача имеет вид

$$\tilde{f} = 6u_1 + 4u_2 + 12u_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + 2u_3 \ge 4, \\ u_1 + u_3 \ge 2, \end{cases}$$

$$u_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,3}).$$

После приведения ограничений-неравенств задач к эквивалентным уравнениям и разрешения их относительно базисных переменных получим

для прямой задачи:

$$\begin{cases} x_3 = -x_1 - x_2 + 6 \ge 0, \\ x_4 = -x_1 + 4 \ge 0, \\ x_5 = -2x_1 - x_2 + 12 \ge 0, \end{cases}$$

для двойственной задачи:

$$\begin{cases} u_4 = u_1 + u_2 + 2u_3 - 4 \ge 0, \\ u_5 = u_1 + u_3 - 2 \ge 0. \end{cases}$$

Чтобы решить задачи, построим для них жордановы таблицы: для прямой задачи — модифицированную табл. 2.21, для двойственной — обыкновенную табл. 2.22 (Н.Н. означает небазисные неизвестные, а Б.Н. — базисные).

Таблица 2.21

Б.Н. \ Н.Н.	$-x_1$	$-x_2$	1
$x_3 =$	1	1	6
$x_4 =$	1	0	4
$x_5 =$	2	1	12
$f =$	−4	−2	0

Таблица 2.22

Б.Н. \ Н.Н.	u_1	u_2	u_3	1
$u_4 =$	1	1	2	−4
$u_5 =$	1	0	1	−2
$\tilde{f} =$	6	4	12	0

Табл. 2.21 и 2.22 содержат одни и те же данные, следовательно, таблицы можно объединить. Для этого дополним табл. 2.21 заглавной строкой, где поместим базисные неизвестные двойственной задачи, и заглавным столбцом, в котором запишем небазисные неизвестные. Клетку, находящуюся на пересечении заглавной строки и столбца свободных членов, отведем под запись функции $\tilde{f}$, а в симметричной ей клетке поставим единицу (табл. 2.23).

Таблица 2.23

	Б.Н.	$u_4 =$	$u_5 =$	$\tilde{f} =$
Н.Н.	Б.Н. / Н.Н.	$-x_1$	$-x_2$	1
u_1	$x_3 =$	1	1	6
u_2	$x_4 =$	1	0	4
u_3	$x_5 =$	2	1	12
1	$f =$	−4	−2	0

Из табл. 2.23 видно, что любая базисная переменная двойственной задачи равна сумме произведений коэффициентов отвечающего ей столбца на соответствующие переменные, стоящие в левом заглавном столбце. Например:

$$u_4 = u_1 + u_2 + 2u_3 - 4.$$

Аналогично вычисляется и значение функции.

Табл. 2.23 (двойственная таблица) позволяет легко установить соответствие между переменными прямой и двойственной задач. Так, базисным переменным x_3, x_4, x_5 исходной задачи соответствуют небазисные переменные u_1, u_2 и u_3 двойственной задачи. Аналогично небазисным переменным x_1 и x_2 прямой задачи соответствуют базисные переменные u_4 и u_5 двойственной задачи.

Опустив расчеты, приведем оптимальное решение задачи в табл. 2.24.

Таблица 2.24

	Б.Н.	u_1	u_2	$\tilde{f} =$
Н.Н.	Б.Н. / Н.Н.	$-x_3$	$-x_4$	1
u_5	$x_2 =$			2
u_4	$x_1 =$			4
u_3	$x_5 =$			2
1	$f =$	2	2	20

Максимальное значение функции исходной задачи $f = 20$ достигается при следующих значениях переменных: $x_1^* = 4$; $x_2^* = 2$; $x_3^* = 0$; $x_4^* = 0$; $x_5^* = 2$.

Значения небазисных неизвестных двойственной задачи равны нулю ($u_3^* = u_4^* = u_5^* = 0$); значения базисных неизвестных — в последней строке таблицы ($u_1^* = 2$, $u_2^* = 2$). При этом значение функции $\tilde{f}$ минимально и равно значению функции прямой задачи (20).

В рассмотренном примере мы решали исходную задачу и, используя принцип соответствия между неизвестными, нашли решение двойственной задачи. В некоторых случаях удобнее поступать наоборот.

Пример 2.10. Найти оптимальное решение задачи:

$$f = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 4, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}).$$

Двойственная задача имеет вид

$$\tilde{f} = 4u_1 + 6u_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 4u_1 + 5u_2 \le 4, \\ 3u_1 + u_2 \le 2, \\ -u_1 + 2u_2 \le 3, \end{cases}$$

$$u_1 \ge 0, \quad u_2 \ge 0.$$

Решение этой задачи приведено в табл. 2.25 и 2.26.

Таблица 2.25

Б.Н. \ Н.Н.	$-u_1$	$-u_2$	1
$u_3 =$	4	$\boxed{5}$	4
$u_4 =$	3	1	2
$u_5 =$	−1	2	3
$f =$	−4	−6	0

Таблица 2.26

Б.Н. \ Н.Н.	u_1	u_3	1
$u_2 =$			4/5
$u_4 =$			6/5
$u_5 =$			7/5
$\tilde{f} =$	4/5	6/5	24/5

Оптимальное решение двойственной задачи:

$$\tilde{f}^*(u) = 24/5;\ u_1^* = 0;\ u_2^* = 4/5;\ u_3^* = 0;\ u_4^* = 6/5;\ u_5^* = 7/5.$$

На основании соответствия между неизвестными запишем оптимальное решение исходной задачи:

$$f^*(x) = 24/5;\ x_1^* = 6/5;\ x_2^* = x_3^* = 0;\ x_4^* = 4/5;\ x_5^* = 0.$$

Заметим, что для решения исходной задачи симплекс-методом потребовалось бы выполнить не менее двух итераций. Решение же двойственной задачи найдено за одну итерацию.

При решении двойственных задач возможны следующие случаи:

а) обе задачи разрешимы (имеют планы);

б) области допустимых решений обеих задач пусты;

в) одна задача имеет неограниченную область допустимых решений, вторая — пустую.

Пример 2.11. Решить задачу:

$$f = 6x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Двойственная задача имеет вид

$$\tilde{f} = 8u_1 + 6u_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2u_1 + 2u_2 \ge 6, \\ 4u_1 + u_2 \ge 4, \end{cases}$$

$$u_1 \ge 0, \quad u_2 \ge 0.$$

Графическое решение исходной задачи приведено на рис. 2.6, *а*, двойственной — на рис. 2.6, *б*. Максимальное значение функции исходной задачи достигается в точке $\bar{x}^*(8/3;\ 2/3)$, т.е. при $x_1^* = 8/3$ и $x_2^* = 2/3$ $f_{\max} = 56/3$. Минимальное значение функции двойственной задачи достигает в точке $\bar{u}^*(1/3,\ 8/3)$, т.е. при $u_1^* = 1/3$ и $u_2^* = 8/3$ $\tilde{f}_{\min} = 56/3$.

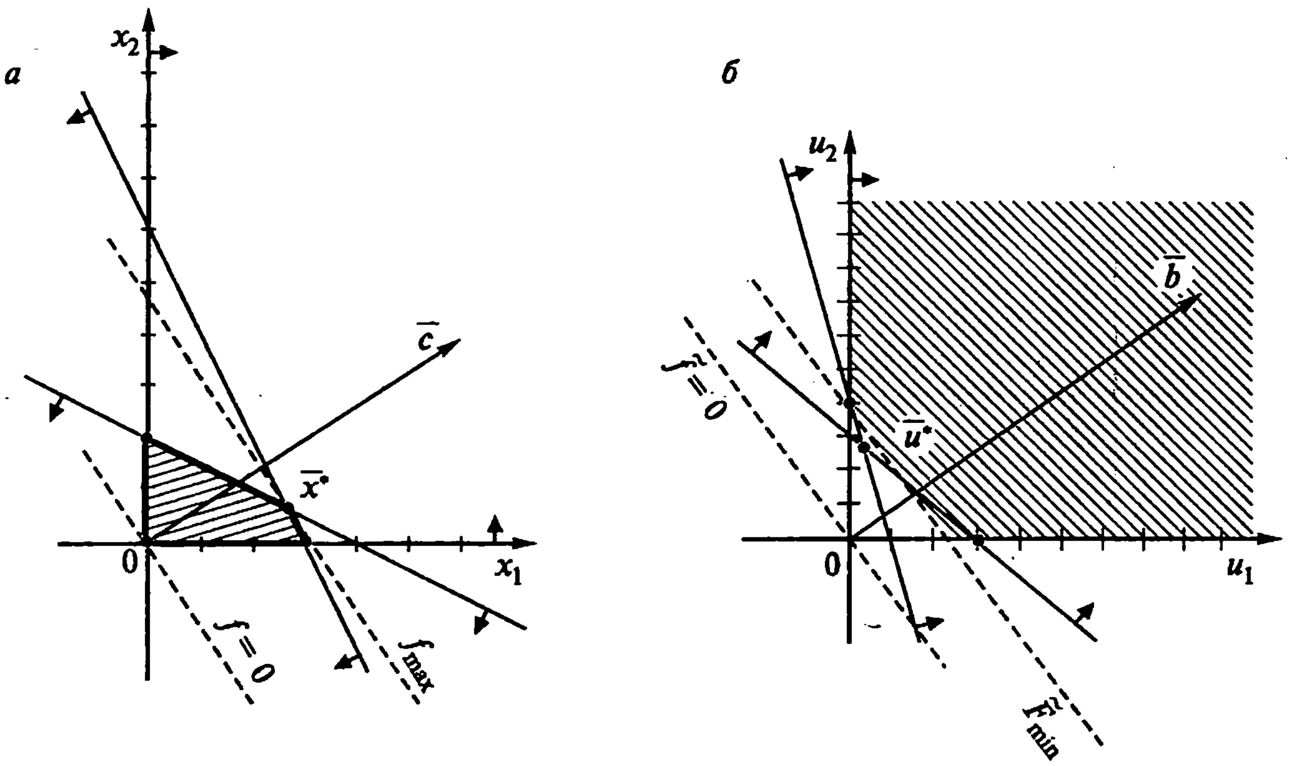


Рис. 2.6

Пример 2.12. Решить задачу:

$$f = 6x_1 + 3x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 \geq 3, \\ -2x_1 + x_2 \geq -2, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Прежде чем записать условие двойственной задачи, второе неравенство исходной задачи умножим на (-1), после чего система ограничений будет иметь вид

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 \geq 3, \\ 2x_1 - x_2 \geq 2. \end{cases}$$

Теперь запишем двойственную задачу:

$$\tilde{f} = 3u_1 + 2u_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -3u_1 + 2u_2 \leq 6, \\ -u_1 - u_2 \leq 3, \end{cases}$$

$$u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0.$$

Область решений исходной задачи пустая, так как система ограничений противоречива (рис. 2.7, *а*). В самом деле, вычитая из первого неравенства второе, имеем $x_1 \leq -1/5$, что противоречит условию $x_1 \geq 0$.

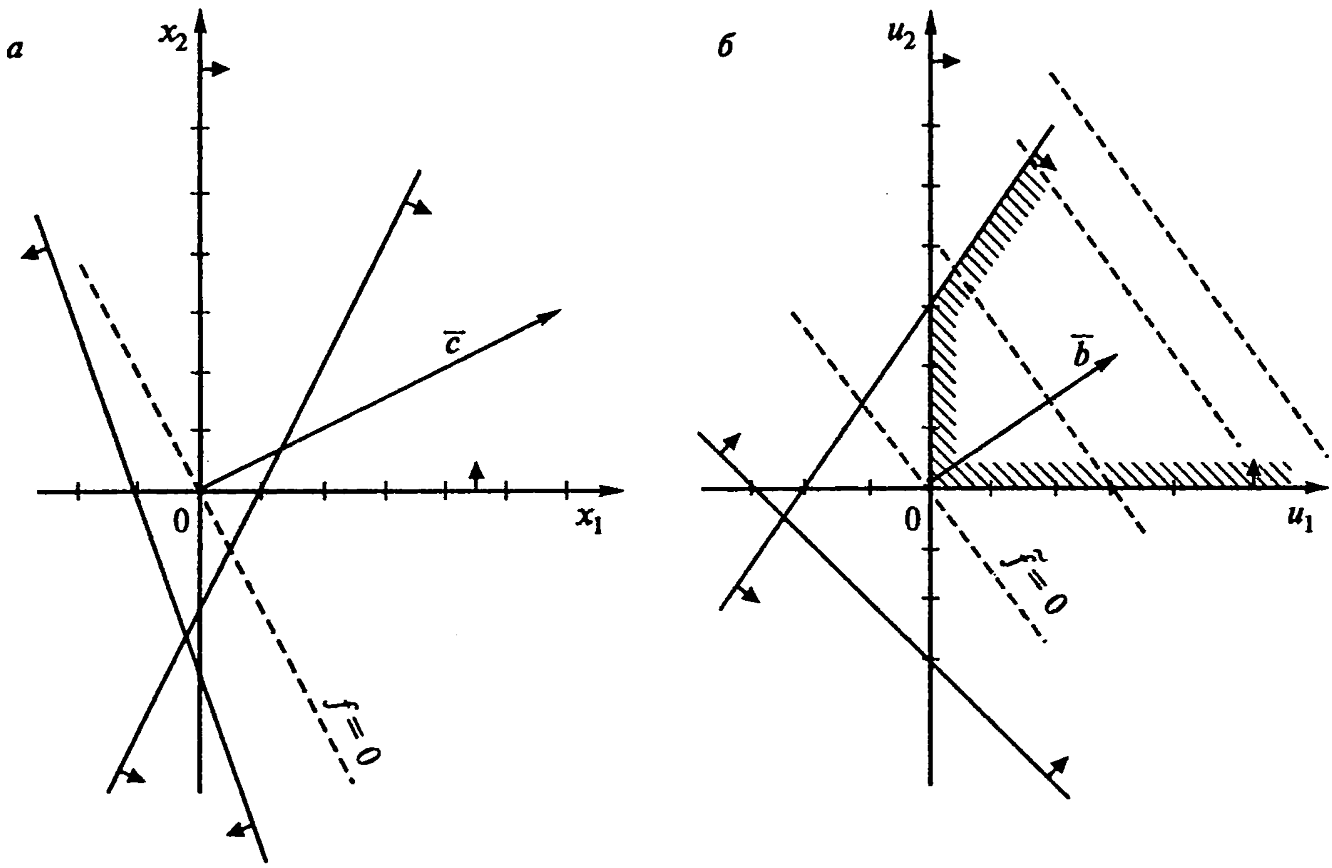


Рис. 2.7

Графическое решение двойственной задачи представлено на рис. 2.7, *б*. Максимальное значение функции $\tilde{f} = 3u_1 + 2u_2$ не определено, так как область допустимых решений неограниченная.

Пример 2.13. Исходная задача имеет вид

$$f = 6x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 - 3x_2 \le -6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

К этой задаче необходимо построить двойственную и найти оптимальные решения задач. Введем две переменные u_1 и u_2 и запишем двойственную задачу:

$$\tilde{f} = 3u_1 - 6u_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} -u_1 + u_2 \ge 6, \\ 3u_1 - 3u_2 \ge 2, \end{cases}$$

$$u_1 \ge 0, \quad u_2 \ge 0.$$

Графическая интерпретация исходной и двойственной задач дана на рис. 2.8, из которого видно, что области допустимых решений систем ограничений задач пустые (задачи планов не имеют).

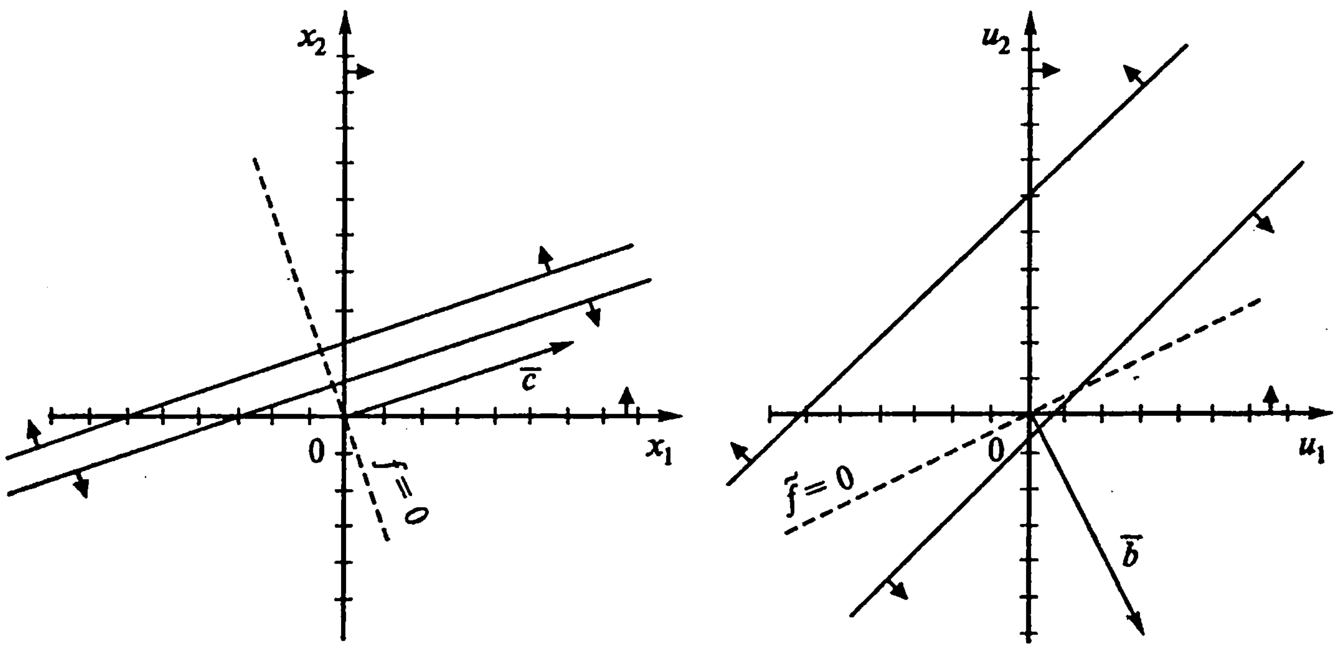


Рис. 2.8

Рассмотрим важное следствие, вытекающее из первой теоремы двойственности, которое в литературе формулируется в виде теоремы о дополнительной нежесткости.

Теорема 2. *Если какая-то переменная x_j^* $(j = \overline{1,n})$ оптимального решения исходной задачи положительна, то j-е ограничение двойственной задачи ее оптимальным решением обращается в строгое равенство.*

Если оптимальное решение исходной задачи обращает какое-то i-е $(i = \overline{1,m})$ ограничение в строгое неравенство, то в оптимальном решении двойственной задачи переменная u_i равна нулю.

Эта теорема справедлива для задач симметричной двойственной пары. Для задач, заданных в канонической и общей форме, она справедлива только при ограничениях, имеющих вид неравенств, и при неотрицательности переменных.

Чтобы показать справедливость теоремы, рассмотрим взаимосвязь между значениями переменных и ограничениями следующих двойственных задач:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad \tilde{f} = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m}, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \ge c_j,\ j = \overline{1,n},$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}, \qquad u_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Приведем ограничения-неравенства задач к эквивалентным уравнениям:

для исходной — для двойственной —

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i,\quad i = \overline{1,m}; \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_j - u_{m+j} = c_j,\quad j = \overline{1,n}.$$

Записав условия обеих задач в двойственную таблицу, найдем их оптимальные решения. Пусть после некоторого числа шагов модифицированных жордановых исключений применительно к прямой задаче найдено оптимальное решение (табл. 2.27).

Из табл. 2.27 видно, что неизвестная x_1 положительна ($x_1 = \beta_1$). Следовательно, первое ограничение двойственной задачи выполняется как строгое равенство ($u_{m+1} = 0$).

В оптимальном плане двойственной задачи $(m+j)$-я и $(m+n)$-я дополнительные неизвестные положительны ($u_{m+j} = q_j$, $u_{m+n} = q_n$). Это значит, что j-е и n-е ограничения выполняются как строгие неравенства. Следовательно, в исходной задаче соответствующие основные неизвестные равны нулю ($x_j = x_n = 0$).

В оптимальном плане исходной задачи дополнительные неизвестные x_{n+i} и x_{n+m} положительны ($x_{n+i} = \beta_i$, $x_{n+m} = \beta_m$), значит, i-е и m-е ограничения выполняются как строгие неравенства. Следовательно, в двойственной задаче основные неизвестные u_i и u_m равны нулю ($u_i = u_m = 0$), так как они являются небазисными.

Таблица 2.27

	Б.Н.	$u_1 = \ldots u_{m+j} = \ldots u_{m+n}$	$\tilde{f}$
Н.Н.	Б.Н. \ Н.Н.	$-x_{n+1} \ldots -x_j \ldots -x_n$	1
u_{m+1}	$x_1 =$		β_1
...	...		...
u_i	$x_{n+i} =$	$(b_{ij})_{m \times n}$	β_i
...	...		...
u_m	$x_{n+m} =$		β_m
1	$f =$	$q_1 \ldots q_j \ldots q_n$	Q

Пример 2.14. Найти решение задачи путем графического анализа двойственной.

$$f = -6x_1 - 12x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}).$$

Запишем условие двойственной задачи:

$$\tilde{f} = 6u_1 + 12u_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2u_1 - 3u_2 \geq -6, \\ -4u_1 + 3u_2 \geq -12, \\ 3u_1 + u_2 \geq 3, \\ -u_1 \geq -1, \end{cases}$$

$$u_1, u_2 \text{— любые.}$$

Графическое решение этой задачи представлено на рис. 2.9.

ОДР системы ограничений является треугольник ABC. Оптимальное решение достигается в точке $C(1, 0)$ и $\tilde{f}_{\min} = 6$. Этим решением первое и второе ограничения удовлетворяются как строгие неравенства $(2-0=2>-6$ и $-4+0=-4>-12)$, следовательно, соответствующие им переменные исходной задачи x_1 и x_2 равны нулю. Тогда, подставляя в исходную систему ограничений значения переменных $x_1 = x_2 = 0$, получаем

$$\begin{cases} 3x_3 - x_4 = 6, \\ x_3 = 12, \end{cases}$$

откуда находим, что $x_3 = 12$, $x_4 = 30$. Следовательно, решение исходной задачи $\overline{x^*} = (0;\ 0;\ 12;\ 30)$. При этом $f_{\max} = 3 \cdot 12 - 1 \cdot 30 = 6$. Так как $f_{\max} = \tilde{f}_{\min} = 6$, то вычисления выполнены правильно.

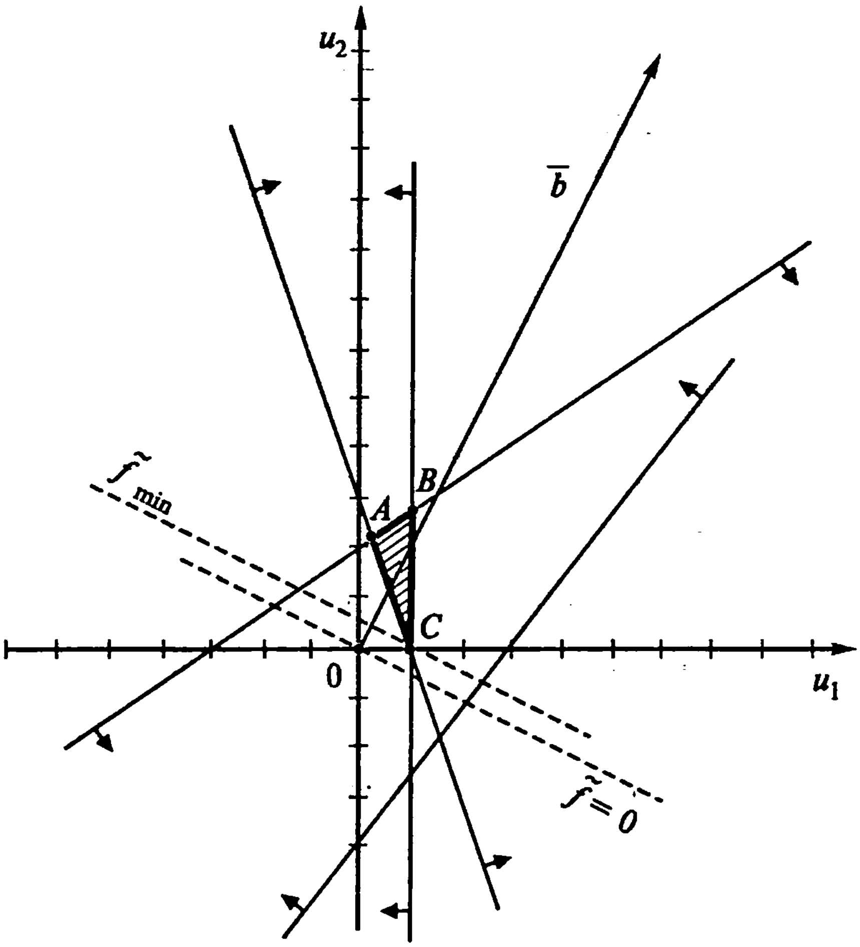


Рис. 2.9

2.2.3. Двойственный симплекс-метод

Рассмотрим задачу линейной оптимизации:

$$f = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + c \to \min,$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+m} = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m \geq 0, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Занесем данные задачи в таблицу для обыкновенных жордановых исключений (табл. 2.28).

При использовании двойственного симплекс-метода решение находится в два этапа: на первом добиваются неотрицательности коэффициентов f-строки и на втором — неотрицательности свободных членов.

Таблица 2.28

Б.Н. \ Н.Н.	x_1	x_2	x_n	1
x_{n+1} =	a_{11}	$a_{12}\ldots$	a_{1n}	b_1
...	...	...	...	...
x_{n+m} =	a_{m1}	$a_{m2}\ldots$	a_{mn}	b_m
f =	c_1	$c_2\ldots$	c_n	c

Алгоритм двойственного симплекс-метода сводится к следующему:

Этап 1

1. Просматривают коэффициенты f-строки; если все они неотрицательны, то переходят к пункту 1 этапа 2.

2. Если в f-строке имеется отрицательный коэффициент, то выделяют столбец, содержащий этот коэффициент.

3. В выделенном столбце отыскивают отрицательное число и содержащую его строку полагают разрешающей. Если в выделенном столбце нет отрицательных чисел, то задача не имеет решения.

4. Вычисляют двойственные отношения (отношения элементов f-строки к элементам разрешающей строки). Наименьшее из отношений определяет разрешающий столбец.

5. С найденным разрешающим элементом делают шаг обыкновенных жордановых исключений. Анализ новой таблицы начинают с пункта 1.

Этап 2

1. Просматривают столбец свободных членов; если все элементы столбца неотрицательны, то оптимальное решение достигнуто.

2. Если в столбце свободных членов есть отрицательные элементы, то среди них находят наименьший. Этот элемент определяет разрешающую строку.

3. Разрешающий элемент находят по наименьшему двойственному отношению. Если в разрешающей строке нет положительных элементов, то задача не имеет решения.

4. С найденным разрешающим элементом делают один шаг обыкновенных жордановых исключений. Анализ полученной таблицы начинают с пункта 1 этапа 2.

Примечание. Чтобы найти максимум функции, нужно произвести в задаче замену $F(x) = -f(x)$ и искать минимум полученной функции. Искомый максимум функции $f(x)$ равен свободному члену, находящемуся в f-строке симплексной таблицы, взятому с обратным знаком.

Пример 2.15. Найти двойственным симплекс-методом минимум функции

$$f = 4x_1 - 4x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_3 = 2x_1 - 2x_2 + 8 \geq 0; \\ x_4 = -x_1 + 4x_2 + 10 \geq 0; \\ x_5 = 2x_1 + 2x_2 - 12 \geq 0; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

Занесем условие задачи в таблицу (табл. 2.29). Так как в f-строке имеется отрицательный элемент (−4), то второй столбец считаем выделенным. В этом столбце находим отрицательное число (−2) и содержащую его первую строку считаем разрешающей. Вычисляем наименьшее двойственное отношение:

$$\min(4/2; -4/-2)=2.$$

Из двух одинаковых отношений выберем второе. Оно определяет разрешающий элемент (−2). Делаем один шаг обыкновенных жордановых исключений и заносим результат в табл. 2.30.

Таблица 2.29

Б.Н. \ Н.Н.	x_1	x_2 ↓	1
→ x_3 =	2	$\boxed{-2}$	8
x_4 =	−1	4	10
x_5 =	2	2	−12
f =	4	−4	0

Таблица 2.30

Б.Н. \ Н.Н	x_1 ↓	x_3	1
x_2 =	1	−1/2	4
x_4 =	3	−2	26
→ x_5 =	$\boxed{4}$	−1	−4
f =	0	2	−16

В f-строке табл. 2.30. все элементы неотрицательные, однако в столбце свободных членов есть отрицательное число (−4), следовательно, план, записанный в таблице, не является допустимым. Принимаем третью строку за разрешающую. Так как в f-строке есть нуль, имеем случай вырождения. В столбце над нулем в разрешающей строке находится положительный элемент (4), следовательно, разрешающим будет первый столбец.

С разрешающим элементом 4 делаем следующий шаг. Найденное новое решение (табл. 2.31) является оптимальным.

Таблица 2.31

Б.Н. \ Н.Н.	x_5	x_3	1
x_2 =			5
x_4 =			29
x_1 =			1
f =	0	2	−16

Значение $f(x)_{\min} = -16$ при $x_1^* = 1, x_2^* = 5, x_3^* = x_5^* = 0, x_4^* = 29.$

Пример 2.16. Применяя двойственный симплекс-метод, найти максимум функции

$$f = 4x_1 + 2x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

После изменения направления оптимизации исходной функции, $F(x) = -f(x)$, и при ведения системы ограничений к эквивалентной системе уравнений получим следующую задачу: найти минимум функции

$$F = -4x_1 - 2x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_3 = -x_1 - x_2 + 6 \ge 0, \\ x_4 = -x_1 + 3 \ge 0, \\ x_5 = -2x_1 - x_2 + 10 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Занесем условия задачи в табл. 2.32.

Таблица 2.32

Б.Н. \ Н.Н.	x_1	x_2	1
$x_3 =$	−1	$\boxed{-1}$	6
$x_4 =$	−1	0	3
$x_5 =$	−2	−1	10
$F =$	−4	−2	0

В F-строке имеем два отрицательных элемента −4 и −2, следовательно, можно выделить любой из столбцов. Выделим столбец, в котором находится элемент −4. Здесь три отрицательных элемента, поэтому в качестве разрешающей можно взять любую строку. Пусть разрешающей будет первая. Вычисляем наименьшее двойственное отношение:

$$\min\left(\frac{-4}{-1}; \frac{-2}{-1}\right) = 2.$$

Разрешающий столбец соответствует переменной x_2. С разрешающим элементом −1 делаем шаг жордановых исключений. В результате получим табл. 2.33. Преобразовав ее, придем к табл. 2.34.

Таблица 2.33

Б.Н. \ Н.Н.	x_1	x_3	1
$x_2 =$	-1	-1	6
$x_4 =$	$\boxed{-1}$	0	3
$x_5 =$	-1	1	4
$F =$	-2	2	-12

Таблица 2.34

Б.Н. \ Н.Н.	x_4	x_3	1
$x_2 =$			3
$x_1 =$			3
$x_5 =$			1
$F =$	2	2	-18

В столбце свободных членов и F-строке табл. 2.34 нет отрицательных элементов, следовательно, получен оптимальный план: $x_1^* = x_2^* = 3$, $x_3^* = x_4^* = 0$, $x_5^* = 1$ и $F_{\min} = -18$. Поменяв знак в значении функции, имеем $f_{\max} = 18$.

Упражнения

Применяя двойственный симплекс-метод, решить задачи 2.12—2.16 и, используя соответствие между переменными, найти оптимальные решения двойственных к ним задач.

2.12

$$f = x_1 + x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ -x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \geq -3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2.13

$$f = 16x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 6x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_4 \leq 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}).$$

2.14

$$f = 88x_1 + 80x_2 + 148x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 12, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}).$$

2.15

$$f = 270x_1 + 300x_2 + 320x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}).$$

2.16

$$f = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 7, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}).$$

2.2.4. Анализ решения задач линейной оптимизации

Анализ решения задач линейной оптимизации (2.1)–(2.4) основывается на варьировании параметров c_j, a_{ij} и $b_i (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$.

Покажем, что при изменениях правых частей b_i $(i = \overline{1,m})$ неизвестные двойственной задачи могут интерпретироваться как оценки влияния этих изменений на оптимальное значение функции исходной задачи. Обозначив приращение правых частей через Δb_i, введем $z_i = b_i + \Delta b_i (i = \overline{1,m})$. Подставив вместо $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ в прямую и двойственную задачи $\overline{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$, получим пару многопараметрических двойственных задач с приращениями правых частей $\Delta\overline{b}(\overline{z} = \overline{b} + \Delta\overline{b})$.

В соответствии с первой теоремой двойственности $f_{\max} = \tilde{f}_{\min}$ или $\overline{p} \cdot \overline{x_{(1)}^*} = \overline{b} \cdot \overline{u^*}$, а для пары двойственных многопараметрических задач $\overline{p} \cdot \overline{x_{(2)}^*} = \overline{z} \cdot \overline{u}^*$, где $\overline{p}$ — вектор прибыли продукции, $\overline{u^*}$ — вектор неизвестных двойственной задачи, $\overline{x_{(1)}^*}$ и $\overline{x_{(2)}^*}$ — векторы оптимального решения прямой и многопараметрической задач соответственно.

Тогда приращение функции исходной задачи, из-за замены b_i на z_i, $\Delta f_{\max} = \overline{p} \cdot \overline{x_{(2)}^*} - \overline{p} \cdot \overline{x_{(1)}^*} = \overline{z} \cdot \overline{u^*} - \overline{b} \cdot \overline{u^*} = (\overline{b} + \Delta\overline{b})\overline{u}^* - \overline{b} \cdot \overline{u}^* = \Delta\overline{b} \cdot \overline{u}^*$.

Если изменяется только i-е ограничение, то $(\Delta f_{\max})_i = \Delta b_i u_i^* (i = \overline{1,m})$. Отсюда

$$u_i^* = \frac{(\Delta f_{\max})_i}{\Delta b_i} \quad (i = \overline{1,m}).$$

Эта важная формула показывает, что двойственная оценка u_i^* оптимального решения двойственной задачи численно равна приращению целевой функции исходной задачи при изменении правой части i-го ограничения на единицу.

Этот результат в теории линейной оптимизации доказывается в третьей теореме двойственности (теореме об оценках).

Теорема 3. *В оптимальном решении двойственной задачи значения переменных u_i^* (оценок) численно равны частным производным $\partial f_{\max} / \partial b_i$ для исходной задачи, т.е. $u_i^* = \partial f_{\max} / \partial b_i$, $i = \overline{1,m}$.*

Заменив дифференциалы приращениями ($\partial f_{\max} \approx \Delta f_{\max}, \partial b_i \approx \Delta b_i$), получим $(\Delta f_{\max})_i = u_i^* \Delta b_i$, а при $\Delta b_i = 1$ $(\Delta f_{\max})_i = u_i^*$.

Отсюда, при малых изменениях Δb_i свободных членов b_i, следует приближенное равенство

$$\Delta f_{\max} \approx \overline{u^*} \cdot \Delta \bar{b} = \sum_{i=1}^{m} u_i^* \Delta b_i .$$

Некоторые аспекты применения двойственных оценок оптимального решения для его экономико-математического анализа рассмотрим на примере задачи рационального использования ресурсов по критерию максимума прибыли.

В матрично-векторной форме задача записывается следующим образом:

исходная задача —

$$f = \bar{p} \cdot \bar{x} \to \max,$$
$$A\bar{x} \le \bar{b},$$
$$\bar{x} \ge 0,$$

двойственная задача —

$$\tilde{f} = \bar{b} \cdot \bar{u} \to \min,$$
$$A^{\mathrm{T}} \bar{u} \ge \bar{p},$$
$$\bar{u} \ge 0,$$

где A — матрица из коэффициентов при неизвестных системы ограничений — норм потребления ресурсов; $\bar{b}$ — вектор ограничений по ресурсам; $\bar{p}$ — вектор прибыли продукции; $\bar{x}$ — искомый вектор: план производства продукции; $\bar{u}$ — вектор оценок ресурсов; A^{T} — транспонированная матрица к матрице A.

Анализ задач линейной оптимизации может проводиться: путем сопоставления различных вариантов решений; при помощи анализа внутренней структуры каждого из полученных решений, базирующегося на следующих свойствах двойственных оценок.

Двойственные оценки являются:

1) *показателем дефицитности ресурсов и продукции.* Это их свойство вытекает из теоремы 2. Величина u_i^* является оценкой i-го ресурса. Чем больше значение оценки u_i^*, тем выше дефицитность ресурса. Для недефицитного ресурса $u_i^* = 0$;

2) *показателем влияния ограничений на значение целевой функции.* Ранее было отмечено, что $u_i^* = \dfrac{\partial f_{\max}}{\partial b_i}$. При незначительном приращении Δb_i оценка является точной мерой влияния ограничений на целевую функцию. Поэтому представляет практический интерес определение предельных значений правых

частей системы ограничений (нижней и верхней границ), в которых величины оценок остаются неизменными;

3) *показателем эффективности производства отдельных видов продукции с позиций критерия оптимальности.* Это свойство вытекает из теоремы 2. Его сущность заключается в том, что в оптимальный план может быть включена лишь та продукция j-го вида, для которой выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* < p_j;$$

4) *инструментом сопоставления суммарных условных затрат и результатов.* Это свойство следует из первой теоремы двойственности, в которой устанавливается связь между значениями функций прямой и двойственной задач.

Из ранее данной экономической интерпретации двойственных задач следует, что равенство значений целевых функций при оптимальных планах означает, что оценка всех затрат производства должна равняться оценке производственного продукта.

Для целей анализа большое значение имеет матрица $A^{-1} = \|d_{ij}\|$, обратная к матрице $A = \|a_{ij}\|$ в оптимальном решении.

Двойственные оценки можно использовать для экономического анализа решения при условии, что ограничения на ресурсы изменяются лишь в определенных пределах. В этой связи говорят о *допустимом интервале устойчивости оценок.* Интервал устойчивости оценок по отношению к i-му ограничению имеет вид

$$[b_i - \Delta b_i^{н}; b_i + \Delta b_i^{в}], \quad i = \overline{1,m}, \tag{2.38}$$

где $\Delta b_i^{н}$ называют *нижним пределом уменьшения,* а $\Delta b_i^{в}$ — *верхним пределом увеличения* и вычисляют по формулам

$$\Delta b_i^{н} = \min_{\substack{j \\ d_{ij} > 0}} \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\}; \quad \Delta b_i^{в} = \max_{\substack{j \\ d_{ij} < 0}} \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\}. \tag{2.39}$$

Целесообразность включения в план новых видов продукции оценивается характеристикой

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i - p_j. \tag{2.40}$$

Если $\Delta_j < 0$, то данный вид продукции после введения в план улучшает его. При $\Delta_j > 0$ включение в план продукции нецелесообразно.

Пусть имеется возможность приобрести дополнительно i-й ресурс в объеме $\Delta b_i^{в}$. Эта величина находится в пределах устойчивости двойственных оценок. Цена единицы ресурса равна c_i. Следовательно, приращение прибыли $(\Delta f_{\max})_i = \Delta b_i^* u_i^*$, в то время как затраты на приобретение ресурса составляют $\Delta c_i = \Delta b_i^* c_i$. Данное мероприятие будет эффективным, если оно обеспечит дополнительную прибыль, т.е. если $\Delta p_i > 0$, где

$$\Delta p_i = (\Delta f_{\max})_i - \Delta c_i. \tag{2.41}$$

Пример 2.17. Для изготовления четырех видов продукции: А, Б, В и Г используются три вида ресурсов: I, II, III. Наличие ресурсов, нормы их расхода на единицу продукции и получаемая прибыль от единицы продукции заданы в табл. 2.35.

Таблица 2.35

Вид ресурса	Наличие ресурса	Норма расхода на единицу продукции			
		А	Б	В	Г
I	240	2	1	1	3
II	60	1	0	2	1
III	300	1	2	1	0
Прибыль	–	4	2	3	5

Необходимо:

а) найти оптимальные решения прямой и двойственной задач;

б) определить изменение максимальной прибыли при изменении ресурсов: I вида — на −10, II — на +60, III — на +30 единиц. Оценить раздельное и суммарное влияния этих изменений на величину максимальной прибыли;

в) оценить целесообразность введения в план пятого вида продукции Д, нормы затрат ресурсов на единицу которого соответственно равны 2, 4, 2, а прибыль составляет 15;

г) оценить целесообразность закупки 100 единиц ресурса III вида по цене $c_3 = 0{,}5$.

Математическая модель задачи имеет вид

$$f = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \le 240, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 60, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 300, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1,4}).$$

а) Решаем задачу симплекс-методом (опуская подробности, приведем сразу оптимальное решение в табл. 2.36).

Значение целевой функции и оптимальный план: $f^* = 480$, $x_1^* = 60$, $x_2^* = 120$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = x_5^* = x_6^* = x_7^* = 0$.

Таблица 2.36

Б.Н. \ Н.Н.	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_7$	1
$x_1 =$	11/5	4/5	−2/5	−1/5	60
$x_2 =$	−4/5	−1/5	3/5	−1/5	120
$x_3 =$	−3/5	−2/5	1/5	3/5	0
$f =$	2/5	8/5	1/5	3/5	480

Базисными неизвестными, входящими в оптимальный план, являются x_1, x_2 и x_3. Выпишем матрицу из коэффициентов при базисных неизвестных:

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Из табл. 2.36 выпишем матрицу, обратную к матрице A,

$$A^{-1} = \|d_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 4/5 & -1/5 & -2/5 \\ -1/5 & -1/5 & 3/5 \\ -2/5 & 3/5 & 1/5 \end{Vmatrix}.$$

Используя соответствие между переменными исходной и двойственной задач, запишем оптимальное решение двойственной задачи: $u_1^* = 8/5, u_2^* = 3/5, u_3^* = 1/5, u_4^* = u_5^* = u_6^* = 0, u_7^* = 2/5, f(u)_{\min} = 480$. Как показывает величина оценок, наиболее дефицитным является ресурс I, так как $u_1^* = 8/5$, а наименее дефицитным — ресурс III, так как $u_3^* = 1/5$.

Чтобы определить изменение максимальной прибыли при изменении ресурсов, необходимо найти интервалы устойчивости двойственных оценок, в пределах которых они точно измеряют влияние ограничений на целевую функцию.

Определим интервал устойчивости оценок по отношению к ограничению по ресурсу I вида. Используя формулы (2.39), находим:

$$\Delta b_i^{\text{н}} = \min\left\{\frac{60}{4/5}\right\} = 75;$$

$$\Delta b_1^{\text{в}} = \left|\max\left\{\frac{120}{-1/5}; \frac{0}{-2/5}\right\}\right| = 0.$$

В соответствии с (2.38) интервал устойчивости оценок по отношению к первому ограничению принимает вид

$$[b_1 - \Delta b_1^{\text{н}};\ b_1 + \Delta b_1^{\text{в}}] = [240 - 75;\ 240 + 0] = [165;\ 240].$$

Аналогичным образом находим интервалы устойчивости оценок по отношению к ограничениям по двум другим видам ресурсов: по ресурсу II — [60; 360], по ресурсу III — [300; 450].

б) Так как изменения ресурсов находятся в пределах устойчивости оценок, то их раздельное влияние на величину прибыли $(\Delta f_{max})_i$ определяется произведением оценки u_i^* и величины изменения ресурса Δb_i. Таким образом,

$$(\Delta f_{max})_1 = u_1^* \Delta b_1 = 8/5 \cdot (-10) = -16;$$
$$(\Delta f_{max})_2 = u_2^* \Delta b_2 = 3/5 \cdot 60 = 36;$$

$$(\Delta f_{max})_3 = u_3^* \Delta b_3 = 1/5 \cdot 30 = 6.$$

Суммарное влияние

$$\Delta f_{max} = (\Delta f_{max})_1 + (\Delta f_{max})_2 + (\Delta f_{max})_3 = -16 + 36 + 6 = 26.$$

в) Оценим целесообразность введения в план пятого вида продукции Д. Для этого по формуле (2.40) вычислим характеристику

$$\Delta_5 = \sum_{i=1}^{3} a_{i5} u_i^* - p_5 = (2 \cdot 8/5 + 4 \cdot 3/5 + 2 \cdot 1/5) - 15 = -9 < 0.$$

Так как прибыль превышает затраты, то введение в план пятого вида продукции выгодно.

г) Приращение ресурса III вида на величину $\Delta b_3^{в}=100$ находится в пределах устойчивости двойственных оценок. Следовательно,

$$(\Delta f_{max})_3 = \Delta b_3^{в} u_3^* = 100 \cdot 1/5 = 20,$$

в то время как затраты на приобретение 100 единиц ресурса III вида составят $\Delta c = \Delta b_3^{в} c_3 = 100 \cdot 0{,}5 = 50$. Поскольку величина дополнительной прибыли, вычисленная по (2.41), отрицательна ($\Delta p_3 = \Delta f_3 - \Delta c_3 = 20 - 50 = -30$), закупать ресурс III вида нецелесообразно.

2.2.5. Информационные технологии экономико-математического анализа решений оптимизационных задач

В параграфе 2.1.4. было рассмотрено применение программы **Simplex** для решения задач линейной оптимизации. В этом параграфе рассмотрим применение возможностей названной программы и Excel для послеоптимизационного анализа полученных решений на основе свойств двойственных оценок (из теории двойственности).

Информационные технологии Simplex в послеоптимизационном анализе

Применение информационных технологий рассмотрим на примере 2.17 производственного планирования с увеличенным объемом ресурса III вида на 20 единиц (т.е. в наличии имеется 320 единиц ресурса III вида).

Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$f = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \max.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \le 240, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 60, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 320, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Напомним, что правые части системы ограничений представляют собой объемы ресурсов I, II, III видов соответственно. Коэффициенты при неизвестных в функции — прибыль от единицы продукции, а коэффициенты при неизвестных в системе ограничений — нормы расхода ресурсов на единицу продукции каждого вида.

Протокол исходных данных:

pr 219	X1	X2	X3	X4		
max	4	2	3	5		
Y1	2	1	1	3	<=	240
Y2	1	0	2	1	<=	60
Y3	1	2	1	0	<=	320

Возможности программы **Simplex** позволяют выдать на печать решение не только прямой (исходной) задачи, но и двойственной, а также информацию об устойчивости коэффициентов критерия оптимальности и правых частей системы ограничений (ресурсов).

Ниже приведен протокол решения задачи, из которого видно, что задача решена за 4 итерации, максимальное значение критерия: $f_{max} = 484$. Оптимальное решение: $x_1 = 52$, $x_2 = 132$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$. Двойственные оценки ресурсов представлены в протоколе под значениями базисных неизвестных без обозначений. Обозначим их, как и ранее, $u_i (i = \overline{1,3})$ и запишем их значения: $u_1 = 1{,}6$, $u_2 = 0{,}6$, $u_3 = 0{,}2$. Коль двойственные оценки всех ресурсов больше нуля, то все ресурсы дефицитные. Это отмечено во втором столбце третьего блока протокола решения (двойственная задача). В этом же блоке в четвертой и пятой колонках записаны правые части системы ограничений (количество ресурсов, которыми располагает предприятие, и их расход). Разница между этими значениями, равная нулю, представлена в последней графе (ОСТ. — остаток ресурсов).

pr 219	ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ			ДАТА	06-09-1999	ВРЕМЯ	13:19:15
МАКСИМУМ		В БАЗИС		БАЗИС X:	3	ПЕРЕМЕН.:	5
ИТЕР.	4	ИЗ БАЗ.		БАЗИС Y:	0	ДОП.П.:	3
П.ОБРАЩ.	0	ОНБП	0	КРИТ.	484	ОГРАНИЧЕНИЙ:	3

БАЗИС	X.2	X.1	X.3
ПРЯМАЯ	132	52	4
ДВ.	1.6	.6	.2

pr 219 РЕШЕНИЕ НА МАКСИМУМ КРИТ. 484 ДАТА 06-09-1999
ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ВРЕМЯ 13:19:19

ПЕРЕМЕН.	ТИП	ЗНАЧ.	КРИТ./К-Т	ВЛИЯНИЕ	ИЗМ. КРИТ.
X.1	БАЗИС	52	4	4	0
X.2	БАЗИС	132	2	2	0
X.3	БАЗИС	4	3	3	0
X.4	СВОБОДН.	0	5	5.4	-.4
Y.1	СВОБОДН.	0	0	1.6	-1.6
Y.2	СВОБОДН.	0	0	.6	-.6
Y.3	СВОБОДН.	0	0	.2	-.2

pr 219 РЕШЕНИЕ НА МАКСИМУМ КРИТ. 484 ДАТА 06-09-1999
(Двойственная задача) ВРЕМЯ 13:19:20

СТРОКА	ТИП	ДВ. ОЦЕНКА	ПРЧ	РАСХ.	ОСТ.
U.1	ДЕФИЦИТ	1.6	240	240	0
U.2	ДЕФИЦИТ	.6	60	60	0
U.3	ДЕФИЦИТ	.2	320	320	0

pr 219 РЕШЕНИЕ НА МАКСИМУМ КРИТ. 484 ДАТА 06-09-1999
УСТОЙЧИВОСТЬ ПО КР. ВРЕМЯ 13:19:20

ПЕРЕМЕН.	ТИП	ЗНАЧ.	КРИТ./К-Т	НИЖ. ГР.	ВЕРХ. ГР.
X.1	БАЗ.	52	4	3.818182	4.5
X.2	БАЗ.	132	2	1.666667	2.5
X.3	БАЗ.	4	3	2	3.666667
X.4	СВОБОДН.	0	5	НЕТ	5.4

pr 219 РЕШЕНИЕ НА МАКСИМУМ КРИТ. 484 ДАТА 06-09-1999
УСТ. ПО ПРАВЫМ ЧАСТЯМ ВРЕМЯ 13:19:21

РЕСУРС	ТИП	ДВ.ОЦЕНКА	НАЛИЧИЕ	НИЖ ГР.	ВЕРХ.ГР.
Р.1	ДЕФИЦИТ	1.6	240	175	250
Р.2	ДЕФИЦИТ	.6	60	53.33333	320
Р.3	ДЕФИЦИТ	.2	320	300	450

В предпоследнем блоке приведены данные о нижней и верхней границах коэффициентов при неизвестных целевой функции, т.е. пределы их устойчивости. Это очень важная информация. Ведь в модель задачи заложена априорная прибыль от единицы продукции каждого вида. Однако с течением времени могут измениться цены на ресурсы или продукцию, себестоимость продукции и полученное оптимальное решение в результате влияния различных факторов на процесс производства может оказаться неоптимальным. Поэтому, зная нижнюю и верхнюю границы устойчивости критериальных коэффициентов (в нашем примере — прибыли), можно оценить устойчивость решения задачи. Если прибыль от единицы продукции каждого вида не выходит за границы устойчивости, то базис полученного решения остается неизменным. Если же хотя бы одно какое-то значение прибыли будет меньше нижней границы или выше верхней границы, то это говорит о том, что нужно решить задачу заново при уточненных параметрах прибыли.

Например, из протокола решения задачи мы видим, что коэффициент при неизвестной x_3 равен 3, нижняя граница этого параметра равна 2, а верхняя — 3,66. Это значит, что неизвестная x_3 будет базисной и будет принимать то же значение, равное 4, если прибыль будет находиться в пределах [2; 3,66] и, соответственно, прибыль от 4 единиц продукции третьего вида будет в пределах [8; 14,64].

Читателю предлагается найти пределы уменьшения и увеличения прибыли при производстве 132 единиц продукции второго вида ($x_2 = 132$), если критериальный коэффициент при неизвестной x_2 будет принимать значения своих нижней и верхней границ, т.е. 1,66 и 2,5 соответственно.

В последнем блоке протокола приведены данные о ресурсах (их дефицитности, двойственных оценках, наличии, нижней и верхней границах устойчивости двойственных оценок). Рассмотрим первый ресурс (Р.1). Он является самым дефицитным, так как его двойственная оценка является самой высокой ($u_1 = 1,6$). Двойственная оценка ресурса показывает, насколько возрастет (уменьшится) значение функции в оптимальном решении при изменении ресурса на 1 единицу. Если наличие ресурса будет не 240, а 239, то значение функции уменьшится на 1,6. При увеличении ресурса на 1 единицу значение функции в оптимальном решении возрастет на 1,6 единицы. Таким образом, если наличие ресурса находится в границах устойчивости двойственной оценки, то, не решая задачу заново с новым параметром наличия ресурса, можно определить величину изменения суммарной прибыли. Если наличие первого ресурса будет не 240, а 250, т.е. возрастет на Δb_i, то максимальное значение функции возрастет за счет увеличения этого ресурса на величину

$$(\Delta f_{\max})_1 = u_1 \Delta b_i = 1,6 \cdot 10 = 16,$$

т.е. будет не 484 единицы, а 500 единиц.

Следует иметь в виду, что если наличие, допустим, того же, первого ресурса находится в границах устойчивости двойственных оценок, то он будет дефицитным, если же значение наличия этого ресурса будет больше верхней границы, то он перестанет быть дефицитным, т.е. произойдет скачкообразный переход в качественно новое решение задачи, в котором дополнительная неизвестная y_1 будет больше нуля, а двойственная неизвестная $u_1 = 0$. Здесь прекрасно срабатывает философский закон перехода количества в качество.

Читателю предлагается определить изменение максимальной прибыли за счет уменьшения третьего ресурса на 20 единиц и сравнить полученный результат с максимальным значением функции в табл. 2.36.

Информационные технологии Excel в линейной оптимизации

Применение программного средства **Поиск решения** из Excel рассмотрим на примере 2.2.

Запишем математическую модель задачи:

$$Z = 240x_1 + 210x_2 + 180x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \le 3\,120, \\ 2x_1 + 8x_2 + 10x_3 \le 3\,000, \\ 6x_1 + 9x_2 + 4x_3 \le 3\,150, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Один из вариантов размещения исходных данных задачи на листе электронной таблицы Excel показан на рис. 2.10.

	A	B	C	D	E	F	G
1		ПЕРЕМЕННЫЕ					
2	Имя	прод1	прод2	прод3			
3	Перемен.	X1	X2	X3			
4	Значение						
5	Нижн. гр.	0	0	0			
6	Прибыль	240	210	180	=СУММПРОИЗВ(B$4:D$4;B6:D6)	макс	
7		ОГРАНИЧЕНИЯ					
8	Вид				левая часть	знак	объем рес.
9	Компл. изд.	4	6	8	=СУММПРОИЗВ(B$4:D$4;B9:D9)	<=	3 120
10	Сырье	2	8	10	=СУММПРОИЗВ(B$4:D$4;B10:D10)	<=	3 000
11	Материалы	6	9	4	=СУММПРОИЗВ(B$4:D$4;B11:D11)	<=	3 150

Рис. 2.10

Функция **СУММПРОИЗВ** в 6, 9, 10 и 11-й строках занесена с помощью кнопки — **Мастер функций** (процедура ввода функций и других параметров задачи подробно рассмотрена в параграфе 1.4.2).

Командой **Поиск решения** из меню **Сервис** откроем диалоговое окно **Поиск решения** и занесем в него необходимые данные: адрес ячейки, отведенной под значение целевой функции, направление оптимизации, адреса изменяемых значений переменных и ограничения задачи.

В диалоговом окне **Параметры поиска решения**, вызываемом командой **Параметры** диалогового окна **Поиск решения**, установим флажки **Линейная модель, Неотрицательные значения** и, щелкнув M1 по кнопке **Выполнить**, найдем оптимальное решение задачи (рис. 2.11).

	A	B	C	D	E	F	G
1		ПЕРЕМЕННЫЕ					
2	Имя	прод1	прод2	прод3			
3	Перемен.	X1	X2	X3			
4	Значение	397,5	0	191,25			
5	Нижн. гр.	0	0	0			
6	Прибыль	240	210	180	129 825	макс	
7		ОГРАНИЧЕНИЯ					
8	Вид				левая часть	знак	объем рес.
9	Компл. изд.	4	6	8	3 120	<=	3 120
10	Сырье	2	8	10	2 707,5	<=	3 000
11	Материалы	6	9	4	3 150	<=	3 150

Рис. 2.11

Результат решения:

$$x_1 = 397{,}5; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 191{,}25; \quad f_{max} = 129\ 825.$$

Ниже приведены три типа отчетов: по результатам, по устойчивости и по пределам (рис. 2.12–2.14).

В отчете по результатам приведены значения неизвестных и функции, а также данные о выполнении ограничений. В графе **Статус** указано, что первое и третье ограничения связанные, а второе не связанное, т.е. второй ресурс (сырье) не использован в объеме 292,5.

В отчете по устойчивости приведены границы устойчивости неизвестных задачи (допустимое увеличение и уменьшение коэффициентов целевой функции), а также границы устойчивости теневых цен (двойственных оценок). В графе **Нормированная стоимость** элемент во второй строке (−150) показывает, на сколько уменьшится значение функции, если в решении переменную x_2 увеличить на единицу. С другой стороны, при допустимом увеличении коэффициента функции при неизвестной x_2 на 150 единиц значение этой неизвестной не изменится, т.е. неизвестная x_2 будет равна нулю, а если выйти за пределы допустимого увеличения (коэффициент при x_2 увеличить более чем на 150 единиц), то неизвестная x_2 в оптимальном решении будет больше нуля.

В отчете по пределам показаны нижние и верхние пределы изменения неизвестных и значения функции (целевой результат) при этих изменениях. Так, если $x_1 = 0$, а x_2 и x_3 остаются без изменения, то $f = 180 \cdot 191{,}25 = 34\ 425$, при $x_3 = 0$ и неизменных x_1 и x_2 $f = 240 \cdot 397{,}5 = 95\ 400$, а при $x_2 = 0$ и неизменных x_1 и x_3 $f = 129\ 825$, т.е. максимальному значению функции.

Отчет по результатам

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$E$6	Прибыль	0	129 825

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$B$4	значение X1	0	397,5
$C$4	значение X2	0	0
$D$4	значение X3	0	191,25

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$E$9	компл. изд. левая часть	3120	$E$9<=$G$9	связанное	0
$E$10	сырье левая часть	2707,5	$E$10<=$G$10	не связан.	292,5
$E$11	материалы левая часть	3150	$E$11<=$G$11	связанное	0

Рис. 2.12

Отчет по устойчивости

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой коэффициент	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$B$4	значение X1	397,5	0	240	30	100
$C$4	значение X2	0	−150	210	150	1E+30
$D$4	значение X3	191,25	0	180	300	20

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая цена	Ограничение Правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$E$9	компл. изд. левая часть	3120	3,75	3120	180	1020
$E$10	сырье левая часть	2707,5	0	3000	1E+30	292,5
$E$11	материалы левая часть	3150	37,5	3150	1530	390

Рис. 2.13

Отчет по пределам

Целевое

Ячейка	Имя	Значение
$E$6	Прибыль	129 825

Изменяемое

Ячейка	Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$B$4	значение X1	397,5	0	34 425	397,5	129 825
$C$4	значение X2	0	0	129 825	0	129 825
$D$4	значение X3	191,25	0	95 400	191,25	129 825

Рис. 2.14

Упражнения

2.17. Имеются три вида ресурсов: I, II и III, которые используются для производства трех видов продукции: А, Б и В. Нормы расхода ресурсов на единицу продукции каждого вида приведены в табл. 2.37.

Таблица 2.37

Ресурс	Вид продукции		
	А	Б	В
I	1	2	0
II	2	1	0
III	0	1	1

В распоряжении предприятия 500 единиц ресурса I, 550 — ресурса II и 200 — ресурса III. Прибыль от реализации единицы продукции А — 3 млн руб., продукции Б — 4 млн руб., продукции В — 1 млн руб.

Необходимо:

а) определить оптимальный план производства продукции по критерию максимума прибыли;

б) составить и решить двойственную задачу;

в) оценить целесообразность закупки 250 единиц ресурса II вида по цене $c_2 = 0{,}7$ млн руб. за единицу;

г) оценить целесообразность введения в план четвертого вида продукции Г, нормы затрат ресурсов на единицу которого соответственно равны 3, 1 и 2, а прибыль от его реализации — 5 млн руб.;

д) определить изменение максимальной прибыли при изменении ресурсов: I — на +70, II — на +200, III — на −40 единиц. Оценить раздельное и суммарное влияния этих изменений.

2.18. По данным задачи 2.17 необходимо:

а) найти оптимальные решения исходной и двойственной задач; нормы расхода ресурсов на единицу продукции каждого вида приведены в табл. 2.38;

Таблица 2.38

Ресурс	Вид продукции		
	А	Б	В
I	2	1	0
II	0	2	1
III	0	1	0

б) определить интервалы устойчивости двойственных оценок;

в) определить изменение максимальной прибыли при изменении ресурса I на −150, ресурса III — на +70 единиц.

2.19. По данным задачи 2.17 необходимо:

а) найти оптимальные решения исходной и двойственной задач, если предприятие имеет в наличии 575 единиц ресурса I, 1000 — ресурса II и 150 — ресурса III;

б) сравнить значения двойственных переменных в решениях задач 2.17 и 2.19. Объяснить, почему значения переменных величин совпадают, а значения функций не равны между собой.

2.3. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

2.3.1. Постановка и математическая модель транспортной задачи

Одной из важнейших отраслей народнохозяйственного комплекса является транспортная. Пространственный фактор и фактор времени играют в работе транспорта существенную роль, поскольку транспорт с находящимися в нем грузами постоянно и быстро меняет свое месторасположение, что требует от управленческих органов, отвечающих за эффективность работы транспорта и выполнение договорных обязательств перед заказчиками, оперативных и правильных управленческих решений. Существенную помощь руководителям в выработке эффективных управленческих решений по работе сложной динамической транспортной системы могут оказать информационные технологии оптимальных решений.

Рассмотрим постановку и математическую модель одной из специфических задач линейной оптимизации, получившей название *транспортной задачи.*

Необходимо доставить от поставщиков $i(i = \overline{1,m})$ некоторый однородный товар (груз) в объеме a_i единиц потребителям $j(j = \overline{1,n})$ с минимальными транспортными издержками. (Здесь m и n — конечные числа.) Потребность в данном товаре каждого j-го потребителя известна и составляет b_j единиц. Известны также c_{ij} — величины стоимости перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю.

Транспортная задача, для которой выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{2.42}$$

называется *закрытой*, в противном случае — *открытой*.

Обозначим количество единиц поставляемого груза от i-го поставщика к j-му потребителю через x_{ij} и занесем все данные в таблицу транспортной задачи (табл. 2.39),

Таблица 2.39

Поставщики	Потребители						Запасы поставщиков
	1	2	...	j	...	n	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	a_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Спрос потребителей	b_i	b_2	...	b_j	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ / $\sum_{j=1}^{n} b_j$

Учитывая, что решение открытой транспортной задачи сводится к решению закрытой, сформулируем математическую модель закрытой задачи.

Математическое отражение цели задачи — минимизация суммарных затрат на перевозку груза — имеет вид

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} +$$
$$+ \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min. \qquad (2.43)$$

Ограничения задачи:
груз от каждого поставщика должен быть вывезен полностью в силу условия (2.42) —

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (2.44)$$

спрос каждого потребителя в продукции должен быть удовлетворен —

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}; \qquad (2.45)$$

объемы перевозок должны быть неотрицательными —

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \qquad (2.46)$$

Рассмотрим теорему о разрешимости транспортной задачи.

Теорема. *Транспортная задача имеет решение, если суммарный запас груза в пунктах отправления равен суммарному спросу в пунктах назначения, т.е. если выполняется равенство* (*2.42*).

При выполнении условия $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = K$ объемы перевозок, найденные по формуле

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{K} \geq 0,\ \ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}, \qquad (2.47)$$

образуют допустимое решение задачи (2.43)–(2.46). Действительно,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{K} = \frac{a_i}{K}\sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{K} \cdot K = a_i,\ \ i = \overline{1,m},$$

т.е. ограничения (2.44) по поставщикам выполняются.

Аналогично, просуммировав выражение (2.47) по индексу i, имеем:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{K} = \frac{b_j}{K} \sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j}{K} \cdot K = b_j, \quad j = \overline{1,n},$$

т.е. ограничения (2.45) по потребителям тоже выполняются.

2.3.2. Транспортная задача с нарушенным балансом

Для решения открытой транспортной задачи сведем ее к закрытой:

а) если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. суммарный запас груза поставщиков больше суммарного спроса потребителей, то в задачу вводится фиктивный $(n+1)$-й потребитель с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и стоимостью перевозок $c_{i,n+1} = 0$, $i = \overline{1,m}$;

б) если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводится фиктивный $(m+1)$-й поставщик с запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и стоимостью перевозок $c_{m+1,j} = 0$, $j = \overline{1,n}$.

Очевидно, что после добавления фиктивного потребителя или фиктивного поставщика транспортная задача будет закрытой, а следовательно, и разрешимой.

Модели транспортной задачи с введенным фиктивным поставщиком и фиктивным потребителем приведены в табл. 2.40 и 2.41 соответственно.

Таблица 2.40

Поставщики	Потребители				Запасы
	1	2	...	n	
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
$m+1$	0	0	...	0	a_{m+1}
Спрос	b_1	b_2	...	b_m	

Таблица 2.41

Поставщики	Потребители					Запасы
	1	2	...	n	$n+1$	
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	0	a_1
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	0	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	0	a_m
Спрос	b_1	b_2	...	b_n	b_{n+1}	

2.3.3. Методы построения исходного опорного решения

Прежде чем исследовать методы нахождения опорного решения транспортной задачи, рассмотрим теорему о ранге матрицы из коэффициентов при неизвестных системы ее ограничений.

Теорема. *Ранг матрицы из коэффициентов при неизвестных системы ограничений транспортной задачи равен $m + n - 1$, где m и n — количество поставщиков и потребителей соответственно.*

Запишем систему ограничений как стандартную задачу линейной оптимизации, т.е. каждую неизвестную запишем в своем столбце:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ \qquad x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m, \end{cases} \text{Ограничения по поставщикам}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} \ldots + x_{2n} \ldots + x_{mn} = b_n \end{cases} \text{Ограничения по потребителям} \qquad (2.48)$$

Матрица A из коэффициентов при неизвестных системы ограничений имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} 11\ldots1 & 00\ldots0 & 00\ldots0 \\ 00\ldots0 & 11\ldots1 & 00\ldots0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 00\ldots0 & 00\ldots0 & 11\ldots1 \\ 10\ldots0 & 10\ldots0 & 10\ldots0 \\ 01\ldots0 & 01\ldots0 & 01\ldots0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 00\ldots1 & 00\ldots1 & 00\ldots1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{Коэффициенты из } m \text{ ограничений по поставщикам} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{Коэффициенты из } n \text{ ограничений по потребителям} \end{array}$$

Нетрудно видеть, что любую строку матрицы можно выразить в виде линейной комбинации остальных ее строк. Сложив коэффициенты первых m строк матрицы A, а потом коэффициенты последующих $n-1$ строк и вычтя из первой суммы вторую, получим элементы последней строки матрицы. Отсюда заключаем, что ранг матрицы A не будет изменяться при вычеркивании одной какой-нибудь ее строки.

Вычеркнем последнюю строку матрицы A и вычислим минор M_{m+n-1}, образованный из $(m+n-1)$ столбцов коэффициентов при следующих неизвестных: $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn}, x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1,n-1}$.

$$M_{m+n-1}=\begin{vmatrix} 1\,0\ldots0 & 1\,1\ldots1 \\ 0\,1\ldots0 & 0\,0\ldots0 \\ \ldots & \ldots \\ 00\ldots1 & 00\ldots0 \\ 00\ldots0 & 10\ldots0 \\ 00\ldots0 & 01\ldots0 \\ \ldots & \ldots \\ 00\ldots0 & 00\ldots1 \end{vmatrix}=1.$$

Так как минор не равен нулю, то количество линейно независимых строк в матрице A будет $m+n-1$, т.е. ранг матрицы A равен $m+n-1$.

Из рассмотренной теоремы следует, что опорное решение транспортной задачи должно содержать $m+n-1$ базисных неизвестных и $mn-(m+n-1)$ небазисных, равных нулю неизвестных.

Циклом, или замкнутым контуром, называется последовательность клеток (i, j) табл. 2.39 транспортной задачи, в которой каждые две рядом стоящие клетки находятся в одной строке или одном столбце, при этом первая и последняя клетки совпадают.

Например, $\mu=[(1,2),(1,4),(3,4),(3,2),(1,2)]$ есть цикл (он изображен в табл. 2.42).

Если каждую пару соседних клеток цикла в таблице транспортной задачи соединять линиями, то в нашем примере получится прямоугольный цикл.

Циклы могут быть самой разнообразной конфигурации, однако количество вершин в них всегда четно, и повороты линий цикла производятся только под прямым углом.

Таблица 2.42

i \ j	1	2	3	4
1				
2				
3				

Решение транспортной задачи будет *ацикличным*, если в таблице с этим решением невозможно построить ни одного цикла, в вершинах которого были бы все занятые клетки, или если для любой свободной клетки таблицы можно построить только один цикл, содержащий эту свободную клетку, а остальные вершины будут в занятых клетках.

С учетом сказанного, опорное решение транспортной задачи должно быть ацикличным.

Если в опорном решении транспортной задачи число отличных от нуля неизвестных равно $m + n - 1$, то решение называется *невырожденным*, а если их меньше, то *вырожденным*.

2.3.3.1. Метод минимальной стоимости

В таблице из всех значений стоимостей выбираем наименьшее и в клетку (i, j) с наименьшей стоимостью записываем меньшее из чисел a_i и b_j. Исключаем из рассмотрения строку i, если запас a_i вывезен полностью; или столбец j, если спрос b_j удовлетворен полностью; или и строку и столбец, если $a_i = b_j$. Среди остальных стоимостей снова выбираем наименьшую и заполняем соответствующую клетку таблицы. Таким же образом продолжаем заполнять клетки таблицы, пока не будет найдено опорное решение.

Рассмотрим метод на примере, исходные данные которого представлены в табл. 2.43.

Наименьшая стоимость в табл. 2.43, равная единице, находится в клетках (1, 4) и (2, 2). В клетку (1, 4) заносим объем перевозки, равный 600 единицам, и исключаем из рассмотрения 1-ю строку и 4-й столбец. Такой же объем груза помещаем в клетку (2, 2), так как $b_2 = 600 < a_2 = 800$.

Из оставшихся значений стоимости наименьшее, равное 2 единицам, находится в клетке (2,1). В эту клетку заносим объем перевозки — 200 единиц (оставшийся объем груза у 2-го поставщика). Далее наименьшая стоимость, равная 3 единицам, находится в клетке (3,1). Поставим в эту клетку 200 единиц груза, так как 1-му потребителю требуется 400 единиц, а завезено ему от 2-го поставщика только 200 единиц. Оставшиеся 800 единиц груза у 3-го поставщика занесем в клетку (3,3). Этим завершено распределение груза поставщиков между потребителями.

Таблица 2.43

Поставщики	Потребители				Запас
	1	2	3	4	
1	4	3	2 0	1 600	600
2	2 200	1 600	7	9	800
3	3 200	6	8 800	4	1000
Спрос	400	600	800	600	2400 / 2400

Полученное в табл. 2.43 решение неопорное, так как заполнено 5 клеток, а требуется $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$. Занесем в клетку (1,3) объем перевозки, равный нулю. В результате получено ацикличное, вырожденное опорное решение. Заметим, что нулевой объем перевозки можно было разместить в любой свободной клетке таблицы, за исключением клеток (2,2) и (3,2). Если нуль поместить в одну из этих клеток, то клетка с нулем с другими заполненными клетками образует цикл, что недопустимо.

Суммарные затраты на перевозку грузов равны:

$$Z = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 600 + 2 \cdot 200 + 1 \cdot 600 + 3 \cdot 200 + 8 \cdot 800 = 8600.$$

2.3.3.2. Метод Фогеля

Применим метод Фогеля к ранее рассмотренному примеру. Исходные данные примера занесем в табл. 2.44.

Суть метода Фогеля заключается в последовательном (этапном) заполнении клеток таблицы. На первом этапе находим разности между наименьшими стоимостями перевозки единицы груза в каждой строке и каждом столбце таблицы транспортной задачи. Эти разности записываем в соответствующие строку и столбец (этап 1). Среди всех разностей выбираем наибольшую. Такой разностью является $c_{23} - c_{13} = 7 - 2 = 5$ в третьем столбце. В клетку (1, 3) с наименьшей стоимостью $c_{13} = 2$ заносим объем перевозки $x_{13} = \min(a_1; b_3) = \min(600; 800) = 600$. Так как груз от 1-го поставщика вывезен полностью, то эта строка на втором этапе исключается из рассмотрения. Для оставшихся строк и столбцов снова находим разности между наименьшими тарифами и заносим их в строку и столбец второго этапа (табл. 2.44). Наибольшие разности, равные 5 единицам, записаны во втором и четвертом столбцах.

Таблица 2.44

Поставщики	Потребители				Запас	Этапы		
	1	2	3	4		1	2	3
1	4	3	2 600	1	600	1	–	–
2	2 200	1 600	7	9	800	1	1	5
3	3 200	6	8 200	4 600	1000	1	1	5
Спрос	400	600	800	600	2400 2400			
Этапы 1	1	2	5	3				
Этапы 2	1	5	1	5				
Этапы 3	1	–	1	–				

Находим объемы перевозок $x_{22} = \min(a_2; b_2) = \min(800; 600) = 600$ и $x_{34} = \min(a_3; b_4) = \min(1000; 600) = 600$.

На третьем этапе исключаем из рассмотрения второй и четвертый столбцы, так как спрос 2-го и 4-го потребителей удовлетворен, и снова находим разности между наименьшими тарифами. Эти разности занесены в строку и столбец третьего этапа. Наибольшая разность, равная 5, записана во второй и третьей строках.

Находим $x_{21} = \min(a_1 - x_{22}; b_1) = \min(800 - 600; 400) = 200$ и $x_{31} = \min(a_3 - x_{34}; b_1 - x_{21}) = \min(1000 - 600; 400 - 200) = 200$. Исключив из дальнейшего рассмотрения первый столбец, видим, что не вывезено 200 единиц груза от 3-го поставщика, которые требуются 3-му потребителю. Занеся в клетку (3,3) объем перевозки $x_{33} = 200$, получим опорное решение задачи, для которого $Z = 6\,800$.

Отметим, что опорное решение, найденное по методу Фогеля, часто совпадает с оптимальным решением или близко к нему.

2.3.4. Метод потенциалов нахождения оптимального решения

Рассмотрим теорему об оптимальности решения транспортной задачи (2.43)–(2.46).

Теорема. *Решение транспортной задачи будет оптимальным, если найдутся такие числа* $u_i^*(i=\overline{1,m})$ *и* $v_j^*(j=\overline{1,n})$*, называемые соответственно потенциалами поставщиков и потребителей, которые будут удовлетворять условиям:*

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij} \text{ для } x_{ij}^* > 0;$$

$$u_i^* + v_j^* \le c_{ij} \text{ для } x_{ij}^* = 0,$$

$$i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

По общему правилу построения двойственных задач запишем двойственную задачу к задаче (2.43)–(2.46), для чего введем обозначения двойственных оценок:

$u_i(i=\overline{1,m})$ — оценка единицы запаса (потенциал поставщика),

$v_j(j=\overline{1,n})$ — оценка единицы спроса (потенциал потребителя).

Тогда двойственная задача [см. ограничения (2.48)] запишется так:

$$F=\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to \max \qquad (2.49)$$

при ограничениях

$$u_i + v_j \le c_{ij}, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}; \qquad (2.50)$$

$$u_i(i=\overline{1,m}) \text{ и } v_j(j=\overline{1,n}) \text{ — произвольного знака.} \qquad (2.51)$$

Ранее было доказано, что задача (2.43)–(2.46) имеет решение, следовательно, по первой теореме двойственности, и двойственная к ней задача также имеет решение, при этом

$$Z_{\min} = F_{\max}.$$

На основании второй теоремы двойственности, устанавливающей взаимосвязь между значениями неизвестных и выполнением ограничений в оптимальных решениях взаимно двойственных задач, заключаем, что ограничения двойственной задачи из системы ограничений (2.50) выполняются как строгие равенства, если им в исходной задаче соответствуют положительные неизвестные x_{ij}; а ограничения, соответствующие неизвестным $x_{ij}=0$, выполняются как неравенства. Таким образом,

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij} \text{ для всех } x_{ij}^* > 0, \qquad (2.52)$$

$$u_i^* + v_j^* \le c_{ij} \text{ для всех } x_{ij} = 0. \qquad (2.53)$$

Теорема доказана.

Алгоритм решения транспортной задачи на основе метода потенциалов

1. Находится первый опорный план по одному из рассмотренных методов.
2. Проверяется найденный опорный план на оптимальность, для чего:
   2.1. Находятся потенциалы поставщиков u_i $(i = \overline{1,m})$ и потребителей v_j $(j = \overline{1,n})$ по формуле (2.52).

Примечание. Так как в опорном плане заполнено $m+n-1$ клеток таблицы транспортной задачи, то для нахождения потенциалов по данному плану можно составить систему из $m+n-1$ линейно независимых уравнений с $m+n$ неизвестными. Такая система является неопределенной, и поэтому одной неизвестной (обычно u_1) придают нулевое значение, а остальные находятся однозначно по формуле (2.52).

   2.2. Проверяется, выполнено ли условие (2.53) или, что то же самое, условие $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$, где s_{ij} — характеристика каждой свободной клетки таблицы. Если для всех свободных клеток таблицы условие (2.53) выполнено, т.е. $s_{ij} \geq 0$, то опорный план транспортной задачи является оптимальным (решение задачи завершено). Если же для некоторых свободных клеток таблицы $s_{ij} < 0$, то клетка с наименьшим значением s_{ij} является перспективной, и выполняется следующий пункт алгоритма.
   2.3. К перспективной клетке строится цикл, расставляются знаки по циклу, при этом в перспективную клетку ставится плюс, а остальные знаки в вершинах цикла чередуются, и определяется величина перераспределения груза по формуле $Q = \min x_{ij}$, где x_{ij} — объем перевозки груза, записанный в клетках (вершинах) цикла таблицы, отмеченных знаком минус.
   2.4. Осуществляется перераспределение груза по циклу на величину Q. В результате выполнения этого пункта будет получен новый опорный план, который проверяется на оптимальность, т.е. производится переход к пункту 2.1 алгоритма.

Пример 2.18. Три завода производят однородную продукцию в количестве 650, 850 и 700 единиц соответственно. Эта продукция требуется четырем потребителям в количествах 500, 800, 300 и 600 единиц каждому. Затраты на перевозку единицы продукции (тыс. руб.) от каждого завода к каждому потребителю заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} 30 & 50 & 62 & 10 \\ 40 & 50 & 80 & 20 \\ 50 & 10 & 30 & 30 \end{pmatrix}$$

Требуется спланировать перевозку груза так, чтобы суммарные транспортные затраты были минимальными.

Занесем данные транспортной задачи в табл. 2.45 и найдем опорный план перевозок продукции методом минимальной стоимости. Найденный план является невырожденным, так как в таблице заполнено ровно $m+n-1 = 3+4-1 = 6$ клеток. Затраты на перевозку продукции для данного плана равны:

$$Z = 1\,500 + 6\,000 + 18\,000 + 5\,000 + 24\,000 + 7\,000 = 61\,500 \text{ тыс. руб.}$$

Применяя далее алгоритм решения задачи, находим потенциалы поставщиков и потребителей. Полагая $u_1 = 0$, определяем, что $v_1 = 30$, так как $u_1 + v_1 = 30$, и из соотношения $u_1 + v_4 = 10$ находим $v_4 = 10$. Аналогично в табл. 2.45 найдены все другие потенциалы.

Таблица 2.45

Поставщики	Потребители				Объем производства	u_i
	1	2	3	4		
1	30 50	50	62	10 600	650	0
2	40 450	50 + 100	80 − 300	20	850	10
3	50	10 700 −	$\boxed{30}$ +	30	700	−30
Спрос	500	800	300	600	2200 / 2200	
V_j	30	40	70	10		

Найдем характеристики свободных клеток таблицы транспортной задачи по формуле

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j).$$

$$s_{12} = 50 - (0 + 40) = 10, \qquad s_{13} = 62 - (0 + 70) = -8,$$
$$s_{24} = 20 - (10 + 10) = 0, \qquad s_{31} = 50 - (30 - 30) = 50,$$
$$s_{33} = 30 - (-30 + 70) = -10, \qquad s_{34} = 30 - (-30 + 10) = 50.$$

Так как $s_{13} < 0$ и $s_{33} < 0$, то план в табл. 2.45 неоптимальный, и перспективной клеткой в ней будет клетка (3, 3) с наименьшей характеристикой $s_{33} = -10$.

Строим цикл к перспективной клетке (табл. 2.45) и находим величину перераспределения груза $Q = \min(300, 700) = 300$.

Осуществляем перераспределение груза по циклу, добавляя величину $Q = 300$ в клетках со знаком «+» и вычитая — в клетках со знаком «−». В результате получаем новый опорный план (табл. 2.46)

Применяя правило пункта 2 алгоритма к полученному плану транспортной задачи (табл. 2.46), убеждаемся, что он оптимальный, так как для всех свободных клеток таблицы $s_{ij} \geq 0$. Суммарные минимальные затраты на перевозку продукции:

$$Z_{\min} = 61\,500 - 10 \cdot 300 = 58\,500 \text{ тыс. руб.}$$

Таблица 2.46

Поставщики	Потребители				Объем производства	u_i
	1	2	3	4		
1	30 / 50	50	62	10 / 600	650	0
2	40 / 450	50 / 400	80	20	850	10
3	50	10 / 400	30 / 300	30	700	−30
Спрос	500	800	300	600	2200 / 2200	
V_j	30	40	60	10		

Эти минимальные затраты достигаются при следующих объемах перевозок:

$$x_{11} = 50,\quad x_{14} = 600,\ x_{21} = 450,$$
$$x_{22} = 400,\ x_{32} = 400,\ x_{33} = 300.$$

Остальные неизвестные равны нулю.

Читателю предлагается решить методом потенциалов задачу, опорное решение которой представлено в табл. 2.43.

2.3.5. Дополнительные условия в транспортных задачах

Часто при решении транспортных задач возникает необходимость введения дополнительных ограничений (условий). Ниже рассмотрим наиболее часто встречающиеся условия, используемые при решении задач транспортного типа.

2.3.5.1. Запрет перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю

Запрет перевозок при решении транспортной задачи достигается за счет введения стоимости перевозки единицы груза c_{ij} намного большей, чем стоимость остальных перевозок. Например, если по каким-то соображениям необходимо запретить перевозку 50 единиц груза от 1-го поставщика к 1-му потребителю (табл. 2.46), то в клетку (1,1) исходной транспортной задачи следует записать вместо стоимости перевозки единицы груза, равной 30, большое число M, допустим $M = 500$, которое намного превышает наибольшую стоимость перевозки груза (в данной задаче это $c_{23} = 80$). Так как задача решается на минимум функции, а стоимость $c_{11} = 500$ довольно высокая, то в оптимальном плане объем перевозки x_{11} будет равен нулю.

Если же при решении транспортной задачи все-таки окажется, что запрещенная перевозка отлична от нуля при достаточно высокой стоимости перевозки груза в данной клетке ($x_{ij} \neq 0$), то это значит, что спрос j-го потребителя невозможно удовлетворить без i-го поставщика.

2.3.5.2. Фиксированная поставка

Пусть объем поставки груза от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть строго определенным ($x_{ij} = d_{ij}$). Эту поставку следует включить в оптимальный план даже в том случае, если она невыгодна. Поэтому уменьшаются мощности i-го поставщика (a_i) и спрос j-го потребителя (b_j) на величину d_{ij}, а также вводится запрет на поставку груза по маршруту (i, j) и далее решается полученная задача. В построенное оптимальное решение со значением функции $Z_{\min}$ подставляется фиксированная поставка $x_{ij} = d_{ij}$ и с учетом ее находится значение функции

$$Z = Z_{\min} + c_{ij} d_{ij}.$$

2.3.5.3. Нижние границы на поставки

Если по маршруту (i, j) необходимо перевезти не менее d_{ij} единиц груза ($x_{ij} \geq d_{ij}$), то, как и при фиксированной поставке, уменьшаются на величину d_{ij} мощность соответствующего поставщика и спрос потребителя. Однако в этом случае запрет на поставку груза по маршруту (i, j) не вводится.

2.3.5.4. Верхние границы на поставки

Если в транспортной задаче объем поставки груза от i-го поставщика к j-му потребителю не должен превышать d_{ij} единиц, то при решении j-й столбец матрицы перевозок разбивается на два: j' и j''. Аналогично спрос j-го потребителя разбивается тоже на две части: $b_{j'} = d$ и $b_{j''} = b_j - d$. Тарифы в обоих столбцах j' и j'' одинаковые, за исключением тарифа $c_{ij''} = M$, где M намного превышает все остальные стоимости перевозок в рассматриваемой задаче. Большая стоимость перевозки $c_{ij''} = M$ вводится для запрета перевозки от i-го поставщика к j''-му потребителю.

Измененная задача позволит получить решение, удовлетворяющее поставленному условию.

2.3.5.5. Максимизация функции в моделях транспортного типа

Многие экономические задачи (например, оптимальное закрепление за станками операций по обработке деталей, распределение сельскохозяйственных культур за посевными площадями участков земли) также сводятся к решению транспортной задачи. Правда, как правило, в этих случаях необходимо находить максимум функции (количество обработанных деталей, суммарный сбор зерна должны быть как можно большими).

Для решения задач транспортного типа на максимум необходимо коэффициенты c_{ij} при неизвестных в целевой функции взять со знаком минус, т.е. необходимо перейти к нахождению минимума измененной функции.

2.3.6. Экономический смысл двойственных оценок

В процессе оптимизации плана перевозок грузов от поставщиков к потребителям определяются не только объемы поставок, минимизирующие общую сумму транспортных расходов, но и показатели, характеризующие влияние изменений мощностей поставщиков, спроса потребителей или величин поставок груза на значение критерия оптимальности Z.

Величины $u_i (i = \overline{1,m})$ и $v_j (j = \overline{1,n})$ являются двойственными оценками единицы запаса груза i-го поставщика и единицы спроса j-го потребителя соответственно (см. теорему параграфа 2.3.4.), а s_{ij} — оценкой единицы поставки груза от i-го поставщика j-му потребителю (см. пункт 2.2 алгоритма решения транспортной задачи на основе методов потенциалов в параграфе 2.3.4).

Величина s_{ij} показывает, на сколько изменятся суммарные издержки в транспортной задаче при изменении на единицу объема поставки груза от i-го поставщика к j-му потребителю и, разумеется, при изменении на единицу поставок в вершинах цикла, построенного к клетке (i, j) (все вершины цикла находятся в заполненных клетках, кроме клетки (i, j)).

2.3.7. Информационные технологии оптимизации перевозок

Применение информационных технологий пакета QSB (Quantitative System for Business)

Информационная технология нахождения оптимального решения задач транспортного типа состоит в следующем:

— осуществляется качественная постановка задачи;

— формируется математическая модель задачи;

— загружается пакет QSB;

— в основном меню QSB подводится прямоугольный курсор на имя **Транспортная задача**, нажимается клавиша <Enter> (ввод) — и на экране появляется меню транспортной задачи (режим обработки).

Рассмотрим информационную технологию оптимизации перевозок грузов от поставщиков к потребителям на примере решения задачи из параграфа 2.3.4. Условие примера поместим в табл. 2.47.

Подведем курсор на вторую строку: **Ввод новой задачи** и нажмем клавишу <Enter>. На дисплее — запросы о данных задачи, на которые мы последовательно даем ответы (направление оптимизации (max или min), количество поставщиков и потребителей, их запасы и потребности, стоимости перевозки единицы груза c_{ij}). После ввода исходных данных на экране появятся данные о режиме.

Таблица 2.47

Поставщики	Потребители				Объем производства
	1	2	3	4	
1	30	50	62	10	650
2	40	50	80	20	850
3	50	10	30	30	700
Спрос потребителя	500	800	300	600	2200 / 2200

Режим. Краткое описание режима

1. Описание возможностей ТЛП (транспортной задачи линейного программирования)
2. Ввод новой задачи
3. Чтение файла задачи с диска
4. Вывод задачи на дисплей/печать
5. Решение задачи
6. Запись задачи на диск
7. Корректировка задачи
8. Вывод решения на дисплей/печать
9. Возврат в основное меню
0. Выход в операционную систему

Подведем прямоугольный курсор на шестую строку **Запись задачи на диск** и нажмем клавишу <Enter>. Исходные данные записываются на диск и осуществляется переход к меню решения транспортной задачи **Режим**. Установим прямоугольный курсор на пятую строку: **Решение задачи** и нажмем клавишу <Enter>; решается задача и снова осуществляется переход к меню. Выведем оптимальное решение на дисплей или печать и осуществим его анализ.

При необходимости корректировки исходных данных последовательно осуществим чтение файла задачи с диска (третья строка меню) и корректировку задачи (седьмая строка). После корректировки снова установим курсор на пятую строку: **Решение задачи** и восьмую: **Вывод решения на дисплей / печать.**

Размещение исходных данных в ЭВМ показано ниже. При использовании программы ТЛП после занесения каждого значения (числа) исходных данных нажимается клавиша <Enter>.

Данные вашей модели **pr 33** (Запасы и потребности)

Поставщики:

1:	650	2:	850	3:	700

Потребители:

1:	500	2:	800	3:	300	4:	600

Данные вашей модели **pr 33** (Коэффициенты c_{ij})

От	До							
1	1:	30.00	2:	50.00	3:	62.00	4:	10.00
2	1:	40.00	2:	50.00	3:	80.00	4:	20.00
3	1:	50.00	2:	10.00	3:	30.00	4:	30.00

Результаты решения задачи выводятся на печать в следующем виде:

Результаты решения pr 33c_{ij} : 1							
От	До	Загрузка	Уд. изд.	От	До	Загрузка	Уд. изд.
1	1	50.0	30.00	2	3	0.0	80.00
1	2	0.0	50.00	2	4	0.0	20.00
1	3	0.0	62.00	3	1	0.0	50.00
1	4	600.0	10.00	3	2	400.0	10.00
2	1	450.0	40.00	3	3	300.0	30.00
2	2	400.0	50.00	3	4	0.0	30.00
M I N значение КР. = 58 500 (нееденичный план). Всего итераций = 3							

Сравнивая оптимальное решение задачи, полученное с помощью ПЭВМ, и данные табл. 2.46, видим, что они совпадают, т.е. задача решена верно.

Применение информационных технологий Excel

Применение информационных технологий Excel для решения транспортной задачи рассмотрим на примере, представленном в табл. 2.43, с измененным объемом спроса первого потребителя (b_1 = 900).

С учетом измененного спроса ($\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 2\,400 < \sum_{j=1}^{n} b_j = 2\,900$) вводим фиктивного четвертого поставщика с объемом запаса $a_4 = 500$ и стоимостями перевозки

Таблица 2.48

Поставщики	Потребители				Запас
	1	2	3	4	
1	4	3	2	1	600
2	2	1	7	9	800
3	3	6	8	4	1000
4	0	0	0	0	500
Спрос	900	600	800	600	2900 / 2900

единицы груза $c_{4j} = 0$, $j = \overline{1,4}$. Данные транспортной задачи представлены в табл. 2.48.

Чтобы решить задачу с помощью программного продукта Excel, командой **Поиск решения** введем исходные данные в ПЭВМ в виде, показанном на рис. 2.15.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Поставщики	ПОТРЕБИТЕЛИ					
2		1	2	3	4		
3	1	4	3	2	1		
4	2	2	1	7	9		
5	3	3	6	8	4		
6	4	0	0	0	0		
7	Поставщики	Объемы перевозок потребителям					
8		1	2	3	4		Запас
9	1					=СУММ(B9 E9)	600
10	2					=СУММ(B10.E10)	800
11	3					=СУММ(B11 E11)	1000
12	4					=СУММ(B12 E12)	500
13		=СУММ(B9 B12)	=СУММ(C9 C12)	=СУММ(D9 D12)	=СУММ(E9 E12)	=СУММПРОИЗВ(B3:E6;B9:E12)	
14	Спрос	900	600	800	600		2900

Рис. 2.15

В массив B3:E6 введены значения стоимости перевозок единицы груза. В ячейки B14:E14 введены величины спроса потребителей, в G9:G12 — запасов поставщиков, а в ячейку G14 — суммарного запаса, равного суммарному спросу и составляющего 2900 единиц. Массив B9:E12 отведен под значения неизвестных x_{ij} (объемы перевозок). Функция =СУММПРОИЗВ (B3:E6; B9:E12) введена в ячейку F13. Функция отражает сумму произведений стоимости c_{ij} на объемы перевозок x_{ij} ($i = \overline{1,4}$; $j = \overline{1,4}$). В массивы F9:F12 и B13:E13 введены левые части ограничений задачи $\sum_{j=1}^{4} x_{ij}$ ($i = \overline{1,4}$) и $\sum_{i=1}^{4} x_{ij}$ ($j = \overline{1,4}$) соответственно. Эти суммы и целевая функция введены с помощью **Мастера функций** (вопросы ввода функций рассмотрены в параграфе 1.3.4).

После ввода данных вызывается диалоговое окно **Поиск решения** командой **Поиск решения** из меню **Сервис**. В этом диалоговом окне заносится номер ячейки с целевой функцией (F13), номера изменяемых ячеек (B9:E12), устанавливается направление оптимизации, а также вводятся ограничения $F$9:$F$12 = $G$9:$G$12, $B$13:$E$13= $B$14:$E$14 и $B$9:$E$12 ≥ 0 (рис. 2.16).

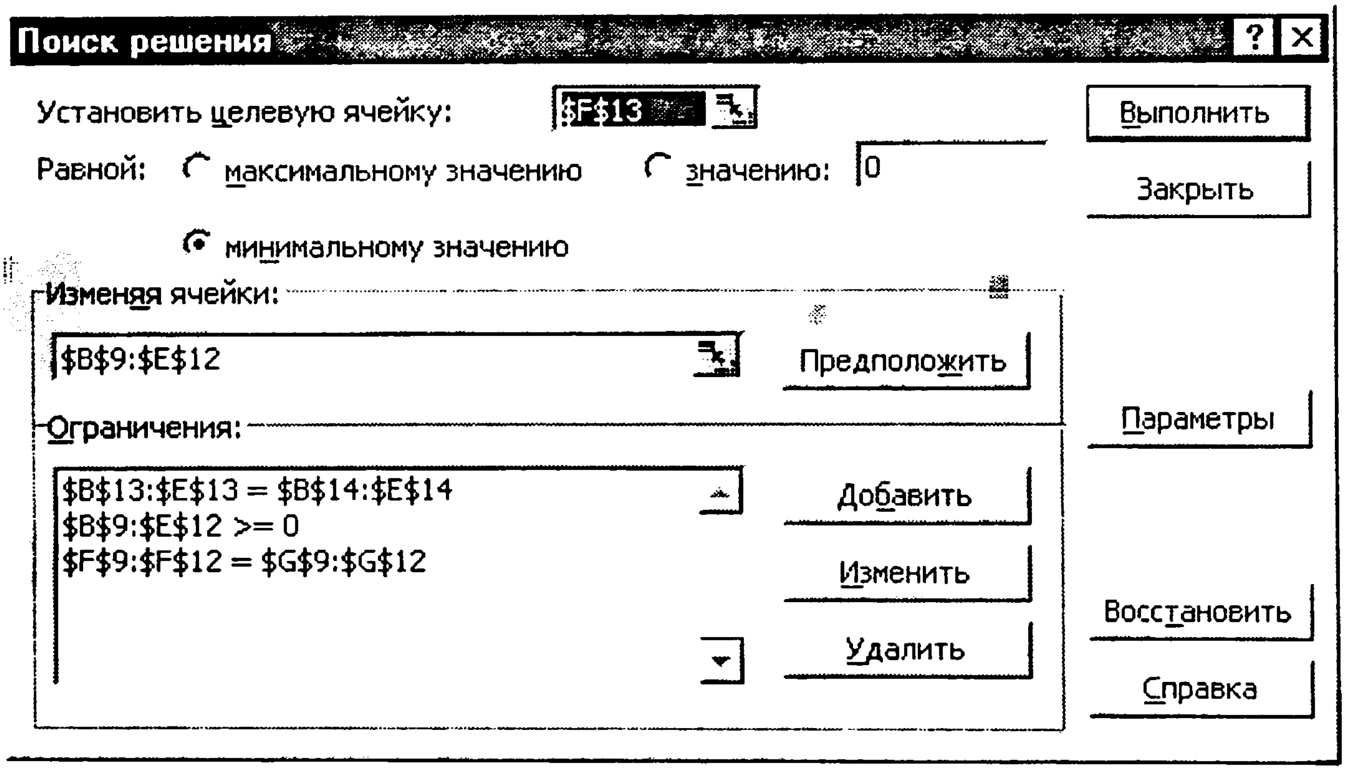


Рис. 2.16

В диалоговом окне **Параметры поиска решения** (рис. 2.17) установим флажок **Линейная модель,** и, щелкнув по кнопке **ОК**, возвратимся в диалоговое окно **Поиск решения**. Щелкнув **М1** по кнопке **Выполнить** в этом окне, получим на экране результат решения задачи (рис. 2.18).

Таким образом,

$$f_{\min} = 5200,\ x_{13} = 300,\ x_{14} = 300,$$
$$x_{21} = 200,\ x_{22} = 600,$$
$$x_{31} = 700,\ x_{34} = 300,\ x_{43} = 500.$$

Остальные объемы перевозок груза равны нулю.

При необходимости можно вывести на экран (печать) отчеты: по результатам, по устойчивости решения и по пределам, которые содержат полезную информацию для целей экономико-математического анализа полученного решения.

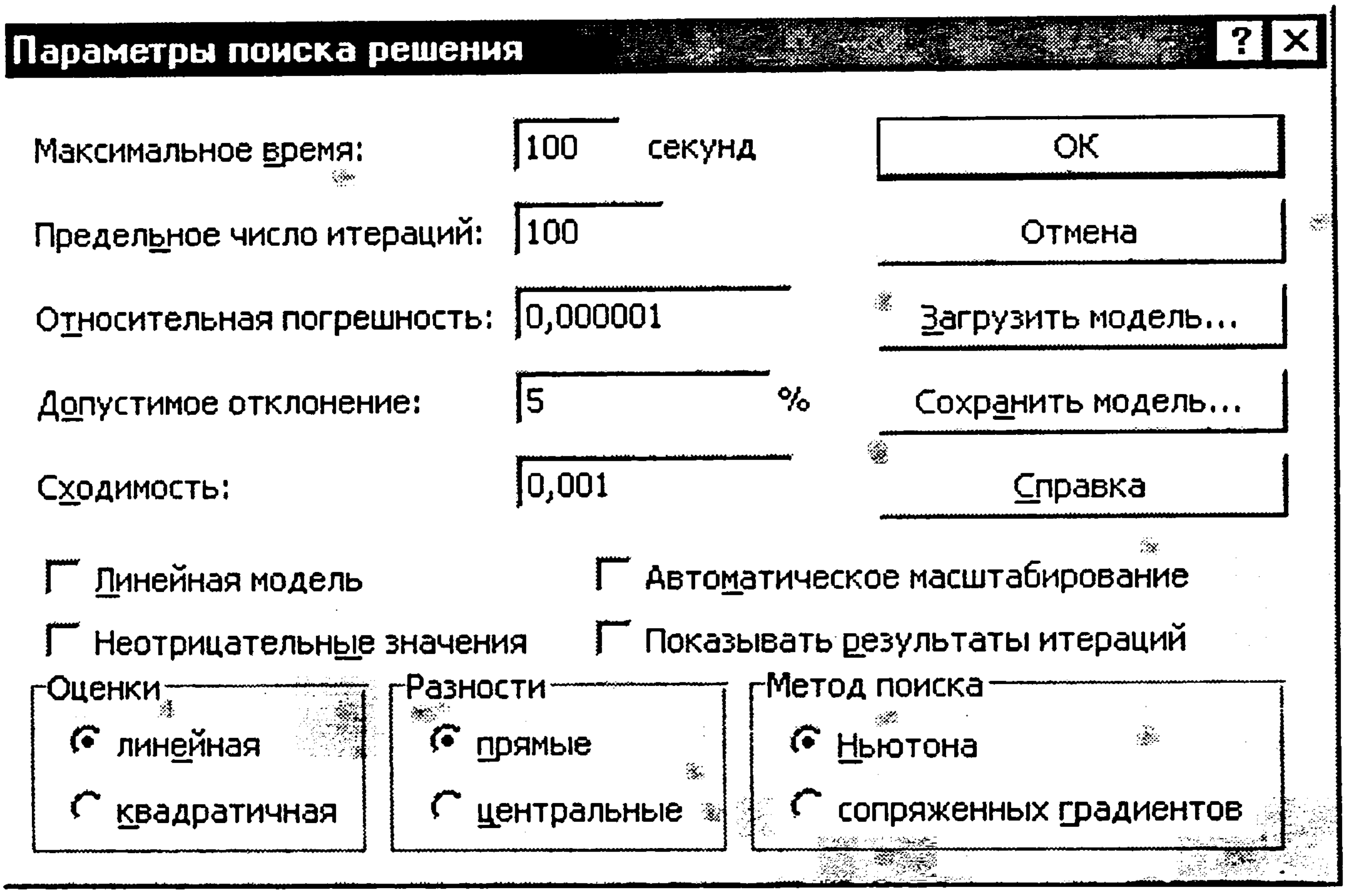


Рис. 2.17

	A	B	C	D	E	F	G
1	Поставщики	ПОТРЕБИТЕЛИ					
2		1	2	3	4		
3	1	4	3	2	1		
4	2	2	1	7	9		
5	3	3	6	8	4		
6	4	0	0	0	0		
7	Поставщики	Объемы поставок потребителям					
8		1	2	3	4		Запас
9	1	0	0	300	300	600	600
10	2	200	600	0	0	800	800
11	3	700	0	0	300	1000	1000
12	4	0	0	500	0	500	500
13		900	600	800	600	5200	
14	Спрос	900	600	800	600		2900

Рис. 2.18

Упражнения

2.20. Решить задачу, исходные данные которой приведены в табл. 2.47, при следующих условиях:

2.20.1. Запрещена перевозка груза от 1-го поставщика к 1-му потребителю. Определить, на сколько увеличилось значение функций из-за запрета перевозки по сравнению с оптимальным вариантом без запрета этой перевозки.

2.20.2. Поставка груза от 3-го поставщика к 1-му потребителю зафиксирована и равна 100 единицам. Требуется оценить удорожание перевозок груза по сравнению с оптимальным вариантом без этого условия.

2.20.3. От 2-го поставщика к 4-му потребителю необходимо поставить не менее 50 единиц груза (т.е. минимальная поставка груза от 2-го поставщика к 4-му потребителю равна 50 единиц) и оценить удорожание затрат на перевозку из-за этого условия.

2.20.4. Объем перевозки груза от 2-го поставщика к 1-му потребителю не должен превышать 300 единиц (максимальная поставка груза от 2-го поставщика к 1-му потребителю равна 300 единицам). Требуется определить удорожание затрат на перевозку груза из-за данного условия.

2.21. Имеются четыре участка земли для посева: 1) ржи, 2) пшеницы, 3) ячменя, 4) кукурузы. Площади участков соответственно равны 400, 200, 240 и 220 га. Урожайность культур (ц/га) на соответствующих участках земли представлена матрицей C.

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 20 & 22 \\ 26 & 22 & 30 & 28 \\ 22 & 14 & 16 & 18 \\ 40 & 42 & 47 & 50 \end{pmatrix}.$$

Требуется определить, сколько гектаров земли засеять каждой из культур на каждом участке земли, чтобы суммарная стоимость собранного зерна была максимальной, если известно, что из-за ограниченности в семенном фонде можно засеять рожью, пшеницей, ячменем и кукурузой соответственно 240, 200, 300 и 320 га.

Стоимости центнера зерна соответствующих культур равны S_j единиц, $j = \overline{1,4}$ ($S_1 = 3; S_2 = 5; S_3 = 4; S_4 = 7$).

3 . ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При решении многих практических оптимизационных задач требуется, чтобы величины (количество машин, агрегатов, оборудования, поголовья скота и др.) выражались в целых числах.

Такие задачи относятся к задачам целочисленной оптимизации. Они могут быть линейными и нелинейными.

В настоящем пособии ограничимся рассмотрением задач целочисленной линейной оптимизации (ЦЛО), когда целевая функция и ограничения являются линейными. Математическая модель задачи ЦЛО такая же, как и задачи линейной оптимизации, но с дополнительным требованием целочисленности всех или части неизвестных. Если требование целочисленности распространяется на часть неизвестных величин задачи, то такая задача называется частично целочисленной.

Запишем математическую модель задачи ЦЛО:

Найти экстремальное (максимальное или минимальное) значение функции

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, =, \ge\} b_i, \quad i = \overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0 \text{ и целые для всех } j = \overline{1,n}.$$

Пример 3.1. Транспортное судно грузоподъемностью P и вместимостью V загружается n неделимыми различными предметами. Каждый из предметов характеризуется весом p_j, стоимостью c_j и объемом V_j ($j = \overline{1,n}$). Требуется загрузить судно предметами таким образом, чтобы суммарная стоимость их была максимальной и выполнялись ограничения по грузоподъемности и вместимости.

Обозначим через x_j неизвестные параметры задачи, при этом

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ если } j\text{-й предмет загружается на судно } (j = \overline{1,n}), \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

С учетом обозначения математическая модель задачи имеет вид

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le P,$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \le V.$$

Пример 3.2. На производственном участке предприятия необходимо установить оборудование трех типов. Стоимость единицы оборудования первого типа составляет 2 млрд руб., второго — 3 млрд руб. и третьего — 1 млрд руб. На закупку оборудования предприятие располагает средствами в 20 млрд руб. Площадь производственного участка для размещения оборудования составляет 40 м^2. Производительность единицы каждого типа оборудования равна соответственно 2 единицам, 4 единицам и 3 единицам в смену. Требуется определить, сколько оборудования каждого типа закупать, чтобы получить максимальную производительность производственного участка, если известно, что для установки единицы оборудования первого типа, с учетом проходов, требуется 9 м^2 площади, второго — 7 и третьего — 10 м^2.

Обозначим через x_1, x_2 и x_3 количество закупаемого оборудования каждого типа. Тогда математическая модель задачи запишется следующим образом:

$$Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 20, \\ 9x_1 + 7x_2 + 10x_3 \le 40, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \text{ и целые} (j = \overline{1,3}).$$

3.2. МЕТОД ГОМОРИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Метод Гомори основан на применении симплекс-метода и метода отсечения. Идея его достаточно проста и заключается в следующем.

Сначала находится оптимальное решение задачи ЦЛО симплекс-методом. Если полученное решение целочисленное, то цель достигнута. Если же оптимальное решение не является целочисленным, то в условия задачи вводится дополнительное ограничение, которое отсекает от области допустимых решений полученное нецелочисленное решение и не отсекает от нее ни одной точки с целочисленными координатами. Далее симплекс-методом решается расширенная задача, т.е. находится ее опорное и оптимальное решение. Если новое решение не будет целочисленным, то вводится еще одно дополнительное ограничение. Процесс построения дополнительных ограничений и решения задачи симплекс-методом продолжается до тех пор, пока не будет найдено оптимальное целочисленное решение или не будет установлено, что его не существует.

Геометрическая иллюстрация метода Гомори осуществляется с помощью графического поля, на которое нанесена целочисленная решетка (рис. 3.1).

На рис. 3.1 максимальное значение функции в ОДР-четырехугольнике *ABCD* достигается в нецелочисленной точке *C*. После построения первого дополнительного ограничения, прямая линия которого на рис. 3.1 проходит через точки *E* и *F*, максимальное значение функции в новом ОДР-многоугольнике *ABEFD* достигается в нецелочисленной точке *F*. Включив в систему ограничений второе дополнительное ограничение, прямая которого проходит через точки *E* и *K*, максимум

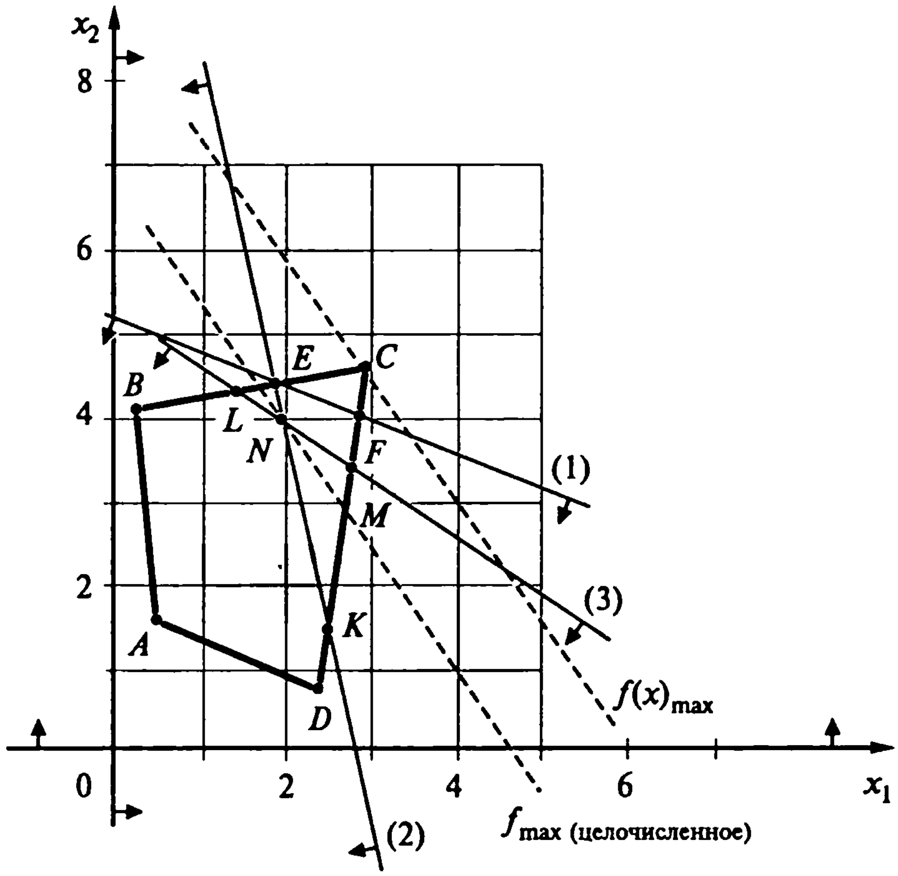


Рис. 3.1

функции достигается в нецелочисленной точке E ОДР-многоугольника $ABEKD$, а после включения в систему ограничений третьего дополнительного ограничения, прямая которого проходит через точки L и M, найдено максимальное значение функции в целочисленной точке N с координатами (2; 4) многоугольника $ABLNKD$.

Нетрудно увидеть, что дополнительные ограничения отсекали только нецелочисленные точки и не была отсечена ни одна целочисленная точка.

Дадим обоснование и покажем, как строится правильное дополнительное ограничение.

Дополнительное ограничение будет правильным, если оно линейное, отсекает оптимальную нецелочисленную точку от ОДР и не отсекает ни одной целочисленной точки в ОДР.

Предположим, что в результате решения задачи симплекс-методом получено оптимальное нецелочисленное решение (табл. 3.1).

Пусть в данном решении свободный член b_{i0} — дробный. Среди элементов b_{ij} в i-й строке $(j=\overline{1,n})$ могут быть как целые, так и дробные числа.

Для удобства дальнейшего изложения материала обозначим базисные неизвестные в табл. 3.1 символом $z_i\,(i=\overline{1,m})$, а небазисные — символом $\eta_j\,(j=\overline{1,n})$. Все они находятся в целых числах.

С учетом обозначений оптимальное решение запишем в табл. 3.2.

Таблица 3.1

Н.Н. / Б.Н.	$-y_1$	$-y_2$	...	$-x_j$	...	$-x_n$	1
$x_1 =$	b_{11}	b_{12}	...	b_{1j}	...	b_{1n}	b_{10}
$x_2 =$	b_{21}	b_{22}	...	b_{2j}	...	b_{2n}	b_{20}
...			...		...		
$y_i =$	b_{i1}	b_{ir}	...	b_{ij}	...	b_{in}	b_{i0}
...			...		...		
$y_m =$	b_{m1}	b_{m2}	...	b_{mj}	...	b_{mn}	b_{m0}
$Z =$	P_1	P_2	...	P_j	...	P_n	P

Таблица 3.2

Н.Н. / Б.Н.	$-\eta_1$	...	$-\eta_j$	...	$-\eta_n$	1
$z_1 =$	b_{11}	...	b_{1j}	...	b_{1n}	b_{10}
...		...		...		
$z_i =$	b_{i1}	...	b_{ij}	...	b_{in}	b_{i0}
...		...		...		
$z_m =$	b_{m1}	...	b_{mj}	...	b_{mn}	b_{m0}
$Z =$	P_1	...	P_j	...	P_n	P

Целую часть числа b обозначим через $[b]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее число b. Дробную часть обозначим через α, тогда

$$\alpha = b - [b] \geq 0 \text{ или } b = [b] + \alpha.$$

Так как b_{i0} в табл. 3.2 дробное число, а среди элементов b_{ij} могут быть и целые, и дробные, то $0 < \alpha_{i0} < 1$, а $0 \leq \alpha_{ij} < 1$.

Рассмотрим i-е ограничение из табл. 3.2.

$$z_i = b_{i1}(-\eta_1) + \ldots + b_{ij}(-\eta_j) + \ldots + b_{in}(-\eta_n) + b_{i0} = ([b_{i1}] + \alpha_{i1})(-\eta_1) + \ldots$$

$$\ldots + ([b_{ij}] + \alpha_{ij})(-\eta_j) + \ldots + ([b_{in}] + \alpha_{in})(-\eta_n) + [b_{i0}] + \alpha_{i0} = [b_{i1}](-\eta_1) + \alpha_{i1}(-\eta_1) + \ldots$$

$$\ldots + [b_{ij}](-\eta_j) + \alpha_{ij}(-\eta_j) + \ldots + [b_{in}](-\eta_n) + \alpha_{in}(-\eta_n) + [b_{i0}] + \alpha_{i0}.$$

Результат преобразований можно записать, используя знак суммирования, в виде

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} [b_{ij}](-\eta_j) + [b_{i0}] + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(-\eta_j) + \alpha_{i0}. \tag{3.1}$$

Дробные значения выражения (3.1) перенесем влево, а целые — вправо и обозначим эти части буквой z_{m+1}, тогда

$$z_{m+1} = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(-\eta_j) - \alpha_{i0} = \sum_{j=1}^{n} [b_{ij}](-\eta_j) + [b_{i0}] - z_i. \tag{3.2}$$

Очевидно, что при целочисленных значениях z_i и η_j правая часть выражения (3.2) есть целое число. Но тогда и $z_{m+1} = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(-\eta_j) - \alpha_{i0}$ будет целым числом.

Поскольку $0 \le \alpha_{ij} < 1$, то $-\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(-\eta_j) \ge 0.$

Отсюда

$$z_{m+1} = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(-\eta_j) - \alpha_{i0} \ge -\alpha_{i0}.$$

Целочисленное значение z_{m+1} больше дробного числа $-\alpha_{i0}$, следовательно, оно может быть равно 0, или 1, или 2, или 3 и т.д. Тогда $z_{m+1} = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(-\eta_j) - \alpha_{i0}$ можно принять за правильное дополнительное ограничение, коэффициентами при неизвестных в котором являются дробные части соответствующих коэффициентов в i-й строке (табл. 3.2), а свободным членом — дробная часть числа α_{i0}, взятые со знаком минус.

С введенным дополнительным ограничением ранее найденное оптимальное решение является неопорным, так как $z_{m+1} = -\alpha_{i0} < 0.$

Таким образом, необходимо найти сначала опорное решение расширенной задачи, а потом оптимальное.

Признаком отсутствия целочисленного решения задачи линейной оптимизации является то, что в строке с дробным свободным членом все остальные элементы целые. В дополнительном ограничении, построенном по этой строке, дробное число будет только в столбце свободных членов, а остальные дробные части будут равны нулю.

Применение метода Гомори рассмотрим на примере 3.2.

Первая симплексная таблица представлена в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Б.Н. \ Н.Н.	$-x_1$	$-x_2$ ↓	$-x_3$	1	$t \geq 0$
$y_1 =$	2	3	1	20	20/3
→ $y_2 =$	9	$\boxed{7}$	10	40	40/7
$Z =$	−2	−4	−3	0	

Оптимальное, но нецелочисленное решение получено в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Б.Н. \ Н.Н.	$-x_1$	$-y_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	−13/7	−3/7	−23/7	20/7
$x_2 =$	9/7	1/7	10/7	40/7
$Z =$	22/7	4/7	19/7	160/7

Дополнительное ограничение z_1 в табл. 3.5 сформировано по элементам второй строки:

$$z_1 = (-2/7)(-x_1) + (-1/7)(-y_2) + (-3/7)(-x_3) - 5/7,$$

где

$$\alpha_{21} = 9/7 - 1 = 2/7,\ \alpha_{22} = 1/7 - 0 = 1/7,\ \alpha_{23} = 10/7 - 1 = 3/7,\ \alpha_{20} = 40/7 - 5 = 5/7.$$

Все эти дробные части записаны в дополнительной строке с отрицательным знаком.

Таблица 3.5

Б.Н. \ Н.Н.	$-x_1$	$-y_2$ ↓	$-x_3$	1	$t \geq 0$
$y_1 =$	−13/7	−3/7	−23/7	20/7	–
$x_2 =$	9/7	1/7	10/7	40/7	40
→ $z_1 =$	−2/7	−1/7	−3/7	−5/7	5
$Z =$	22/7	4/7	19/7	160/7	

Так как с дополнительным ограничением решение неопорное, то, выбрав за разрешающий элемент (−1/7) и рассчитав элементы табл. 3.6, получим в этой таблице оптимальное целочисленное решение.

Таблица 3.6

Б.Н. \ Н.Н.	$-x_1$	$-z_1$	x_3	1
$y_1 =$	−6/7	−3	17/7	5
$x_2 =$	+7	−1	7	5
$y_2 =$	2	−7	3	5
$Z =$	2	4	1	20

Примечание. Дополнительное ограничение может быть построено по любому из ограничений задачи с дробной частью в столбце свободных членов симплексной таблицы. Однако практический опыт решения задач показывает, что можно быстрее прийти к оптимальному решению, если строить дополнительные ограничсния по ограничениям симплексной таблицы с наибольшей дробной частью чисел столбца свободных членов.

3.3. МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Суть метода и технология его применения заключаются в том, что сначала в ОДР системы ограничений θ находится оптимальное решение задачи симплекс-методом без учета условия целочисленности. (Для определенности рассмотрим задачу нахождения максимума функции.) Если в полученном решении некоторые переменные имеют дробные значения, то выбираем любую из дробных переменных и по ней строим два ограничения. В одном ограничении величина переменной меньше или равна наибольшему целому числу, не превышающему значения дробной переменной в оптимальном решении, а в другом ограничении она больше или равна наименьшему целому значению, но не меньше значения дробной переменной.

Если, например, дополнительные ограничения строить по переменной $x_2 = 9/2$ $(4 \le 9/2 \le 5)$, то первое ограничение будет $x_2 \le 4$, а второе $x_2 \ge 5$, этим мы исключаем из ОДР исходной задачи промежуток с дробными значениями неизвестной $x_2 (4 < x_2 < 5)$. Этот промежуток разбивает ОДР θ на две части; θ_1 и θ_2, где θ_1 — новая ОДР, полученная добавлением к ограничениям исходной задачи дополнительного ограничения $x_2 \le 4$, а θ_2 — добавлением ограничения $x_2 \ge 5$.

В результате разбиения ОДР θ получены две новые задачи (подзадачи) линейной оптимизации. Если после их решения полученные значения неизвестных будут не целочисленные, то, сравнив значения функций этих задач, выбираем задачу с большим значением функции и по новой неизвестной с дробным значением строим снова два дополнительных ограничения (третье и четвертое) и разбиваем эту задачу еще на две новые подзадачи. В результате получаем ветви (рис. 3.2).

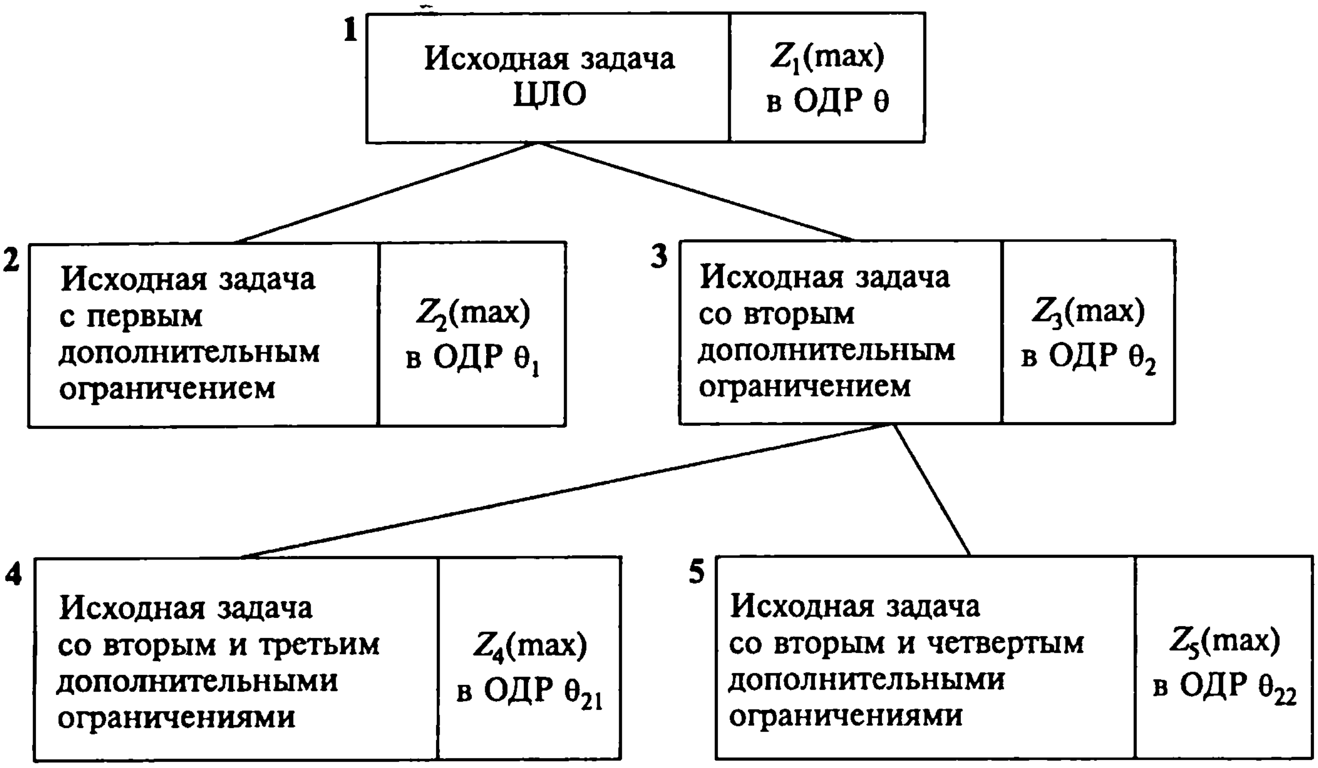


Рис. 3.2

Ветвление заканчивается нахождением целочисленного решения, если оно существует. Границами в методе выступают значения функций задач каждой ветви. На каждом этапе решения задачи дальнейшему ветвлению (разбиению на новые задачи) подлежит та ветвь (задача), у которой значение функции больше. Поэтому отдельные подзадачи (ветви), у которых значение функции меньше, могут быть отброшены. Однако иногда, сравнивая значения функций подзадач, приходится возвращаться к ветвям, которые ранее были отброшены, и продолжать дальнейшее решение от них.

Поскольку множество всех решений задачи ЦЛО конечно, то после конечного числа разбиений исходной задачи на подзадачи оптимальное решение будет найдено.

Проиллюстрируем применение метода ветвей и границ на следующем примере.

Пример 3.3. Найти максимум функции $Z=x_1+2x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35, \\ -2x_1 + 3x_2 \le \ 6, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0, \text{ целые.}$$

Для наглядности решение осуществим графическим методом. ОДР задачи является многоугольник *OABC* (рис. 3.3). В точке *B* находится максимальное значение функции: $Z^B_{max} = 9{,}64$ при $x_1 = 2{,}42$ и $x_2 = 3{,}61$.

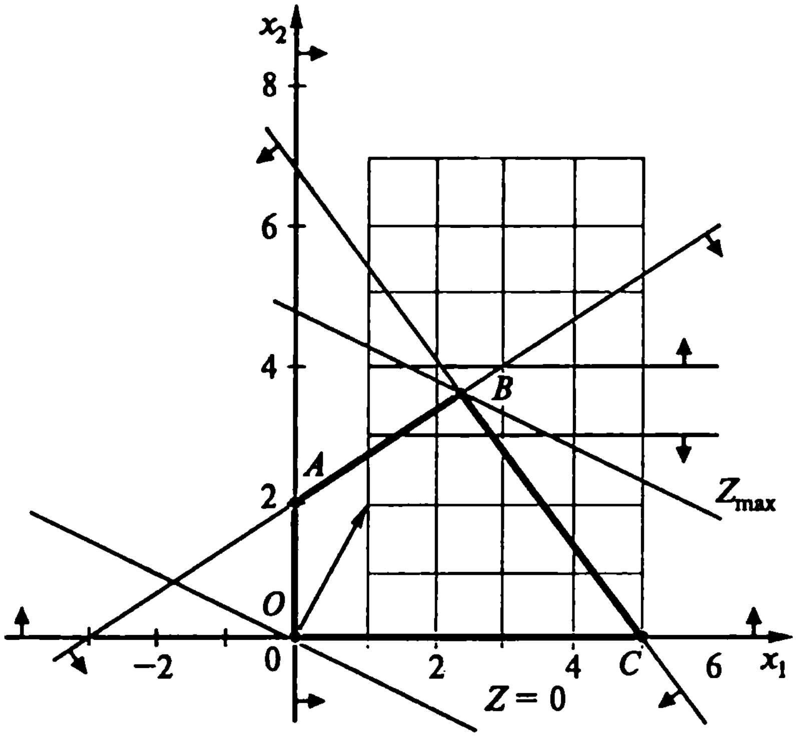


Рис. 3.3

Поскольку значения неизвестных дробные, то разобьем по неизвестной x_2 ОДР задачи на две части. Одна будет содержать множество точек, у которых $x_2 \le 3$, а вторая — у которых $x_2 \ge 4$. В результате получаем две новые задачи линейной оптимизации: № 2 и № 3 (исходная задача имеет № 1).

Задача № 2

$$Z = x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Задача № 3

$$Z = x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_2 \ge 4, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0.$$

Области допустимых решений задач представлены на рис. 3.4.

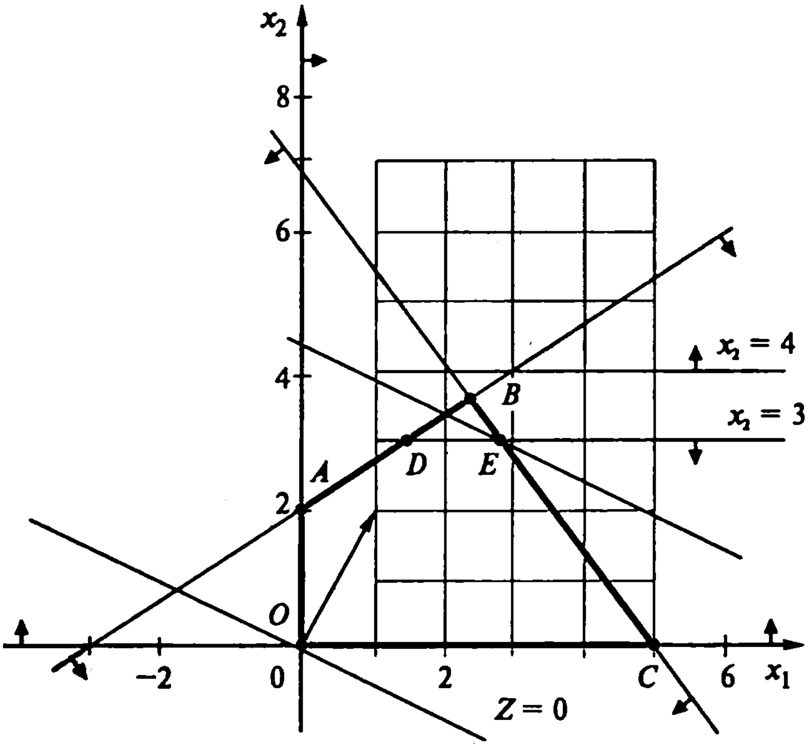


Рис. 3.4

Из рис. 3.4 видно, что ни одна целочисленная точка исходной ОДР не потеряна. ОДР задачи № 2 является многоугольник *OADEC*. В точке *E* с координатами $x_1 = 2{,}86$ и $x_2 = 3$ функция достигает максимального значения $Z^E_{max} = 8{,}86$

Решение задачи № 2 не является целочисленным. Что касается задачи № 3, то ее ОДР пустая. Ограничения этой задачи противоречивы, и она не имеет решения.

Продолжая решение, разобьем ОДР задачи № 2 на два подмножества по неизвестной $x_1 = 2{,}86$. В результате получим две новые задачи № 4 и № 5 с соответствующими дополнительными ограничениями $x_1 \le 2$ и $x_1 \ge 3$.

Задача № 4

$$Z = x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_2 \le 3, \\ x_1 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Задача № 5

$$Z = x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 3, \end{cases}$$

$$x_2 \ge 0.$$

ОДР этих задач представлены на рис. 3.5.

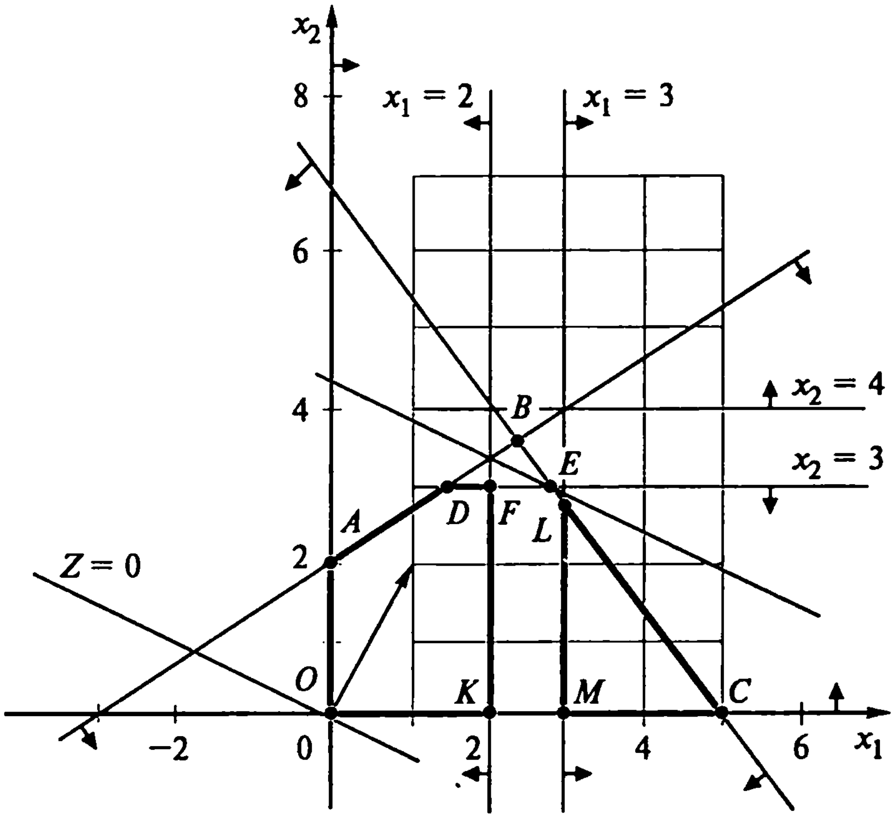


Рис. 3.5

ОДР задачи № 4 является многоугольник $OADFK$. Максимальное значение функции достигается в точке F с координатами $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. $Z^F_{max} = 8$. Таким образом, получено целочисленное решение задачи № 4.

ОДР задачи № 5 является треугольник LMC. Максимальное значение функция достигает в точке L с координатами $x_1 = 3$; $x_2 = 2,8$; $Z^L_{max} = 8,6$.

Так как значение функции целочисленного решения задачи № 4 $Z^F_{max} = 8$ меньше $Z^L_{max} = 8,6$, то дальнейшему разбиению на две задачи № 6 и № 7 подлежит задача № 5 по нецелочисленной неизвестной $x_2 = 2,8$. Не проводя дополнительных построений, отметим, что ОДР задачи № 6 с дополнительным ограничением $x_2 \geq 3$ не существует, а значение функции в оптимальном целочисленном решении задачи № 7 с дополнительным ограничением $x_2 \leq 2$ равно 7, что меньше $Z^F_{max} = 8$. Таким образом, целочисленное решение исходной задачи следующее: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $Z^F_{max} = 8$.

3.4. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ НАХОЖДЕНИЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Рассмотрим технологию нахождения оптимального решения с помощью программы **Целочисленное линейное программирование** (ЦЛП), содержащейся в русифицированной версии пакета QSB, на примере 3.2.

Для удобства еще раз запишем математическую модель задачи:

$$Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 20, \\ 9x_1 + 7x_2 + 10x_3 \le 40, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \text{ и целые } (j = \overline{1,3}).$$

В основном меню QSB подводим стрелками на клавиатуре прямоугольный курсор на вторую строку: **Целочисленное линейное программирование** и нажимаем клавишу <Enter> (ввод). На экране дисплея появляется меню для решения задач ЦЛП — **Режим. Краткое описание режима**, содержащее следующую информацию:

Режим. Краткое описание режима

1. Описание возможностей программы ЦЛП
2. Ввод новой задачи
3. Чтение файла задачи с диска
4. Вывод задачи на дисплей/печать
5. Решение задачи
6. Запись задачи на диск
7. Корректировка задачи
8. Вывод решения на дисплей/печать
9. Возврат в основное меню
0. Выход в DOS

Заносим исходные данные задачи в память ЭВМ под именем **«pr 32»**, для чего подводим прямоугольный курсор на вторую строку — **Ввод новой задачи** и нажимаем клавишу <Enter>. На экране появляются вопросы: направление оптимизации (max или min); количество неизвестных; количество ограничений; ввод коэффициентов при неизвестных критерия оптимальности, системы ограничений и ее правых частей и др. На эти вопросы последовательно даются ответы и после занесения соответствующего значения нажимается клавиша <Enter>. После ввода исходных данных подводим курсор на шестую строку меню — **Запись задачи на диск** и нажимаем клавишу <Enter>.

Используя далее меню и выполняя указания, появляющиеся на экране дисплея, решаем задачу и выводим при необходимости решение на печать.

Вид исходных данных приводится ниже в протоколе решения задачи.

Данные вашей модели pr 32 **Стр. 1**

Max	+2.00000X1	+4.00000X2	+3.00000X3		
Ограничения					
(1)	+2.00000X1	+3.00000X2	+1.00000X3	<=	+20.0000
(2)	+9.00000X1	+7.00000X2	+10.00000X3	<=	+40.0000

Целочисленность и границы переменных (стандартно границы установлены от 1 до 32000)

Номер п.	Имя п.	i – целая, c – нет	Левая гр-ца	Правая гр-ца
1	X1	<i>	<0 >	<10>
2	X2	<i>	<0 >	<10>
3	X3	<i>	<0 >	<10>

Нами, исходя из условия задачи, установлена правая (верхняя) граница неизвестных на уровне 10 единиц. Правую границу можно не устанавливать, тогда она устанавливается стандартно самой программой на уровне 32 000 единиц.

Результаты решения pr 32 Стр. 1

Переменные №	имя	Решение	Критерий Коэффициент	Переменные №	имя	Решение	Критерий Коэффициент
1	X1	0.000	2.000	3	X3	0.000	3.000
2	X2	5.000	4.000				

M A X значение критерия = 20 Всего итераций = 29

Из результатов решения видно, что оно получено за 29 итераций метода ветвей и границ и совпадает с решением, приведенным в табл. 3.6:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 5,\ x_3 = 0,\ Z_{\max} = 20.$$

Таким образом, максимальная производительность производственного участка будет составлять 20 единиц в смену, если закупить и установить 5 единиц оборудования второго типа.

Решение задачи целочисленной линейной оптимизации средствами **Excel** осуществляется командой **Поиск решения** из меню **Сервис**, так же как это делалось при решении задач без учета условия целочисленности. Однако при решении целочисленных задач необходимо в форму представления данных ввести требование целочисленности переменных и это требование занести с исходными данными в ЭВМ.

После ввода в ЭВМ исходной информации из примера 2.2 (рис. 3.6) вызываем диалоговое окно **Поиск решения** (рис. 3.7) и заносим в этом окне необходимые данные. Закончив ввод ограничений, командой **Добавить** вводим условия целочисленности. Для этого в диалоговом окне **Добавление ограничения** вводим в окно **Ссылка на ячейку** адреса ячеек B4:D4, где должны быть изменяемые значения неизвестных x_1, x_2 и x_3. Далее курсор переводим в среднее окно, в котором находятся виды ограничений (<=, =, =>) и требования (целое и двоичное). Устанавливаем курсор на требование целочисленности и выполняем **M1**. Выполняем **M1** по **OK**. На экране — диалоговое окно **Поиск решения** (рис. 3.7).

	A	B	C	D	E	F	G
1		ПЕРЕМЕННЫЕ					
2	Имя	прод1	прод2	прод3			
3	Перемен.	X1	X2	X3			
4	Значение	0	0	0			
5	Нижн. гр	0	0	0			
6	Целочислен	целое	целое	целое			
7	Прибыль	240	210	180	=СУММПРОИЗВ(B$4:D$4;B7:D7)	макс	
8		ОГРАНИЧЕНИЯ					
9	Вид				левая часть	знак	объем рес
10	Компл. изд.	4	6	8	=СУММПРОИЗВ(B$4:D$4;B10:D10)	<=	3120
11	Сырье	2	8	10	=СУММПРОИЗВ(B$4:D$4;B11:D11)	<=	3000
12	Материалы	6	9	4	=СУММПРОИЗВ(B$4:D$4;B12:D12)	<=	3150

Рис. 3.6

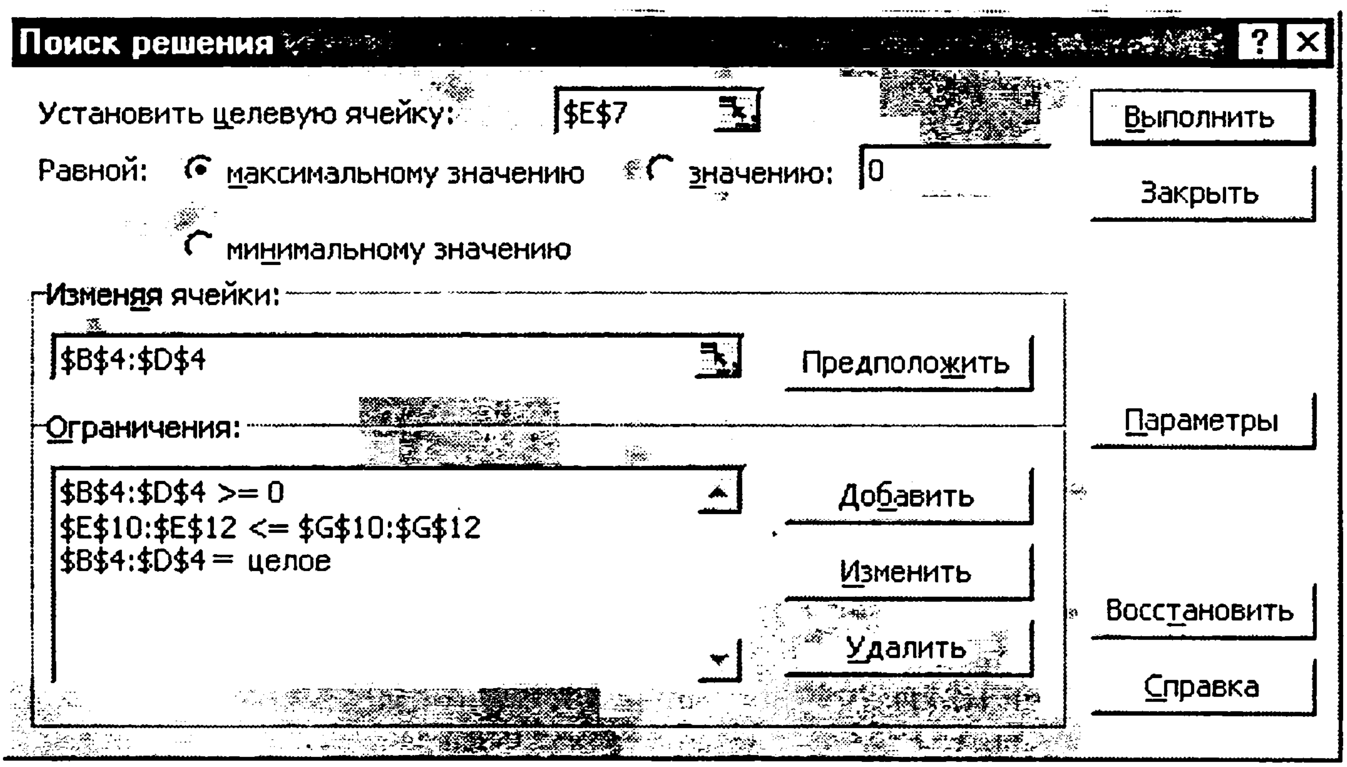


Рис. 3.7

Выполнив M1 по команде **Параметры**, устанавливаем необходимые параметры в диалоговом окне **Параметры поиска решения**. Возвращаемся в диалоговое окно **Поиск решения** и, щелкнув M1 по команде **Выполнить**, получаем целочисленное решение: $x_1 = 399$, $x_2 = 0$, $x_3 = 189$, $f_{max} = 129\ 780$.

Упражнения

Найти целочисленные решения задач:

3.1.

$$Z = 70x_1 + 80x_2 + 110x_3 + 60x_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 30, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 28, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \le 50, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 45, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

3.2.

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 20, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 50, \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 60, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

3.3.

$$Z = 20x_1 + 25x_2 + 30x_3 + 15x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 18, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \le 40, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \le 60, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

3.4. Для перевозки пассажиров по трем маршрутам аэропорт может использовать три типа самолетов. Вместимость самолета i-го типа ($i = \overline{1,3}$) равна 150, 200 и 300 пассажиров соответственно, а потребность в перевозке пассажиров по j-му маршруту ($j = \overline{1,3}$) за сезон составляет соответственно 5 600, 7 000 и 6 500 человек. Затраты на эксплуатацию i-го типа самолета на j-м маршруте равны c_{ij} денежных единиц ($i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,3}$) и представлены матрицей C:

$$C = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 40 \\ 45 & 53 & 60 \\ 70 & 65 & 50 \end{pmatrix}.$$

Парк самолетов каждого типа составляет 35, 38 и 25 единиц соответственно.

Требуется определить, сколько самолетов каждого типа использовать на каждом из маршрутов, чтобы затраты на перевозку пассажиров были минимальными.

3.5. Морское судно грузоподъемностью 20 тыс. т и вместимостью 28 тыс. м^3 может быть использовано для перевозки пяти видов груза. Данные о массе, объеме и стоимости единицы груза каждого вида приведены в таблице.

Параметры единицы груза	Номер груза				
	1	2	3	4	5
Масса, т	95	70	90	105	75
Объем, $м^3$	125	90	110	100	120
Стоимость, млн руб.	270	280	440	350	400

Определить, сколько единиц груза каждого вида следует загрузить на судно, чтобы суммарная стоимость груза была максимальной и выполнялись ограничения по вместимости и грузоподъемности судна.

4. ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА (ПОСТРОЕНИЕ КОЛЬЦЕВЫХ МАРШРУТОВ)

4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется n городов. Расстояния между любой парой городов известны и составляют a_{ij} $(i, j = \overline{1,n}, i \neq j)$. Если прямого маршрута между городами i и j не существует, то $a_{ij} = \infty$. Расстояния между городами удобно записывать в виде матрицы $A = (a_{ij})_{n \times n}$ (табл. 4.1), где $a_{ii} = \infty$.

Таблица 4.1

$i \backslash j$	1	2	...	n
1	∞	a_{12}	...	a_{1n}
2	a_{21}	∞	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
n	a_{n1}	a_{n2}	...	∞

Коммивояжер, выезжая из какого-либо города, должен посетить все города, побывав в каждом из них один, и только один раз, и вернуться в исходный город. Необходимо определить такую последовательность объезда городов, при которой длина маршрута была бы наименьшей.

Если городам поставить в соответствие вершины графа, а соединяющим их дорогам — дуги, то в терминах теории графов задача заключается в определении гамильтонова контура минимальной длины. *Гамильтоновым контуром* (по имени английского математика Гамильтона) называется путь, проходящий через все вершины графа, у которого начальная вершина совпадает с конечной. Здесь под длиной контура понимают не количество дуг, входящих в контур, а сумму их длин*.

Для записи постановки задачи в терминах целочисленной линейной оптимизации определим булевы переменные следующим образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если коммивояжер переезжает из города } i \text{ в город } j \ (i, j = \overline{1,n}), \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда задача заключается в отыскании значений переменных x_{ij}, минимизирующих

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}, \tag{4.1}$$

*Сведения из теории графов приводятся в главе 7 пособия.

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n}\ \text{(въезд в город } j\text{)};\tag{4.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n}\ \text{(отъезд из города } i\text{)};\tag{4.3}$$

$$u_i - u_j + nx_{ij} \le n-1,\ i,\ j = \overline{1,\ n}(i \ne j).\tag{4.4}$$

Переменные u_i, $i = \overline{1,n}$, могут принимать произвольные значения, однако без всякого ущерба на них может быть наложено условие неотрицательности и целочисленности.

Легко заметить, что задача целочисленной линейной оптимизации (4.1)–(4.4) эквивалентна задаче коммивояжера. Действительно, условия $a_{ii} = \infty$ исключают в оптимальном решении значения $x_{ii} = 1$, как не имеющие смысла. Ограничения (4.2) требуют, чтобы маршрут включал только один въезд в каждый город, а ограничения (4.3) — чтобы маршрут включал лишь один выезд из каждого города. Целевая функция (4.1) отражает длину гамильтонова контура. Ограничения (4.4) требуют, чтобы маршрут образовывал контур и проходил через все города.

Решение задачи, описанной только условиями (4.1)–(4.3), не обязательно является контуром, проходящим через все города. В частности, в результате решения задачи (4.1)–(4.3) могут быть получены два и более не связанных между собой частичных контуров. Для устранения возможности образования негамильтоновых контуров и служат ограничения (4.4). Покажем, что эти ограничения действительно исключают все частичные контуры и не исключают ни одного гамильтонова контура.

Рассмотрим частичный контур, проходящий через k городов ($k< n$), определяемый значениями $x_{ij} = 1$ для k неизвестных. Складывая все неравенства вида (4.4), содержащие k неизвестных $x_{ij} = 1$, соответствующих дугам, образующим частичный контур, получим недопустимое неравенство $nk \le (n-1)k$ (при сложении все разности $u_i - u_j$ взаимно уничтожаются). Следовательно, условие (4.4) исключает возможность образования любого частичного контура.

Теперь установим, что существуют значения переменных u_i, удовлетворяющие ограничениям (4.4) для любого гамильтонова контура. Положим, что $u_i = p(p = 1,2,\ldots,n)$, если город i в гамильтоновом контуре посещается по порядку P-м, причем $u_1 = 1$ и $u_j = u_i + 1$, $j = \overline{2,n}$; j — номер города в гамильтоновом контуре. Так, например, в контуре 1–3–6–8–... значения u_i будут следующими: u_1=1; u_3=2; u_6=3; u_8=4, ... Из предположения следует, что при $x_{ij} = 0$ соответствующее неравенство (4.4) принимает вид $u_i - u_j \le n-1$ и всегда выполняется, поскольку $u_i < n$ и $u_j > 1$ при $j \ne 1$. При $x_{ij} = 1$ эти ограничения выполняются как равенства: $u_i - u_j + nx_{ij} = p-(p+1)+n\cdot 1 = n-1$.

Таким образом, справедливость сформулированного выше утверждения полностью доказана.

Следует отметить, что как для задачи коммивояжера, так и для других комбинаторных задач характерно сочетание простоты постановки с трудностью решения, причем трудности эти чисто вычислительного характера. В самом деле, оптимальный маршрут можно найти, перебрав и сравнив по длительности все возможные маршруты, так как их число конечно. Однако с увеличением числа городов количество возможных маршрутов быстро возрастает (число возможных маршрутов при n городах равно $(n-1)!$) и даже при относительно небольшом количестве городов, порядка 16—20, достигает астрономических цифр. Так как время решения задачи пропорционально числу возможных маршрутов, полный перебор вариантов практически неприемлем даже при использовании самых быстродействующих ЭВМ.

Решение задачи (4.1)—(4.4) методами целочисленной линейной оптимизации также связано с определенными трудностями.

В настоящее время разработано большое количество алгоритмов для решения задачи коммивояжера. Одним из наиболее эффективных является, по-видимому, метод ветвей и границ, предложенный в 1963 г. группой авторов (Дж. Литл, К. Мурти, Д. Суини, К. Кэрол).

4.2. МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

Существуют различные версии метода ветвей и границ решения задачи коммивояжера. Рассмотрим стандартный метод Дж. Литла и др.

Вначале для множества R всех гамильтоновых контуров определяется некоторая оценка снизу (нижняя граница) $\varphi_{(R)}$ их длины. Затем множество всех гамильтоновых контуров разбивается на два подмножества. Первое подмножество состоит из гамильтоновых контуров, которые включают некоторую дугу (i, j), — обозначим его $\{(i, j)\}$, а второе состоит из гамильтоновых контуров, которые не включают эту дугу, — обозначим его $\{\overline{(i, j)}\}$. Для каждого из подмножеств $\{(i, j)\}$ и $\{\overline{(i, j)}\}$ определяется нижняя граница длины гамильтоновых контуров $\varphi_{(i,j)}$ и $\varphi_{\overline{(i,j)}}$. Каждая новая нижняя граница оказывается не меньше нижней границы всего множества гамильтоновых контуров $\varphi_{(R)}$. Среди двух подмножеств маршрутов $\{(i, j)\}$ и $\{\overline{(i, j)}\}$ выбирается подмножество с меньшей нижней границей. Это подмножество снова разбивается на два и для вновь образованных подмножеств находятся нижние границы. Процесс разбиения подмножеств аналогичным образом продолжается до тех пор, пока не будет выделено подмножество, содержащее единственный гамильтонов контур. Взаимосвязь подмножеств, полученных в результате разбиения, изображается в виде дерева (графа), вершинам которого приписываются нижние границы. Пример такого дерева на рис. 4.1.

Получив гамильтонов контур, просматривают оборванные ветви дерева и сравнивают нижние границы подмножеств, соответствующих оборванным ветвям, с длиной полученного гамильтонова контура.

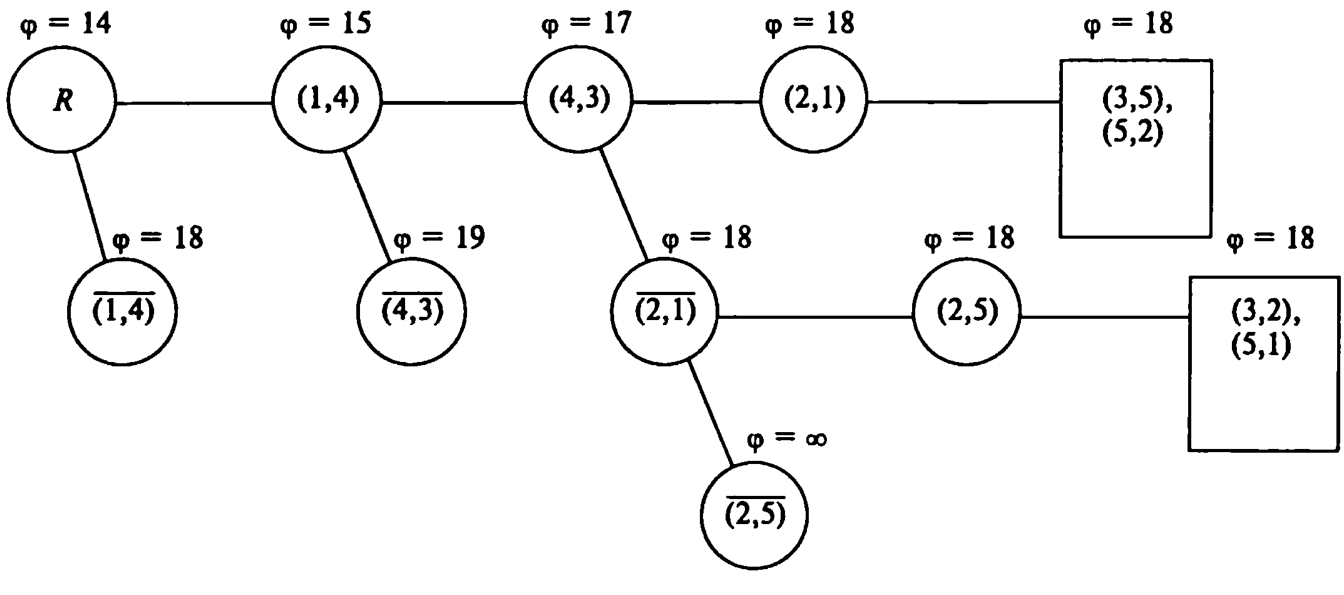


Рис. 4.1

Если нижние границы подмножеств, соответствующих оборванным ветвям, окажутся меньше длины гамильтонова контура, то эти ветви разбивают по тому же правилу. Процесс продолжается до тех пор, пока нижние границы вновь полученных подмножеств меньше длины гамильтонова контура. В результате могут быть получены новые гамильтоновы контуры. В этом случае сравниваются длины всех гамильтоновых контуров и среди них выбирается контур с наименьшей длиной. Решение задачи считается законченным, если нижние границы оборванных ветвей не меньше длины гамильтонова контура. В качестве оптимального выбирается гамильтонов контур с наименьшей длиной.

Остановимся на способе отыскания нижних границ и разбиения множества гамильтоновых контуров на подмножества.

Расчет нижних границ может быть основан на следующем свойстве. Если найти длину оптимального гамильтонова контура с матрицей расстояний A, а затем из элементов некоторой строки или столбца матрицы A вычесть некоторое число и снова решить задачу с новой матрицей, то гамильтонов контур коммивояжера не изменится, а длина его уменьшится на это число. В самом деле, длина оптимального гамильтонова контура коммивояжера состоит из суммы n чисел (элементов матрицы расстояний), взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца. Следовательно, изменение всех элементов строки или столбца на одно и то же число не влияет на оптимальное решение задачи. Если операцию вычитания проделать и для других строк и столбцов, то длина оптимального контура задачи с измененной матрицей будет отличаться от длины оптимального контура задачи с исходной матрицей на сумму чисел, вычитаемых из элементов строк и столбцов.

Таким образом, для определения нижней границы множества всех гамильтоновых контуров необходимо в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент α_i, $\alpha_i = \min a_{ij}$ $(i = \overline{1,n})$, и вычесть его из всех элементов данной строки (такая операция называется *приведением матрицы расстояний по строкам).* В результате приведения в каждой строке матрицы будет, по крайней мере, один нуль. Затем в матрице, приведенной по строкам, находим минимальный элемент β_j в каждом столбце и приводим ее по столбцам. Матрицу, приведенную по строкам и столбцам, называют *полностью приведенной*, а величины α_i и β_j $(i, j = \overline{1, n})$ — *константами приведения*. Полностью приведенная матрица содержит, по крайней мере, один нуль в каждой строке и каждом столбце.

Так как длина L_1 оптимального гамильтонова контура в задаче с полностью приведенной матрицей отличается от длины L оптимального гамильтонова контура в задаче с неприведенной матрицей, на сумму констант приведения:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j ,$$

то $L = L_1 + \gamma$.

В полностью приведенной матрице все элементы неотрицательны, поэтому $L_1 \geq 0$, а γ можно выбрать в качестве нижней границы длины гамильтонова контура, т.е. $\varphi_{(R)} = \gamma$.

Рассмотрим теперь способ выбора дуги (i, j), априорное включение или невключение которой в гамильтонов контур разбивает все множество гамильтоновых контуров на подмножества.

Априорное исключение какой-нибудь дуги (i, j) из гамильтонова контура осуществляется заменой соответствующего элемента матрицы расстояний на ∞. В результате исключения появляется возможность выполнить дополнительное приведение матрицы и улучшить нижнюю границу.

Априорное включение дуги (i, j) в гамильтонов контур позволяет сократить размер матрицы за счет вычеркивания i-й строки и j-го столбца. Кроме того, при включении дуги (i, j) в контур существует опасность образования негамильтонова контура, т.е. контура, проходящего через часть городов. Поэтому в целях недопущения образования негамильтонова контура необходимо исключить одну из дуг. В простейшем случае при включении дуги (i, j) в гамильтонов контур требуется исключить дугу (j, i), т.е. элемент a_{ji} заменить на ∞. Сокращение размеров матрицы расстояний и исключение одного из элементов позволяют дополнительно выполнить приведение матрицы и улучшить нижнюю границу подмножества $\{(i, j)\}$.

Наиболее вероятно, что в оптимальный гамильтонов контур войдут дуги, которым в приведенной матрице соответствуют нулевые элементы. Поэтому выбор дуги будем осуществлять следующим образом. В приведенной матрице элемент $a_{ij} = 0$ условно заменим на ∞. Этим самым дуга (i, j) будет исключена из гамильтонова контура. Чтобы определить сумму констант приведения вновь полученной матрицы, необходимо сложить минимальный элемент α_i i-й строки с минимальным элементом β_j j-го столбца, так как остальные строки и столбцы содержат, по крайней мере, по одному нулю. Обозначим сумму констант приведения матрицы с исключенной дугой (i, j) через $\gamma_{\overline{(i,j)}}$. Следовательно, $\gamma_{\overline{(i,j)}} = \alpha_i + \beta_j$. Аналогичный расчет произведем для всех остальных нулевых элементов матрицы, условно заменяя их на ∞. В первую очередь будем исключать из гамильтонова контура ту дугу, для которой сумма констант приведения $\gamma_{\overline{(i,j)}}$ является наибольшей, так как в этом случае произойдет наиболее резкое изменение оценки.

Предположим, что для дуги (r, s) сумма констант приведения максимальна, т.е. $\gamma_{\overline{(r,s)}} = \max\{\gamma_{\overline{(i,j)}}\}$. Тогда, исключив дугу (r, s) из гамильтонова контура, получим подмножество контуров $\{\overline{(r,s)}\}$ и, включив эту дугу в гамильтонов контур, получим подмножество контуров $\{(r,s)\}$.

Нижняя граница подмножества контуров $\{\overline{(r,s)}\}$

$$\varphi_{\overline{(r,s)}} = \varphi_{(R)} + \gamma_{\overline{(r,s)}} = \gamma + \gamma_{\overline{(r,s)}}.$$

Нижняя граница подмножества контуров $\{(r,s)\}$

$$\varphi_{(r,s)} = \varphi_{(R)} + \gamma_{(r,s)} = \gamma + \gamma_{(r,s)},$$

где $\gamma_{(r,s)}$ равна сумме констант приведения сокращенной матрицы (сокращенная матрица получена из исходной путем вычеркивания r-й строки s-го столбца и замены элемента (s, r) на ∞).

При практических расчетах процесс разбиения множества гамильтоновых контуров на подмножества продолжается до тех пор, пока не будет получена матрица расстояний размерности 2×2.

После приведения этой матрицы нулевые ее элементы, расположенные симметрично, прямо указывают на дуги, которые необходимо включить в гамильтонов контур. Длина гамильтонова контура определяется добавлением к нижней границе соответствующего подмножества контуров суммы констант приведения матрицы 2×2. Все рассмотренные действия для большей четкости сформулируем в виде алгоритма.

1. Приводим матрицу расстояний по строкам и столбцам. Находим нижнюю границу всего множества маршрутов:

$$\varphi_{(R)} = \gamma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j.$$

2. Каждый нуль в приведенной матрице условно заменяем на ∞ и находим сумму констант приведения $\gamma_{\overline{(i,j)}} = \alpha_i + \beta_j$. Значения $\gamma_{\overline{(i,j)}}$ записываем в соответствующие клетки рядом с нулями.

3. Априорно исключаем из гамильтонова контура ту дугу (i, j), для которой сумма констант приведения максимальна (исключение дуги (i, j) достигается заменой элемента в a_{ij} матрице расстояний на ∞). В результате исключения дуги (i, j) будет образовано подмножество гамильтоновых контуров $\{\overline{(i,j)}\}$.

4. Приводим полученную матрицу расстояний и определяем нижнюю границу $\varphi_{\overline{(i,j)}}$ подмножества гамильтоновых контуров $\{\overline{(i,j)}\}$.

5. Априорно включаем дугу (i, j) в гамильтонов контур, что ведет к исключению в матрице, полученной после выполнения п. 2, i-й строки и j-го столбца. Заменяем один из элементов матрицы на ∞ (в простейшем случае симметричный), чтобы не допустить образования негамильтонова контура.

6. Приводим сокращенную матрицу и находим нижнюю границу $\varphi_{(i,j)}$ подмножества маршрутов $\{\overline{(i,j)}\}$.

7. Проверяем размерность сокращенной матрицы. Если сокращенная матрица размерности 2 × 2, то переходим к выполнению п. 9; если же размерность матрицы больше, чем 2 × 2, то — к п. 8.

8. Сравниваем нижние границы подмножеств гамильтоновых контуров $\varphi_{\overline{(i,j)}}$ и $\varphi_{(i,j)}$ и переходим к выполнению п. 2. При этом, если $\varphi_{\overline{(i,j)}} < \varphi_{(i,j)}$, то разбиению подлежит подмножество $\{\overline{(i,\ j)}\}$ (дальнейшему анализу подвергается матрица, полученная в результате последнего выполнения п.4). Если же $\varphi_{(i,j)} < \varphi_{\overline{(i,j)}}$, разбиению подлежит подмножество $\{(i,\ j)\}$ (дальнейшему анализу подвергается матрица, полученная после последнего выполнения п. 6).

Разбиение множества гамильтоновых контуров на подмножества сопровождаем построением дерева (рис. 4.1).

9. Определяем гамильтонов контур и его длину.

10. Сравниваем длину полученного контура с нижними границами оборванных ветвей. Если длина гамильтонова контура не превышает нижних границ оборванных ветвей дерева, то задача решена. Если же длина контура больше нижней границы некоторых ветвей, то, действуя по алгоритму, развиваем эти ветви до тех пор, пока не получим маршрута с меньшей длиной или не убедимся, что его не существует.

Пример 4.1. Матрица расстояний между пятью городами представлена в табл. 4.2. Необходимо найти гамильтонов контур объезда городов минимальной длины.

Таблица 4.2

i \ j	1	2	3	4	5	α_i
1	∞	9	8	4	10	4
2	6	∞	4	5	7	4
3	5	3	∞	6	2	2
4	1	7	2	∞	8	1
5	2	4	5	2	∞	2

Для нахождения нижней границы множества всех гамильтоновых контуров $\varphi_{(R)}$ осуществляем приведение матрицы расстояний. Для этого в дополнительный столбец (табл. 4.2) запишем константы приведения $\alpha_i, i = \overline{1, 5}$, по строкам. Матрица, приведенная по строкам, представлена в табл. 4.3. В дополнительной строке этой матрицы записаны константы приведения по столбцам. Выполнив приведение по столбцам, получим полностью приведенную матрицу (табл. 4.4).

Нижняя граница множества всех гамильтоновых контуров R

$$\varphi_{(R)} = \gamma = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i + \sum_{j=1}^{5} \beta_j = 13 + 1 = 14.$$

Найдем дугу, исключение которой максимально увеличило бы нижнюю границу, и разобьем все множество гамильтоновых контуров относительно этой дуги на два подмножества. Для этого определим сумму констант приведения для всех клеток матрицы с нулевыми элементами, условно (мысленно) заменяя нули на ∞. Заменим, например, элемент $a_{14} = 0$ (табл. 4.4) на ∞. Тогда константа приведения по 1-й строке равна 4 (минимальному элементу этой строки), а по 4-му столбцу — нулю (минимальному элементу

Таблица 4.3

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	∞	5	4	0	6
2	2	∞	0	1	3
3	3	1	∞	4	0
4	0	6	1	∞	7
5	0	2	3	0	∞
β_j	0	1	0	0	0

Таблица 4.4

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	∞	4	4	0(4)	6
2	2	∞	0(2)	1	3
3	3	0(1)	∞	4	0(3)
4	0(1)	5	1	∞	7
5	0(0)	1	3	0(0)	∞

этого столбца). Сумма констант приведения $\gamma_{\overline{(1,4)}} = \alpha_1 + \beta_4 = 4 + 0 = 4$ записана в скобках в клетке (1, 4). Аналогично вычислены все остальные константы и записаны в соответствующие клетки табл. 4.4. Наибольшая из сумм констант приведения, равная 4, соответствует дуге (1, 4). Следовательно, множество R разбивается на подмножества $\{\overline{(1,4)}\}$ и $\{(1,4)\}$. Таким образом, мы приступим к образованию дерева (рис. 4.1).

Исключение дуги (1, 4) из искомого гамильтонова контура осуществляется реальной заменой в матрице из табл. 4.4 элемента $a_{14} = 0$ на ∞. Такая замена позволяет произвести дополнительное приведение матрицы путем вычитания из элементов 1-й строки 4 и из элементов 4-го столбца — 0. В результате приведения матрица расстояний для подмножества $\{\overline{(1,4)}\}$ примет вид, показанный в табл. 4.5, а нижняя граница длин гамильтоновых контуров этого подмножества $\varphi_{\overline{(1,4)}} = \varphi_{(R)} + \gamma_{\overline{(1,4)}} = 14 + 4 = 18$.

Включение дуги (1, 4) в искомый контур ведет к исключению элементов 1-й строки и 4-го столбца табл. 4.4. Кроме того, элемент $a_{41} = 0$ заменяем на ∞, чтобы не допустить образования негамильтонова контура (1–4–1). Сокращенная матрица приведена в табл. 4.6. Эта матрица допускает дополнительное приведение на 1 единицу только по 4-й строке. Константы приведения записаны в столбце α_i и строке β_j. Сумма констант приведения сокращенной матрицы, полученной в результате включения дуги (1, 4) в искомый контур, составит:

$$\gamma_{(1,4)} = \sum_i \alpha_i + \sum_i \beta_j = 1 + 0 = 1.$$

Таблица 4.5

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	∞	0	0	∞	2
2	2	∞	0	1	3
3	3	0	∞	4	0
4	0	5	1	∞	7
5	0	1	3	0	∞

Таблица 4.6

$i \backslash j$	1	2	3	5	α_i
2	2	∞	0	3	0
3	3	0	∞	0	0
4	∞	5	1	7	1
5	0	1	3	∞	0
β_j	0	0	0	0	

После приведения сокращенная матрица имеет вид табл. 4.7. Нижняя граница длин гамильтоновых контуров подмножества {(1,4)}

$$\varphi_{(R)} + \gamma_{(1,4)} = 14 + 1 = 15.$$

Так как после сокращения получена матрица 4 × 4, переходим к сравнению оценок $\varphi_{\overline{(1,4)}}$ и $\varphi_{(1,4)}$. Дальнейшему разбиению (ветвлению) подлежит подмножество {(1, 4)}, так как его нижняя граница меньше.

Найдем дугу, исключение которой максимально увеличило бы нижнюю границу. Для этого определим сумму констант приведения для каждой клетки с нулем (табл. 4.7). Максимальная сумма констант приведения $\gamma_{\overline{(4,3)}} = \alpha_4 + \beta_3 = 4 + 0 = 4$ соответствует дуге (4, 3). Следовательно, подмножество гамильтоновых контуров {(1, 4)}, в свою очередь, разбиваем на два подмножества: {(1, 4), (4, 3)} и {(1, 4), (4, 3)}. После замены элемента $a_{43} = 0$ (табл. 4.7) на ∞ и приведения матрица принимает вид табл. 4.8. Нижняя граница длин гамильтоновых контуров подмножества {(1, 4), (4, 3)}.

$$\varphi_{[(1,4),\overline{(4,3)}]} = \varphi_{(1,4)} + \gamma_{\overline{(4,3)}} = 15 + 4 = 19.$$

Таблица 4.7

i \ j	1	2	3	5
2	2	∞	0(2)	3
3	3	0(1)	∞	0(3)
4	∞	4	0(4)	6
5	0(3)	1	3	∞

Таблица 4.8

i \ j	1	2	3	5
2	2	∞	0	3
3	3	0	∞	0
4	∞	0	∞	2
5	0	1	3	∞

Включение дуги (4, 3) в гамильтонов контур приводит к исключению из него дуг (4, 2) и (4, 5), т.е. элементов 4-й строки матрицы (табл. 4.7), а также дуг (2,3) и (5,3), т.е. элементов 3-го столбца. Кроме того, исключаем из контура дугу (3, 1), чтобы не допустить образования негамильтонова контура (1—4—3—1). Сокращенная матрица (табл. 4.9) допускает приведение по 2-й строке на 2 единицы. После приведения эта матрица имеет вид табл. 4.10.

Таблица 4.9

i \ j	1	2	5	α_i
2	2	∞	3	2
3	∞	0	0	0
5	0	1	∞	0
β_j	0	0	0	

Таблица 4.10

i \ j	1	2	5
2	0(1)	∞	1
3	∞	0(1)	0(1)
5	0(1)	1	∞

Сумма констант приведения

$$\gamma_{(4,3)} = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 2 + 0 = 2,$$

а нижняя граница гамильтоновых контуров {(1, 4), (4, 3)}

$$\varphi_{[(1,4),(4,3)]} = \varphi_{(1,4)} + \gamma_{(4,3)} = 15 + 2 = 17.$$

Так как $\varphi_{[(1,4),(4,3)]} = 17 < \varphi_{[(1,4),\overline{(4,3)}]} = 19$, дальнейшему ветвлению подлежит подмножество $\{(1,4),(4,3)\}$. Все суммы констант приведения для клеток с нулями (табл. 4.10) равны, поэтому выбираем любую из дуг, например (2, 1), и разбиваем подмножество $\{(1,4),(4,3)\}$ на два новых подмножества $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}\}$ и $\{(1,4),(4,3),(2,1)\}$. После исключения дуги (2, 1) и приведения матрицы расстояний получим новую матрицу (табл. 4.11), для которой $\gamma_{\overline{(2,1)}} = 1$.

Таблица 4.11

$i \backslash j$	1	2	5
2	∞	∞	0(∞)
3	∞	0(1)	0(0)
5	0(∞)	1	∞

Нижняя граница подмножества $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}\}$

$$\varphi_{[(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}]} = \varphi_{[(1,4),(4,3)]} + \gamma_{\overline{(2,1)}} = 17 + 1 = 18.$$

Включение дуги (2, 1) в контур приводит к исключению 2-й строки и 1-го столбца табл. 4.10, а также дуги (3, 2). Сокращенная матрица имеет вид табл. 4.12. Сумма констант приведения этой матрицы $\gamma_{(2,1)} = 1$. Приведенная матрица представлена в табл.4.13. Нижняя граница подмножества контуров $\{(1,4),(4,3),(2,1)\}$

$$\varphi_{[(1,4),(4,3),(2,1)]} = \varphi_{[(1,4),(4,3)]} + \gamma_{(2,1)} = 17 + 1 = 18.$$

Так как в результате сокращения получена матрица 2×2 (табл. 4.13), то в искомый гамильтонов контур включаем дуги (3, 5) и (5, 2), соответствующие нулевым элементам этой матрицы. Сумма констант приведения табл. 4.13 равна нулю. Следовательно, длина

Таблица 4.12

$i \backslash j$	2	5
3	∞	0
5	1	∞

Таблица 4.13

$i \backslash j$	2	5
3	∞	0
5	0	∞

гамильтонова контура совпадает с нижней границей подмножества $\{(1,4),(4,3),(2,1)\}$ и равна 18.

В соответствии с деревом ветвлений (рис. 4.1) гамильтонов контур образуют дуги (1, 4), (4, 3), (2, 1), (3, 5), (5, 2). Расположим их начиная с города 1 так, чтобы конец одной совпадал с началом другой. Получим гамильтонов контур, соответствующий последовательности объезда городов коммивояжером $\mu = (1-4-3-5-2-1)$.

Длина найденного маршрута объезда городов не превышает нижних границ оборванных ветвей, следовательно, она является оптимальной. Однако возможно, что гамильтонов контур μ не единственный, так как имеются подмножества контуров $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}\}$ и $\{\overline{(1,4)}\}$, нижние границы которых также равны 18.

Продолжим ветвление подмножества $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}\}$. Следуя алгоритму, найдем сумму констант приведения для каждой клетки с нулем табл. 4.11. Максимальная сумма, равная ∞, приходится на две клетки: (2, 5) и (5, 1). Выбираем любую дугу, например (2, 5), и разбиваем подмножество $\{(1,4),(4,3),(2,1)\}$ на два подмножества $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)},\overline{(2,5)}\}$ и $\{(1,4),(4,3),(2,1),(2,5)\}$. Нижние границы подмножеств:

$$\varphi_{[(1,4),(4,3),\overline{(2,1)},\overline{(2,5)}]} = 18 + \infty = \infty;$$

$$\varphi_{[(1,4),(4,3),\overline{(2,1)},\overline{(2,5)}]} = 18 + 0 = 18.$$

Продолжив решение, найдем второй оптимальный гамильтонов контур $\mu' = (1 - 4 - 3 - 2 - 5 - 1)$.

Читателю предлагается найти еще один оптимальный гамильтонов контур, продолжая развитие ветви, соответствующей подмножеству контуров $\{\overline{(1,4)}\}$. Напомним, что применять алгоритм в этом случае следует к матрице, приведенной в табл. 4.5.

4.3. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ПОСТРОЕНИЯ КОЛЬЦЕВЫХ МАРШРУТОВ

Для решения задачи коммивояжера использован пакет программ сетевой оптимизации (Network Optimization) — **net.exe**, разработанный кафедрой дискретной математики и алгоритмики Белорусского государственного университета (автор Н.Н. Писарук). Пакет включает ряд программ, позволяющих решать задачи определения максимального потока на сети, потока минимальной стоимости, нахождения кратчайшего пути и ряд других.

Информационная технология решения задачи коммивояжера (нахождения цикла Гамильтона минимальной стоимости (длины) — Min Cost Hamilton Cycle) позволяет использовать графическое (Craphic) и табличное представление исходных данных (List). Итак, чтобы решить задачу, вызываем пакет **net.exe.** В меню **net — Net1** выполняем **M1** по команде **Problem** и в открывшемся подменю **M1** по — **Choose Ctr+C.** На экране — новое окно **Problem Dialog**, в котором помещены все имена проблем пакета. Отмечаем в этом окне проблему **Cycles** (циклы) и выделяем цель **Min Cost Hamilton Cycle** (минимальный цикл Гамильтона), **OK**. Активизируем команду **Window** в меню **net — Net1**, в открывшемся подменю щелчком **M1** по команде **New Window** вызываем диалоговое окно **Window Dialog.** Отметив в этом окне команду **Craphic** и щелкнув **OK** в поле открывшегося окна (щелчком МП курсор преобразуется в следующие символы: ⊗ — изображает вершины графика при щелчке **М1**; — изображает дуги (линии со стрелками) протаскиванием его при нажатой кнопке **М1**, + — щелчком **М1** удаляет элементы графика (вершины, дуги); **?** — щелчком **М1** вызывает окно для занесения числовых параметров (длин дуг, стоимости и др.), можно построить график, используя указанные символы, и рассчитать его параметры. Однако в поле окна знаком ⊗ можно изобразить только вершины графика, соответствующие городам (объектам), и перейти к дальнейшему вводу информации табличным способом. Для этого щелчками **М1** активизируем команды **Window, New Window** и в диалоговом окне **Window Dialog** отмечаем команду **List, OK**. На экране — таблица (окно **Net 1:2**) с тремя полями. Вид ее с частью информации из примера 4.1 (табл.4.2) показан в табл. 4.14.

Таблица 4.14

net – Net 1:2					
Name	**Tail**	**Head**	**Cost**	**Tail**	**Head**
1	1	2	9		
2	1	3	8		
3	1	4	4		
4	1	5	10		
5	2	1	6		
	2	3	4		
	2	4	5		
	. . . .				

Переводим курсор в поле **Name** (имя) и набираем номера вершин графика, каждый раз после набора цифры щелкая **М1** ниже ее. Далее переводим курсор в среднее поле, в графах которого указываются номера пары городов (вершин) и стоимость проезда (расстояние) между ними. После **М1** в строке этого поля в каждой графе его видны три цифры: 1 1 0. После **М1** возле первых двух цифр появляется кнопка с двумя стрелками , щелкая по ним, вместо единиц получаем нужные цифры. Устанавливаем необходимые номера вершин (городов) и переводим курсор в графу **Cost**, набираем число, отражающее стоимость проезда или расстояние между городами.

После набора данных, щелкнув по команде ключ ( ) и кнопке со стрелкой вниз справа от ключа, запускаем программу на выполнение. На экране — заставка **net** со словами: **Succeesfull termination!** (успешное завершение) и кнопкой **OK**. Щелкнув по ней, на экране красными квадратиками с птичкой отмечен **Subgraph** (подграф) — дуги, образующие маршрут коммивояжера. После щелчка по заглавию окна **Net** с номером на единицу меньшим на экране — графическое изображение гамильтонова цикла с указанием расстояний (стоимостей проезда) между городами. На рис. 4.2. изображен гамильтонов цикл минимальной длины объезда пяти городов ($\mu = (1 \to 4 \to 3 \to 5 \to 2 \to 1)$), $L_{\min}^{(\mu)} = 18$.

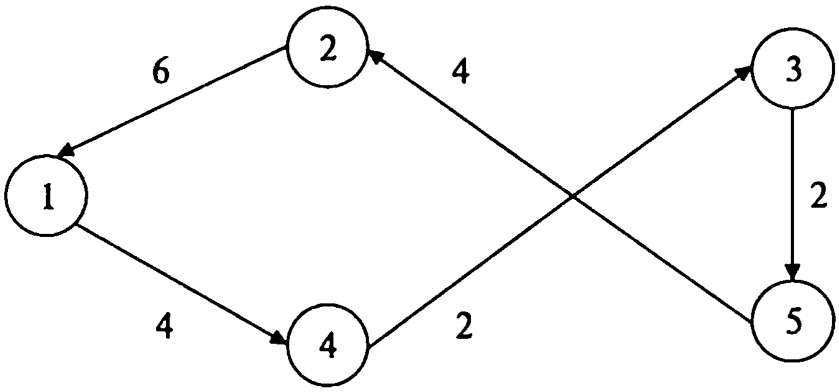


Рис. 4.2

Упражнения

4.1. Молочный комбинат осуществляет поставку своей продукции в ряд торговых точек города автомобильным транспортом. Требуется определить маршрут минимальной длины доставки продукции во все торговые точки и возврата на комбинат для очередной загрузки транспортного средства. Расстояния между торговыми точками (км) известны и представлены в табл. 4.15.

Таблица 4.15

i \ j	Молочный комбинат 1	Магазины			
		2	3	4	5
Молочный комбинат 1	0	5	7	9	2
Магазин 2	4	0	5	7	6
Магазин 3	7	4	0	5	8
Магазин 4	6	6	7	0	4
Магазин 5	3	7	8	5	0

4.2. Найти маршрут минимальной стоимости объезда четырех городов. Стоимости проезда (тыс. ден. ед.) между каждой парой городов известны и представлены в табл. 4.16.

4.3. На металлообрабатывающем оборудовании необходимо обработать шесть партий деталей. Переход на обработку новой партии деталей требует переналадки оборудования. Время переналадки оборудования (мин) при переходе от обработки i-й ($i = \overline{1,6}$) партии деталей к обработке j-й ($j = \overline{1,6}$) партии деталей представлено матрицей (табл. 4.17).

Найти такую последовательность запуска партий деталей в обработку, при которой затраты времени на переналадку оборудования будут минимальными.

Таблица 4.16

i \ j	1	2	3	4
1	0	200	400	500
2	250	0	600	800
3	500	700	0	850
4	600	750	800	0

Таблица 4.17

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0	20	25	30	15	10
2	20	0	30	15	20	18
3	30	25	0	20	40	30
4	25	20	20	0	30	15
5	35	25	30	24	0	20
6	15	20	30	20	18	0

Указание. При решении задач 4.1—4.3 по программе **net.exe** элементы $a_{ii} = 0$ в ЭВМ не вводятся, а при решении вручную методом ветвей и границ их необходимо заменить на $a_{ii} = \infty$ $(i = \overline{1, n})$.

5. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

5.1. ПОСТАНОВКА И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧИ

Задачи параметрического программирования являются обобщением задач линейной оптимизации. Это обобщение состоит в том, что данные в задаче линейной оптимизации считают не постоянными величинами, а функциями, определенным образом зависящими от некоторых параметров.

Если предположить, например, что произведенная предприятием продукция подлежит хранению, то ее стоимость будет складываться из двух частей:

а) постоянной — стоимости продукции на момент изготовления;

б) переменной, зависящей от срока хранения продукции.

Целевую функцию задачи оптимального планирования такого производства можно выразить через коэффициенты, линейно зависящие от одного параметра, в частности от времени t.

Часто на практике встречаются задачи, в которых значения коэффициентов целевой функции известны лишь приближенно. Представив их в виде линейных функций параметра t, можно изучить поведение решений задач при различных значениях этих коэффициентов. Аналогично можно провести исследование для случая, когда изменяются коэффициенты системы ограничений.

Рассмотрим зависимость от параметра t только коэффициентов целевой функции. Задачу в этом случае ставят следующим образом: пусть параметр $t \in [\alpha,\beta]$, где α и β — произвольные действительные числа. Необходимо найти для каждого t на отрезке $[\alpha, \beta]$ свой вектор $\overline{x^*} = (x_1^*,..., x_2^*)$, максимизирующий

$$f_t = \sum_{j=1}^{n}(c_j + d_j t)x_j, \tag{5.1}$$

при условиях

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_i \ (i = \overline{1, m}), \\ x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}). \end{cases} \tag{5.2}$$

В выражении (5.1) числа c_j и d_j известны и постоянны. Остановимся на геометрической интерпретации задачи. Пусть система ограничений (5.2) совместна и определяет выпуклый многогранник. Уравнению $\sum\limits_{j=1}^{n}(c_j + d_j t)x_j = 0$ соответствует семейство гиперплоскостей, проходящих через начало координат. Если параметру придать некоторое значение $t = \alpha_0$, то гиперплоскость займет вполне определенное положение. Отодвигая ее от начала координат в направлении возрастания функции, получим решение в точке A (рис. 5.1).

Придадим параметру другое значение $t = \alpha_1$ и снова найдем на графике точку оптимума. Гиперплоскость $\sum_{j=1}^{n}(c_j + d_j\alpha_1)x_j = 0$ вследствие изменения параметра t повернется вокруг начала координат на некоторый угол. Отодвигая эту гиперплоскость от начала координат, получим оптимальное решение в той же вершине A. Однако значение функции при $t = \alpha_1$ изменится, так как оно равно взвешенному отклонению точки A от исходной гиперплоскости. При $t = \alpha_2$ гиперплоскость будет параллельна ребру AB. Оптимальное решение в этом случае будет достигаться в любой точке отрезка AB. Увеличивая t дальше (при $t > \alpha_2$), получим оптимальное решение только в вершине B. Для этой вершины будет свой интервал изменения параметра t.

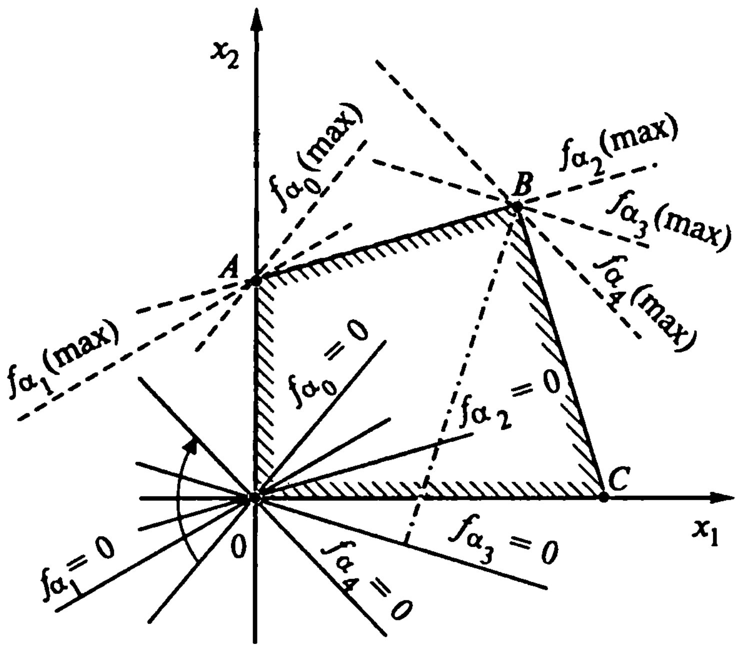


Рис. 5.1

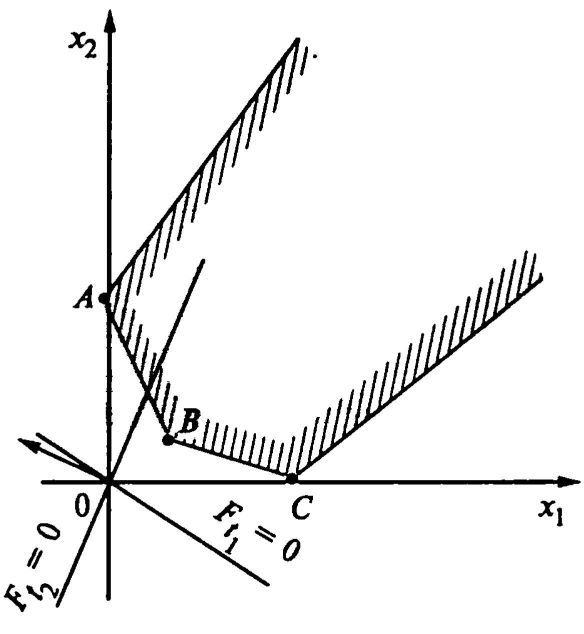


Рис. 5.2

Из постановки и геометрической интерпретации задачи следует, что при различных значениях параметра t оптимальный план может оказаться не одним и тем же. Поэтому в задаче параметрического программирования нужно не просто найти оптимальное решение, а требуется разбить отрезок $[\alpha,\beta]$ на конечное число интервалов, содержащих такие значения t, для которых оптимальное базисное решение задачи достигается в одной и той же вершине многогранника.

Если многогранник неограничен, то гиперплоскость $f_t = 0$ при некоторых значениях параметра t может занять такое положение, что f_t(max) окажется неограниченным. Положение гиперплоскости $f_{t_1} = 0$ (рис. 5.2) соответствует неограниченному значению функции, а положение гиперплоскости $f_{t_2} = 0$ — максимальному.

5.2. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пример 5.1. Определить интервал изменения параметра t и найти значения переменных x_1 и x_2, при которых максимум линейной функции $f_t = 4x_1 + (2+t)x_2$, $t \in [0;8]$, достигается в одной и той же вершине ОДР системы ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 40, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Находим ОДР системы ограничений. Это многоугольник $ABCD$ (рис. 5.3).

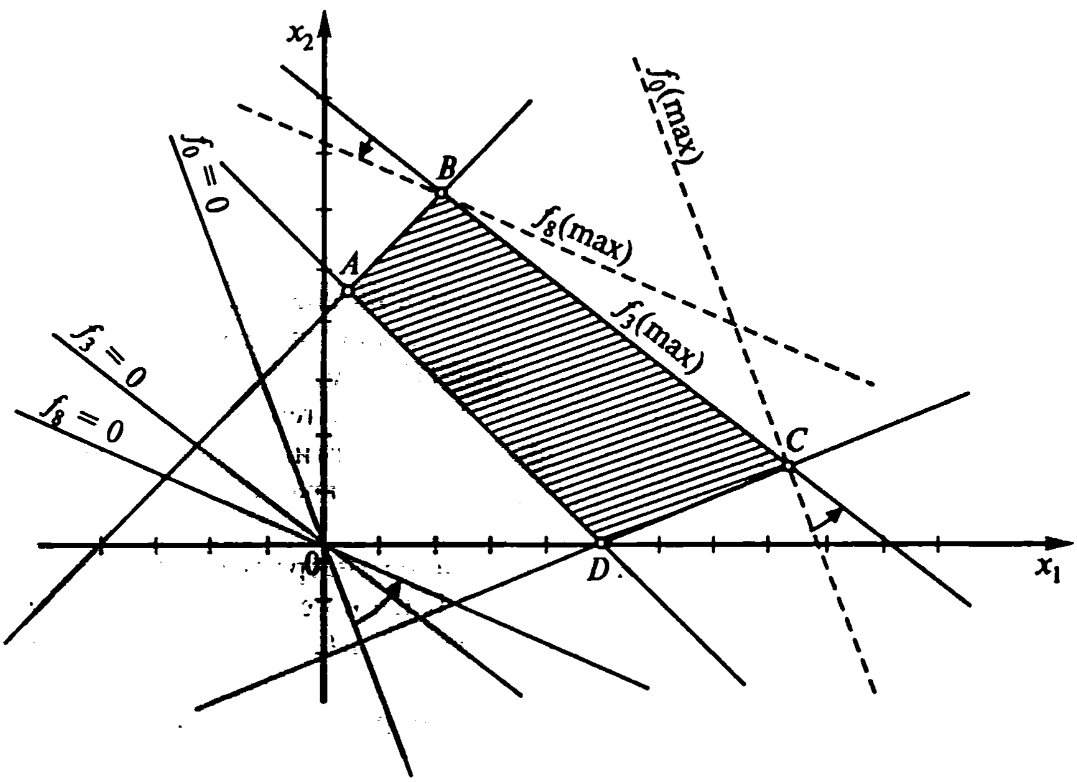


Рис. 5.3

Придадим параметру самое малое значение $t = 0$, тогда получим функцию с постоянными коэффициентами

$$f_0 = 4x_1 + 2x_2.$$

Максимальное значение этой функции достигается в вершине C.

Далее приравняем f_t к нулю и найдем уравнение разрешающей прямой при любом t:

$$x_2 = -\frac{4}{2+t}x_1.$$

Запишем угловой коэффициент k_f этой прямой и исследуем его поведение при изменении параметра t:

$$k_f = -\frac{4}{2+t}.$$

Его начальное значение при $t = 0$ будет $k_f = -2$. Найдем производную углового коэффициента по параметру t:

$$(k_f)'_t = \left(-\frac{4}{2+t}\right)'_t = \frac{4}{(2+t)^2}.$$

Очевидно, при любом t производная положительна, и угловой коэффициент при увеличении t возрастает. Найдем предел его возрастания:

$$\lim_{t\to+\infty} k_f = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{4}{2+t}\right) = -0.$$

Так как при $t \to +\infty$ угловой коэффициент k_f приближается к нулю со стороны отрицательных значений, то разрешающая прямая поворачивается против часовой стрелки до предельного горизонтального положения. (Напомним, что при вертикальном положении прямой угловой коэффициент, как функция, терпит разрыв. При вращении прямой против часовой стрелки от оси абсцисс до вертикального положения угловой коэффициент возрастает от 0 до $+\infty$, при дальнейшем вращении прямой он возрастает от $-\infty$ до 0.)

В рассматриваемом примере при изменении параметра t от нуля до некоторого значения максимум функции будет в вершине C. Далее в некоторый фиксированный момент времени оптимум будет достигаться на отрезке BC, а затем он перейдет в точку B и останется в ней для всех больших значений t.

Определим значение параметра t, при котором решение задачи окажется на отрезке BC. Поскольку в этот момент прямая BC и разрешающая прямая должны быть параллельны, приравняем их угловые коэффициенты. Угловой коэффициент прямой BC $k_{BC} = -4/5$, *следовательно,*

$$-\frac{4}{2+t} = -4/5, \text{ или } t = 3.$$

Итак, при $0 \le t < 3$ оптимальное решение задачи будет в вершине C (8,33; 1,33), при $t = 3$ оно достигается на всем отрезке BC, а при $3 < t \le 8$ — в точке B (2,22; 6,22).

Упражнения

Решить графическим методом задачи:

5.1

$$f_t = (2+2t)x_1 + (4-2t)x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_2 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad t \in [1; 15].$$

5.2.

$$f_t = tx_1 + (1+t)x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad t \in [1; 7].$$

5.3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Алгоритм решения задачи (5.1)–(5.2) состоит из двух этапов.

Этап I. Параметру t задают фиксированное значение, например $t = \alpha$. Этим задача приводится к задаче линейной оптимизации. Решая эту задачу симплекс-методом, находят вершину, в которой f_t достигает максимума.

Этап II. Определяют интервал изменения параметра t, для которого максимум f_t достигается в одной и той же вершине многогранника, определяемого системой ограничений (5.2). Найденный интервал исключают из отрезка $[\alpha, \beta]$. Для оставшейся части отрезка снова решают задачу симплекс-методом, т.е. переходят к этапу I. Решение продолжается до тех пор, пока весь отрезок $[\alpha, \beta]$ не будет разбит на частичные интервалы.

Подробно алгоритм решения рассмотрим на примере.

Пример 5.2. Найти интервалы изменения параметра t на отрезке $[\alpha, \beta]$, для которых $f_t = \sum_{j=1}^{n}(c_j + d_j t)x_j$ достигает максимума в одной и той же точке ОДР системы ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \ (i = \overline{1,m});$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}).$$

Э т а п I.

1. Полагаем $t = \alpha$. Тогда функция f_t будет иметь вид

$$f_\alpha = \sum_{j=1}^{n} (c_j + d_j\alpha)x_j. \tag{5.3}$$

Все данные задачи заносим в жорданову таблицу. В строку f_α этой таблицы в каждый столбец записываем число, равное сумме чисел c_j и $d_j\alpha$. Кроме того, добавим в таблицу две строки для записи функций f_t с произвольным параметром t (табл. 5.1). При этом в предпоследней строке записываем коэффициенты c_j, а в последней — d_j. Чтобы получить f_t, нужно умножить коэффициенты последней строки на t и сложить их с коэффициентами предпоследней.

Таблица 5.1

	1	$-x_1$	...	$-x_n$
$x_{n+1} =$	b_1			
...	...		(a_{ij})	
$x_{n+m} =$	b_m			
$f_\alpha =$	0	$c_1 + d_1\alpha$	...	$c_n + d_n\alpha$
$f_t =$	0	c_1	...	c_n
	0	d_1	...	d_n

2. Находим оптимальный план задачи обычным симплекс-методом, подвергая преобразованию и элементы последних двух строк.

Предположим, что план, представленный в табл. 5.2, является оптимальным. Тогда все коэффициенты f_α-строки неотрицательны:

$$p_j + q_j\alpha \geq 0.$$

Поскольку оптимальный план найден, переходим к этапу II.

Таблица 5.2

	1	$-x_{n+1}$	...	$-x_s$	$-x_{s+1}$	...	$-x_n$
$x_1 =$	b_1						
...	...						
$x_r =$	b_r			(b_{ij})			
$x_{r+1} =$	b_{r+1}						
$x_{n+m} =$	b_{n+m}						
f_α	$P + Q\alpha$	$p_1 + q_1\alpha$	...	$p_s + q_s\alpha$	$p_{s+1} + q_{s+1}\alpha$	...	$p_n + q_n\alpha$
f_t	P	p_1	...	p_s	p_{s+1}	...	p_n
	Q	q_1	...	q_s	q_{s+1}	...	q_n

Этап II.

1. Находим значения параметра t, при которых план в табл. 5.2 будет оставаться оптимальным (максимум f_t достигается в той же точке). Для этого необходимо, чтобы все коэффициенты функции f_t были неотрицательны:

$$\begin{cases} p_1 + q_1 t \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_n + q_n t \geq 0. \end{cases} \qquad (5.4)$$

Из системы (5.4) видно, что во всех случаях, кроме $q_j = 0$ (при $q_j = 0$ неравенство $p_j + q_j t \geq 0$ выполняется при любых значениях t; следовательно, на столбец, в котором находится $q_j = 0$, можно не обращать внимания), границей изменения параметра t служит отношение $-p_j / q_j$. Поэтому просматриваем элементы q_j последней строки таблицы: если все они больше нуля, переходим к п. 2; если все они меньше нуля — к п. 3; если же среди элементов q_j имеются и положительные, и отрицательные — к п. 4.

2. Пусть все $q_j > 0$. Среди отношений $-p_j / q_j$ выбираем наибольшее. Верхней границы в этом случае для t не существует. Таким образом,

$$\alpha_1 = \max_j \left(-\frac{p_j}{q_j} \right) \leq t < +\infty = \alpha_2. \qquad (5.5)$$

В интервале $[\alpha_1, \alpha_2)$ функция f_t достигает максимума в той же вершине, что и при $t = \alpha$, следовательно, $t \in [\alpha_1, \alpha_2)$.

3. Пусть все $q_j < 0$. Среди отношений $-p_j / q_j$ выбираем наименьшее. Если взять $t \leq \min_j(-p_j / q_j)$, то все условия (5.4) будут удовлетворены. Нижней границы для t в этом случае не существует, поэтому параметр можно уменьшать бесконечно. Значит,

$$\alpha_1 = -\infty < t < \min_j \left(-\frac{p_j}{q_j} \right) = \alpha_2. \qquad (5.6)$$

Как и прежде, $t \in (\alpha_1, \alpha_2]$.

4. Пусть среди элементов q_j имеются как положительные, так и отрицательные. Разделим систему неравенств (5.4) на две подсистемы соответственно знакам коэффициентов q_j. Тогда из подсистемы неравенств с $q_j > 0$ получим: $\max\limits_{q_j>0} \left(-\frac{p_j}{q_j} \right) \leq t$, а из второй подсистемы с $q_j < 0$ будем иметь: $t \leq \min\limits_{q_j<0} \left(-\frac{p_j}{q_j} \right)$.

Следовательно, вся система неравенств (5.4) будет удовлетворяться, если t будет принимать значения

$$\alpha_1 = \max_{q_j>0} \left(-\frac{p_j}{q_j} \right) \leq t \leq \min_{q_j<0} \left(-\frac{p_j}{q_j} \right) = \alpha_2. \qquad (5.7)$$

В этом случае выделенный интервал, в котором функция достигает максимума в той же вершине, что и при $t = \alpha$, является отрезком, $t \in [\alpha_1, \alpha_2]$.

5. Сравниваем полученный интервал $[\alpha_1, \alpha_2]$ с заданным $[\alpha, \beta]$. Независимо от значения α_1 левой границей первого интервала будет α, так как α_1 больше α быть не может. Если $\alpha_2 \geq \beta$, то весь интервал $[\alpha, \beta]$ попадает внутрь интервала $[\alpha_1, \alpha_2]$, и задача решена. Для любого значения параметра $t \in [\alpha, \beta]$ максимум функции f_t достигается в одной и той же вершине (рис. 5.4).

6. Если $\alpha_2 < \beta$, то в интервале $[\alpha, \alpha_2]$ максимум функции f_t будет в найденной вершине (рис. 5.5).

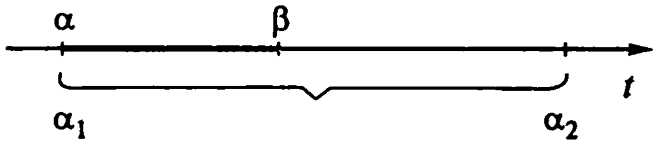


Рис. 5.4

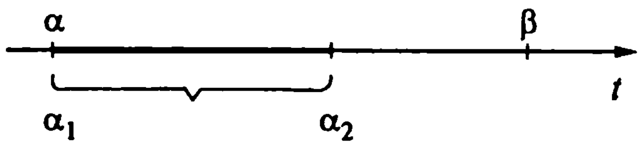


Рис. 5.5

Исключаем указанный интервал из рассмотрения и решаем задачу для оставшегося интервала $[\alpha_2, \beta]$. Для этого полагаем $t = \alpha_2$ и заменяем строку f_α строкой f_{α_2}. В результате замены получим новую таблицу (табл. 5.3).

Таблица 5.3

		1	$-x_{n+1}$	...	$-x_s$	$-x_{s+1}$	...	$-x_n$
$x_1 =$		b_1						
...		...						
$x_r =$		b_r			(b_{ij})			
$x_{r+1} =$		b_{r+1}						
$x_{n+m} =$		b_{n+m}						
$f_{\alpha_2} =$		$P + Q\alpha_2$	$p_1 + q_1\alpha_2$	...	$p_s + q_s\alpha_2$	$p_{s+1} + q_{s+1}\alpha_2$	...	$p_n + q_n\alpha_2$
$f_t =$		P	p_1	...	p_s	p_{s+1}	...	p_n
		Q	q_1	...	q_s	q_{s+1}	...	q_n

Разрешающим столбцом в новой таблице выбирается тот, по которому определено значение $t = \alpha_2$ (в этом столбце на пересечении с f_{α_2}-строкой находится элемент, равный нулю). Если нули находятся в нескольких столбцах, то разрешающим можно брать любой из них.

Разрешающий элемент находим по наименьшему симплексному отношению и делаем один шаг модифицированных жордановых исключений. Получим следующее по порядку оптимальное решение, так как все коэффициенты в строке f_{α_2} при преобразовании не изменятся.

Для найденного решения снова определяем интервал изменения параметра t, для чего переходим к п. 1.

Если в разрешающем столбце не окажется положительных коэффициентов, то функция f_t при $t > \alpha_2$ не ограничена; задача на оставшемся интервале $[\alpha_2, \beta]$ решения не имеет.

Примечание. При отыскании оптимального решения для $t = \alpha$ (при выполнении п. 2 этапа I алгоритма) может оказаться, что функция f_α сверху не ограничена. В этом случае в разрешающем столбце j_0 коэффициент f_α-строки отрицателен ($p_{j_0} + q_{j_0}\alpha < 0$), а все остальные коэффициенты столбца j_0 неположительны.

При значениях $t > \alpha$ на пересечении строки f_t и столбца j_0 будет элемент ($p_{j_0} + q_{j_0}t$). Нас интересуют значения этого элемента, так как они определяют поведение функции при $\alpha \le t \le \beta$. Выберем такое значение $t = t_0$, при котором $p_{j_0} + q_{j_0}t = 0$. Отсюда получаем, что $t_0 = -p_{j_0}/q_{j_0}$.

Если $q_{j_0} \le 0$, то для всех $t \ge \alpha$ коэффициент разрешающего столбца в строке f_t будет отрицательным ($p_{j_0} + q_{j_0}t < 0$). Следовательно, на всем заданном отрезке $[\alpha, \beta]$ целевая функция f_t не ограничена (задача решения не имеет).

Если $q_{j_0} > 0$, то при $\alpha \le t < t_0$ коэффициент, находящийся в разрешающем столбце и f_t-строке, будет отрицательным. Значит, и в этом случае целевая функция не ограничена и задача решения не имеет.

При $t = t_0$ коэффициент $p_{j_0} + q_{j_0}t = 0$, а при дальнейшем увеличении t он будет положительным. К отрезку $[t_0, \beta]$ применяем последовательно весь алгоритм решения задачи.

Пример 5.3. Найти решение задачи из примера 5.1 при изменении параметра t на отрезке [0, 12].

Полагаем $t = 0$. Тогда $f_0 = 4x_1 + 2x_2$(max).

Заносим условие задачи в табл. 5.4 и решаем ее симплекс-методом. Опуская подробности, приведем оптимальное решение (табл. 5.5): $x_1 = 25/3$; $x_2 = 4/3$.

Таблица 5.4

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_3 =$	10	2	−5
$x_4 =$	−5	−1	−1
$x_5 =$	4	−1	1
$x_6 =$	40	4	5
$f_0 =$	0	−4	−2
$f_t =$	0	−4	−2
	0	0	−1

Таблица 5.5

	1	$-x_3$	$-x_6$
$x_4 =$	14/3	1/30	7/30
$x_1 =$	25/3	1/6	1/6
$x_5 =$	11	3/10	1/10
$x_2 =$	4/3	−2/15	1/15
$f_0 =$	36	2/5	4/5
$f_t =$	36	2/5	4/5
	4/3	−2/15	1/15

Определим значения параметра t, при которых оптимальное решение будет в той же вершине, что и при $t = 0$. Так как в последней строке $q_1 = -2/15 < 0$, а $q_2 = 1/15 > 0$, то для определения значений t, при которых максимум будет достигаться в найденной вершине, подставим соответствующие значения в соотношение (5.7), получим

$$-12 = \left(-\frac{4/5}{1/15}\right) \le t \le \left(-\frac{2/5}{-2/15}\right) = 3.$$

Здесь $\alpha_1 = -12$, а $\alpha_2 = 3$. Полученный интервал меньше заданного [0, 12], поэтому его исключаем из дальнейшего рассмотрения и решаем задачу для оставшегося интервала [3, 12]. Для этого полагаем $t = 3$ и вычисляем строку f_3. Заносим элементы f_3-строки в табл. 5.6. Все прочие элементы таблицы оставляем без изменений.

В первом столбце и f_3-строке табл. 5.6 находится нуль, поэтому этот столбец выбираем разрешающим (при $t > 3$ на месте нуля первым появится отрицательное число, и план перестанет быть оптимальным). Находим разрешающий элемент по наименьшему симплексному отношению и переходим к новой таблице (табл. 5.7).

Таблица 5.6

	1	$-x_3$	$-x_6$
$x_4 =$	14/3	1/30	7/30
$x_1 =$	25/3	1/6	1/6
$x_5 =$	11	$\boxed{3/10}$	1/10
$x_2 =$	4/3	−2/15	1/15
$f_3 =$	40	0	1
$f_t =$	36	2/5	4/5
	4/3	−2/15	1/15

Таблица 5.7

	1	$-x_5$	$-x_6$
$x_4 =$	31/9		
$x_1 =$	20/9		
$x_3 =$	110/3		
$x_2 =$	56/9		
$f_3 =$	40	0	1
$f_t =$	64/3	−4/3	2/3
	56/9	4/9	1/9

План $x_1 = 20/9$, $x_2 = 56/9$ в табл. 5.7 оптимален, так как все элементы f_3-строки неотрицательны. В последней строке все элементы $q_j > 0$, следовательно, применяем формулу (5.3) и определяем, что

$$\alpha_2 = \max\left(-\frac{-4/3}{4/9}; -\frac{2/3}{1/9}\right) \le t < +\infty = \alpha_3, \text{ т.е. } 3 \le t < +\infty.$$

Так как $\alpha_3 > \beta$, то задача решена.

Итак, при $0 \le t \le 3$ максимальное значение функции достигается в вершине C(25/3; 4/3), при $3 \le t \le 12$ максимальное значение функции достигается в вершине B (20/9, 56/9) (рис. 5.3). При значении $t = 3$ оптимум достигается в вершинах B и C, а также в их выпуклой линейной комбинации.

Упражнения

5.3. Решить аналитически задачи параметрического программирования, условия которых заданы: а) в упражнении 5.1; б) в упражнении 5.2.

Решить задачи:

5.4.
$$f_t = (1+t)x_1 + (2-t)x_2 + (2-3t)x_3 + (1-2t)x_4 \to \max,$$

$$t \in [1, 20],$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 \le 7, \\ x_1 + \quad + x_3 + 2x_4 \le 3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,4}).$$

5.5.

$$f_t = (10+10t)x_1 + (9+t)x_2 + (7-2t)x_3 \to \max,$$

$$t \in [1, 10],$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + x_3 \le 17, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 40, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1, 3}).$$

5.6.

$$f_t = (3+2t)x_1 + (4+t)x_2 + (1+t)x_3 \to \max,$$

$$t \in [0, 5],$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 500, \\ x_2 + x_3 \le 550, \\ x_2 \le 200, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1, 3}).$$

5.7. Сельскохозяйственное предприятие выращивает фрукты поздних сортов (груши и яблоки). Фрукты могут быть реализованы сразу или заложены для хранения с последующей реализацией по более высокой цене. Прогнозируемая прибыль от реализации 1 т фруктов с течением времени изменяется и выражается следующими зависимостями: $(2 + 0{,}4t)$ ден. ед. для груш и $(1{,}7 + 0{,}5t)$ ден.ед. для яблок, где t — количество месяцев хранения ($t = \overline{0,7}$).

Требуется определить, сколько фруктов каждого вида заложить на хранение, чтобы получить максимум прибыли от реализации продукции, если известно, что вместимость склада равна 250 т, а груш можно заложить на хранение не более 60 т. Трудовые ресурсы предприятия ограниченны и составляют 200 человеко-месяцев, а затраты труда на хранение и реализацию 1 т фруктов равны соответственно 0,7 и 0,47 человеко-месяца.

6. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

6.1. МНОГОШАГОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Динамическое программирование (планирование) представляет собой математический метод для нахождения оптимальных решений многошаговых (многоэтапных) задач. Некоторые из таких задач естественным образом распадаются на отдельные шаги (этапы), но имеются задачи, в которых разбиение приходится вводить искусственно, для того чтобы их можно было решить методом динамического программирования.

Пусть на некоторый период времени T, состоящий из m лет, планируется деятельность группы промышленных предприятий. В начале планируемого периода на развитие предприятий выделяются основные средства Q_0, которые необходимо распределить между предприятиями. В процессе функционирования предприятий выделенные им средства расходуются. Однако каждое из этих предприятий за определенный период времени (хозяйственный год) получает прибыль, зависящую от объема вложенных средств. В начале каждого года имеющиеся средства могут перераспределяться между предприятиями. Требуется определить, сколько средств надо выделить каждому предприятию в начале каждого года, чтобы суммарный доход от всей группы предприятий за весь период времени T был максимальным.

Процесс решения такой задачи является многошаговым. Шаг управления (планирования) здесь — хозяйственный год. Управление процессом состоит в распределении (перераспределении) средств в начале каждого хозяйственного года.

Рассмотрим другую задачу. Пусть имеется груз, состоящий из неделимых предметов различных типов, который нужно погрузить в самолет грузоподъемностью P. Стоимость и вес каждого предмета j-го типа известны и составляют соответственно c_j и p_j ($j = \overline{1, n}$) единиц. Требуется определить, сколько предметов каждого типа надо загрузить в самолет, чтобы суммарная стоимость груза была наибольшей, а вес не превышал грузоподъемности самолета.

Математически задача записывается следующим образом: найти такие целые неотрицательные значения x_j ($j = \overline{1, n}$), которые бы максимизировали функцию

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничении

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le P,$$

где x_j — количество груза j-го типа, позволяющее достичь $\max f(x)$.

Процесс решения сформулированной задачи разобьем на этапы: на первом этапе рассмотрим всевозможные варианты загрузки самолета предметами первого типа и среди них найдем оптимальный. На втором этапе определим оптимальный вариант загрузки самолета предметами первого и второго типов и т.д. Процесс решения задачи продолжается до тех пор, пока не будет найден оптимальный вариант загрузки самолета предметами n типов.

6.2. ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ И РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Метод динамического программирования позволяет одну задачу со многими переменными заменить рядом последовательно решаемых задач с меньшим числом переменных. Процесс решения задачи разбивается на шаги. При этом нумерация шагов, как правило, осуществляется от конца к началу.

Основным принципом, на котором базируется оптимизация многошагового процесса, является *принцип оптимальности Р. Беллмана.* Этот принцип выделяет класс задач, для которых применим вычислительный метод динамического программирования.

Принцип оптимальности. *Оптимальное поведение в задаче должно обладать тем свойством, что каковы бы ни были начальное состояние и начальное решение, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате первоначального решения.*

Принцип оптимальности непосредственно указывает процедуру нахождения оптимального решения. Математически он записывается выражением вида

$$f_{n-l}(S_l) = \underset{U_{l+1}}{\text{optimum}}\ [R_{l+1}(S_l, U_{l+1}) + f_{n-(l+1)}(S_{l+1})], \quad l = \overline{0, n-1}, \qquad (6.1)$$

где $U_l = (u_l^{(1)}, \ldots, u_l^{(m)})$ — решение (управление), выбранное на l-м шаге; $S_l = (s_l^{(1)}, \ldots, s_l^{(m)})$ — состояние системы на l-м шаге; R_l — непосредственный эффект, достигаемый на l-м шаге; f_{n-l} — оптимальное значение эффекта, достигаемого за $n-l$ шагов; n — количество шагов (этапов).

«Optimum» в выражении (6.1) означает максимум или минимум в зависимости от условия задачи.

Все вычисления, дающие возможность найти оптимальное значение эффекта, достигаемого за n шагов, $f_n(S_0)$, проводятся по формуле (6.1), которая носит название *основного уравнения Беллмана* или *рекуррентного соотношения.* Действительно, при вычислении очередного значения функции f_{n-l} используются значение функции $f_{n-(l+1)}$, полученное на предыдущем шаге, и непосредственное значение эффекта $R_{l+1}(S_l, U_{l+1})$, достигаемого в результате выбора решения U_{l+1} при заданном состоянии системы S_l. Процесс вычисления значений функции f_{n-l} ($l = \overline{0, n-1}$) осуществляется при естественном начальном условии

$f_0(S_n) = 0$, которое означает, что за пределами конечного состояния системы эффект равен нулю.

Рассмотрим применение рекуррентного соотношения Беллмана на приведенном примере загрузки самолета.

Как уже было отмечено, процесс решения задачи начинаем с загрузки самолета предметами первого типа ($n = 1$). Обозначив максимальную стоимость груза $f_1(P)$, нетрудно определить, что $f_1(P) = \max\{c_1 x_1\}$ при условиях $p_1 x_1 \le P$, $x_1 = 0, 1, 2, \ldots, [P / p_1]$, где $[P / p_1]$ — наибольшее целое число, не превосходящее P / p_1.

Тогда максимальная стоимость груза

$$f_1(P) = [P / p_1] \cdot c_1.$$

Определим теперь максимальную стоимость груза (обозначим ее $f_2(P)$) при загрузке самолета предметами первого и второго типов, т.е. для $n = 2$.

Если загрузить самолет предметами второго типа в количестве x_2, то по весу предметов первого типа можно взять не больше чем $P - p_2 x_2$, а максимальная стоимость их будет равна $f_1(P - p_2 x_2)$. Тогда максимальная стоимость груза из предметов первого и второго типов определится как сумма стоимости предметов второго типа для всех возможных вариантов значений x_2 и стоимости предметов первого типа $f_1(P - p_2 x_2)$, т.е.

$$f_2(P) = \max_{0 \le x_2 \le [P / p_2]} \{c_2 x_2 + f_1(P - p_2 x_2)\}.$$

Рекуррентное соотношение для загрузки самолета предметами трех типов ($n = 3$) запишется как сумма стоимости предметов третьего типа и стоимости предметов первых двух типов $f_2(P - p_3 x_3)$. Таким образом,

$$f_3(P) = \max_{0 \le x_3 \le [P / p_3]} \{c_3 x_3 + f_2(P - p_3 x_3)\}.$$

Общее рекуррентное соотношение для любого конечного значения n запишется так:

$$f_n(P) = \max_{0 \le x_n \le [P / p_n]} \{c_n x_n + f_{n-1}(P - p_n x_n)\}.$$

Рассмотрим числовой пример, исходные параметры которого следующие: $P = 100$, $n = 3$, $p_1 = 34$, $p_2 = 28$, $p_3 = 25$, $c_1 = 100$, $c_2 = 70$, $c_3 = 65$.

Рассчитаем возможные варианты загрузки самолета предметами первого типа ($n = 1$). Результаты расчетов запишем в табл. 6.1.

Поясним, как получено значение $f_1(P)$ в третьей строке табл. 6.1. Количество предметов первого типа при грузоподъемности самолета $68 \le P \le 100$ будет равно двум ($x_1 = 2$). Тогда стоимость груза определяется произведением $c_1 x_1 = 100 \cdot 2 = 200$.

Расчет для загрузки двумя типами предметов ($n = 2$) приведен в табл. 6.2. Он осуществлен по формуле

$$f_2(P) = \max_{0 \le x_2 \le [P/p_2]} \{c_2 x_2 + f_1(P - P_2 x_2)\}.$$

Таблица 6.1

Грузоподъемность (P)	$f_1(P)$	x_1
0–33	0	0
34–67	100	1
68–100	200	2

Таблица 6.2

Грузоподъемность (P)	$f_2(P)$	x_2
0–27	0	0
28–55	100	0
56–83	200	0
84–100	270	1

Покажем, как рассчитаны параметры четвертой строки табл. 6.2. Отметим, что здесь рассмотрены следующие возможные варианты загрузки самолета:

1. При $x_2=0$ $f_1(P - p_2 x_2) = f_1(P) = 200$.

Значение $f_1(P)$ берется из табл. 6.1.

2. При $x_2=1$ $f_1(P - p_2 x_2) = f_1(P - 28) = f_1(72) = 200$.
3. При $x_2=2$ $f_1(P - p_2 x_2) = f_1(P - 56) = f_1(44) = 100$.
4. При $x_2=3$ $f_1(P - p_2 x_2) = f_1(P - 84) = f_1(16) = 0$.

Таким образом,

$$f_2(100) = \max\begin{Bmatrix} 70 \cdot 0 + f_1(100); \\ 70 \cdot 1 + f_1(72); \\ 70 \cdot 2 + f_1(44); \\ 70 \cdot 3 + f_1(16) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0 + 200; \\ 70 + 200; \\ 140 + 100; \\ 210 + 0 \end{Bmatrix} = 270, \text{ а } x_2 = 1.$$

Расчет параметров загрузки самолета предметами трех типов приведен в табл. 6.3, из которой видно, что максимальная стоимость груза $f_3(100)_{\max} = 270$ при $x_3 = 0$. Так как при $x_3 = 0$ самолет загружается предметами первого и второго типов, то из табл. 6.2 находим, что $f_2(100) = 270, x_2 = 1$.

Таблица 6.3

Грузоподъемность (P)	$f_3(P)$	x_3
0–24	0	0
25–49	100	0
50–74	200	0
75–99	270	0
100	270	0

При $x_2 = 1$ предмет 2-го типа занимает 28 единиц грузоподъемности, а на первый предмет припадает 72 единицы. Из третьей строки табл. 6.1 находим, что $x_1 = 2$, т.е. загружается самолет двумя предметами первого типа. Таким образом, найдено решение: $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 0$, $f_3(100)_{\max} = 270$.

6.3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА

Оптимальное решение задачи методом динамического программирования находится на основе уравнения (6.1). Чтобы определить его, необходимо:

1) записать уравнение для последнего состояния процесса (ему соответствует $l = n - 1$):

$$f_1(S_{n-1}) = \underset{U_n}{\text{optimum}}[R_n(S_{n-1}, U_n) + f_0(S_n)];$$

2) найти $R_n(S_{n-1}, U_n)$ из дискретного набора его значений при некоторых фиксированных S_{n-1} и U_n из соответствующих допустимых областей (так как $f_0(S_n) = 0$, то $f_1(S_{n-1}) = \underset{U_n}{\text{optimum}}[R_n(S_{n-1}, U_n)]$). В результате после первого шага известно решение U_n и соответствующее значение функции $f_1(S_{n-1})$;

3) уменьшить значение l на единицу и записать соответствующее функциональное уравнение. При $l = n - k(k = \overline{2, n})$ оно имеет вид

$$f_k(S_{n-k}) = \underset{U_{n-k+1}}{\text{optimum}}[R_{n-k+1}(S_{n-k}, U_{n-k+1}) + f_{k-1}(S_{n-k+1})]; \qquad (6.2)$$

4) найти условно-оптимальное решение на основе выражения (6.2);

5) проверить, чему равно значение l. Если $l = 0$, расчет условно-оптимальных решений закончен, при этом найдено оптимальное решение задачи для первого состояния процесса. Если $l \neq 0$, перейти к выполнению п. 3);

6) вычислить оптимальное решение задачи для каждого последующего шага процесса, двигаясь от конца расчетов к началу.

Пример 6.1. Требуется перевезти груз из города A в город B. Сеть дорог, связывающих эти города, изображена на рис. 6.1. Стоимость перевозки груза из города s ($s = \overline{1,9}$) в город j ($j = \overline{2, 10}$) проставлена над соответствующими дугами сети. Необходимо найти маршрут, связывающий города A и B, для которого суммарные затраты на перевозку груза были бы наименьшими.

На рис. 6.1 городам поставлены в соответствие вершины сети, обозначенные кружками с номером, а транспортным магистралям — дуги (линии со стрелками), соединяющие вершины.

Разобьем все множество вершин (городов) на подмножества. В первое подмножество включим исходную вершину *1*. Во второе — вершины, в которые входят дуги, выходящие из вершины *1*. В третье — вершины, в которые входят дуги, выходящие из вершин второго подмножества. Таким образом, продолжая разбиение дальше, получим пять подмножеств: {1}, {2, 3, 4}, {5, 6, 7}, {8, 9}, {10}. Очевидно, что любой маршрут из города *1* в город *10* содержит ровно четыре дуги, каждая из которых связывает вершины, принадлежащие соответствующим подмножествам. Следовательно, процесс решения

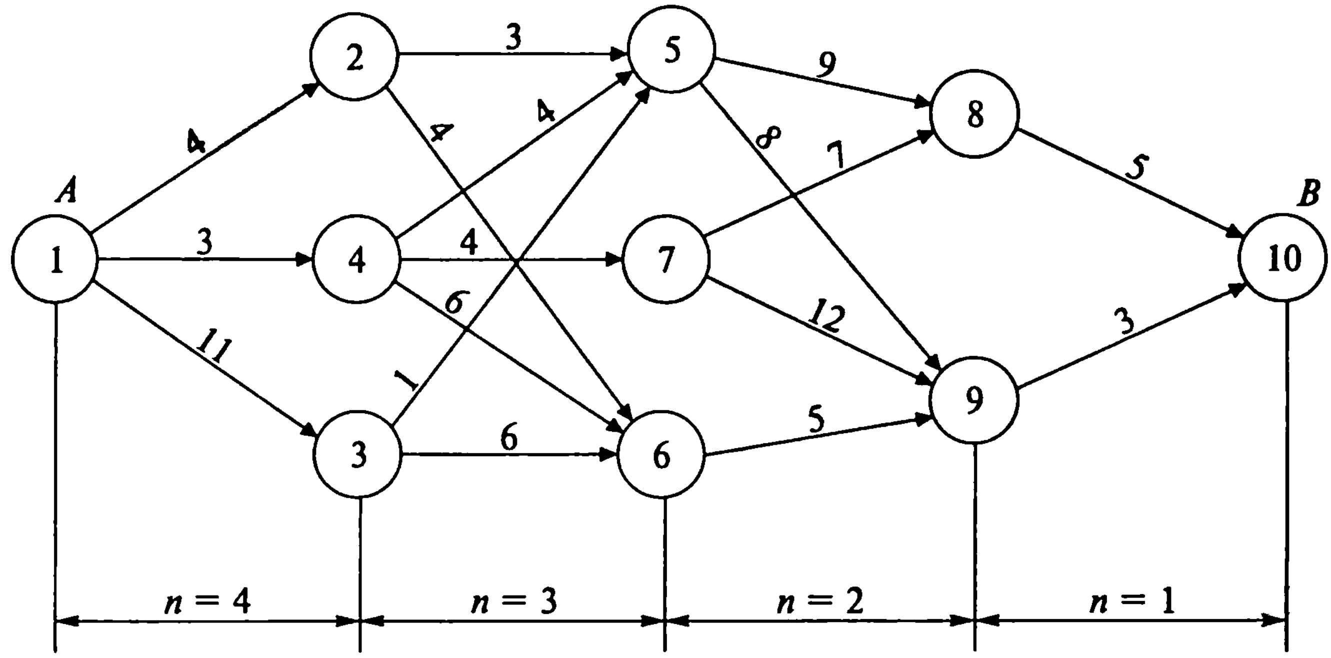


Рис. 6.1

задачи (нахождения оптимального маршрута) разбивается на четыре этапа. На первом этапе принимается решение, через какой город, принадлежащий второму подмножеству, везти груз из города *1*. На втором этапе необходимо определить, через какой город третьего подмножества везти груз из некоторого города, принадлежащего второму подмножеству, и т.д.

Перенумеруем этапы от конечной вершины сети к начальной (рис. 6.1) и введем обозначения: n — номер шага (n = 1, 2, 3, 4); $f_n(s)$ — минимальные затраты на перевозку груза от города s до конечного города, если до конечного города осталось n шагов; $j_n(s)$ — номер города, через который нужно ехать из города s, чтобы достичь $f_n(s)$; c_{sj} — стоимость перевозки груза из города s в город j.

Здесь все обозначения несут важную смысловую нагрузку: f означает целевую функцию, s — состояние системы (номер города), индекс n несет динамическую информацию о том, что из города s до конечного города осталось n шагов.

Предположим, что груз доставлен в город *10*, следовательно, число оставшихся шагов равно нулю ($n = 0$) и $f_n(s) = f_0(10) = 0$, так как из города *10* груз везти не надо.

Рассмотрим последний шаг ($n = 1$) и вычислим для него значение функции. Очевидно, что в город *10* груз может быть доставлен или из города *8*, или из города *9*. Вычислим затраты на перевозку для этих двух состояний:

$$f_1(8) = c_{8,10} + f_0(10) = 5 + 0 = 5,\ \ s = 8,\ \ j_1(8) = 10;$$

$$f_1(9) = c_{9,10} + f_0(10) = 3 + 0 = 3,\ \ s = 9,\ \ j_1(9) = 10.$$

Чтобы произвести расчет для $n = 2$, выдвинем гипотезы о месте нахождения груза: 1-я гипотеза — груз находится в городе *5;* 2-я гипотеза —груз находится в городе *6;* 3-я гипотеза — груз находится в городе *7*.

Из города *5* в город *10* можно провезти груз или через город *8*, или через город *9*. Поэтому оптимальный маршрут из города *5* найдется из выражения

$$f_2(5) = \min[c_{58} + f_1(8);\ \ c_{59} + f_1(9)] = \min(9 + 5;\ 8 + 3) = 11.$$

Здесь $s = 5$ и $j_2(5) = 9$, т.е. условно-оптимальный маршрут проходит через город *9*.

Аналогично находим значения функции для $s = 6$ и $s = 7$:

$$f_2(6) = c_{69} + f_1(9) = 8;$$

$$f_2(7) = \min[c_{78} + f_1(8);\ c_{79} + f_1(9)] = 12.$$

Все вычисления удобно выполнять в таблицах. Расчеты первого $[n=1,\ c_{sj} + f_0(j)]$ и второго $[n=2,\ c_{sj} + f_1(j)]$ этапов помещены в табл. 6.4 и 6.5 соответственно.

Таблица 6.4

s \ j	10	$f_1(s)$	$j_1(s)$
8	5+0	5	10
9	3+0	3	10

Таблица 6.5

s \ j	8	9	$f_2(s)$	$j_2(s)$
5	9+5	8+3	11	9
6		5+3	8	9
7	7+5	12+3	12	8

Цифры в столбцах таблиц, находящиеся слева от жирной вертикальной черты, представляют собой сумму стоимости c_{sj} доставки груза из города s в город j и стоимости $f_{n-1}(j)$ доставки груза от города j до города B. В каждой строке выбирается наименьшая из этих сумм. Этим определяются условно-оптимальные затраты на доставку груза из города s в конечный город. Затраты (значение функции) обозначены $f_n(s)$ и записаны в первом столбце справа от вертикальной черты, а город, через который проходит условно-оптимальный маршрут, обозначен $j_n(s)$.

Рекуррентное соотношение для $n = 3$ имеет вид

$$f_3(s) = \min_{s,j}[c_{sj} + f_2(j)].$$

Отметим, что для подсчета условно-оптимальных значений используется значение $f_2(j)$, полученное на предыдущем шаге, из табл. 6.5.

Вычисления для третьего шага $[n = 3, c_{sj} + f_2(j)]$ приведены в табл.6.6. Здесь две клетки заштрихованы, поскольку из городов *2* и *3* нельзя попасть в город *7*.

Вычисления для четвертого шага $[n = 4, c_{sj} + f_3(j)]$ приведены в табл. 6.7. Из табл. 6.7 видно, что минимальные затраты на перевозку груза $f_4(1) = 16$ и оптимальный маршрут проходит через город *2*, так как $j_4(1) = 2$. Далее из табл. 6.6 при $s = 2$ следует, что оптимальный маршрут проходит через город *6*, так как $j_3(2) = 6$. Продолжая рассмотрение таблиц,

Таблица 6.6

s \ j	5	6	7	$f_3(s)$	$j_3(s)$
2	3+11	4+8		12	6
3	1+11	6+8		12	5
4	4+11	6+8	4+12	14	6

Таблица 6.7

s \ j	2	3	4	$f_4(s)$	$j_4(s)$
1	4+12	11+12	3+14	16	2

для $n = 2$ определяем, что оптимальный маршрут проходит через город *9* ($j_2(6) = 9$). Наконец, из города *9* груз доставляется в конечный город *10* (место назначения). Таким образом, двигаясь от последней таблицы к первой, мы определили оптимальный маршрут $\mu = (1—2—6—9—10)$, затраты на перевозку груза по которому составляют $f_4(1) = 4 + 4 + 5 + 3 = 16$.

Упражнения

6.1. Найти оптимальный маршрут (рис. 6.1) из города *1* в город *10,* проходящий через город *4.*

6.2. Записать в общем виде рекуррентное соотношение для нахождения оптимального пути между начальной и конечной вершинами сети.

6.3. Найти путь минимальной длины между начальной и конечной вершинами сети методом динамического программирования (цифры, приписанные дугам сети, означают расстояния между соответствующими вершинами) для:

а) рис. 6.2;
б) рис. 6.3;
в) рис. 6.4;
г) рис. 6.5.

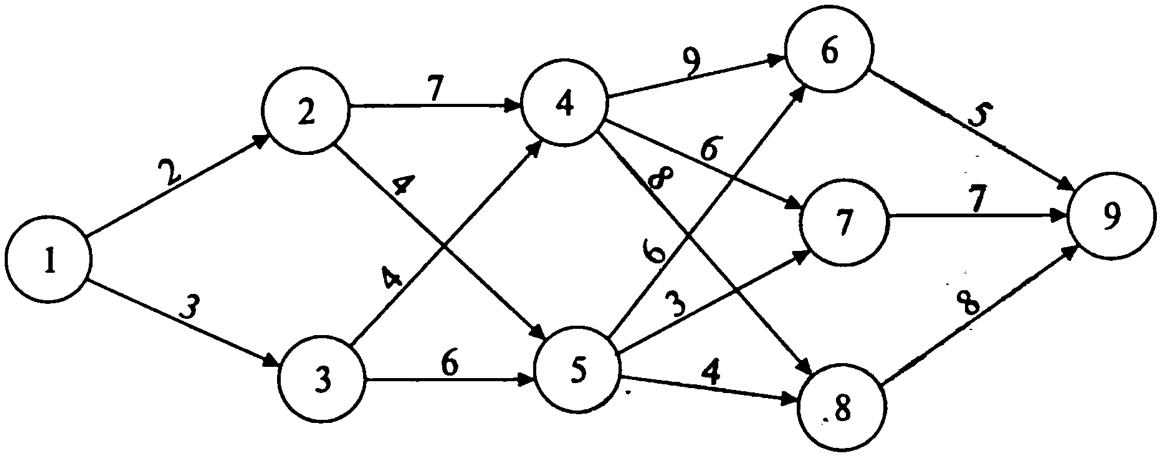


Рис. 6.2

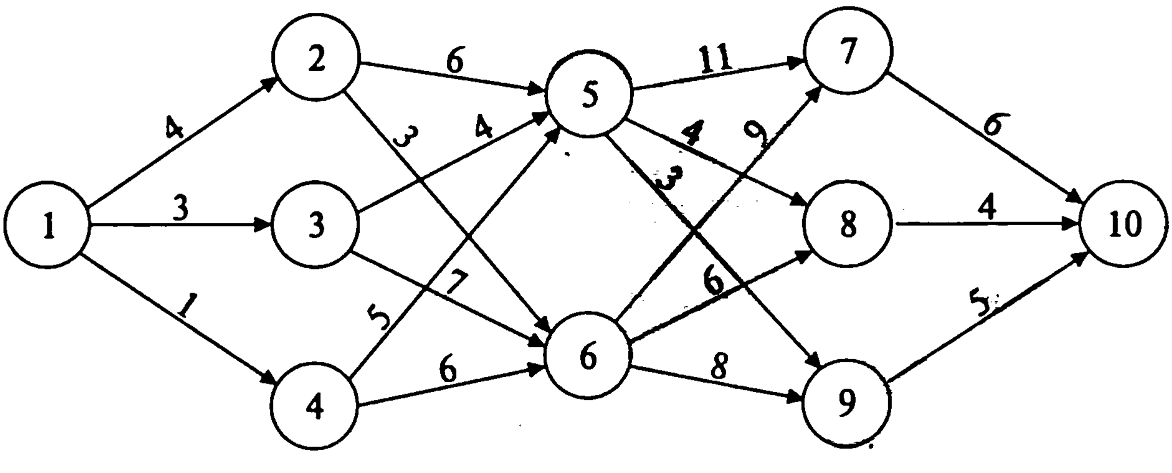


Рис. 6.3

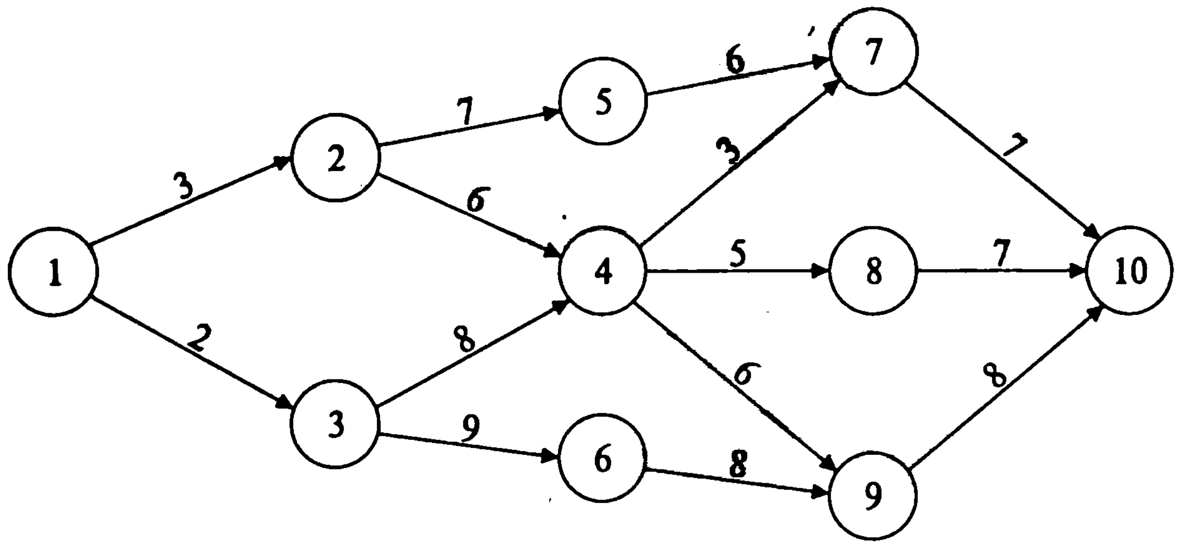


Рис. 6.4

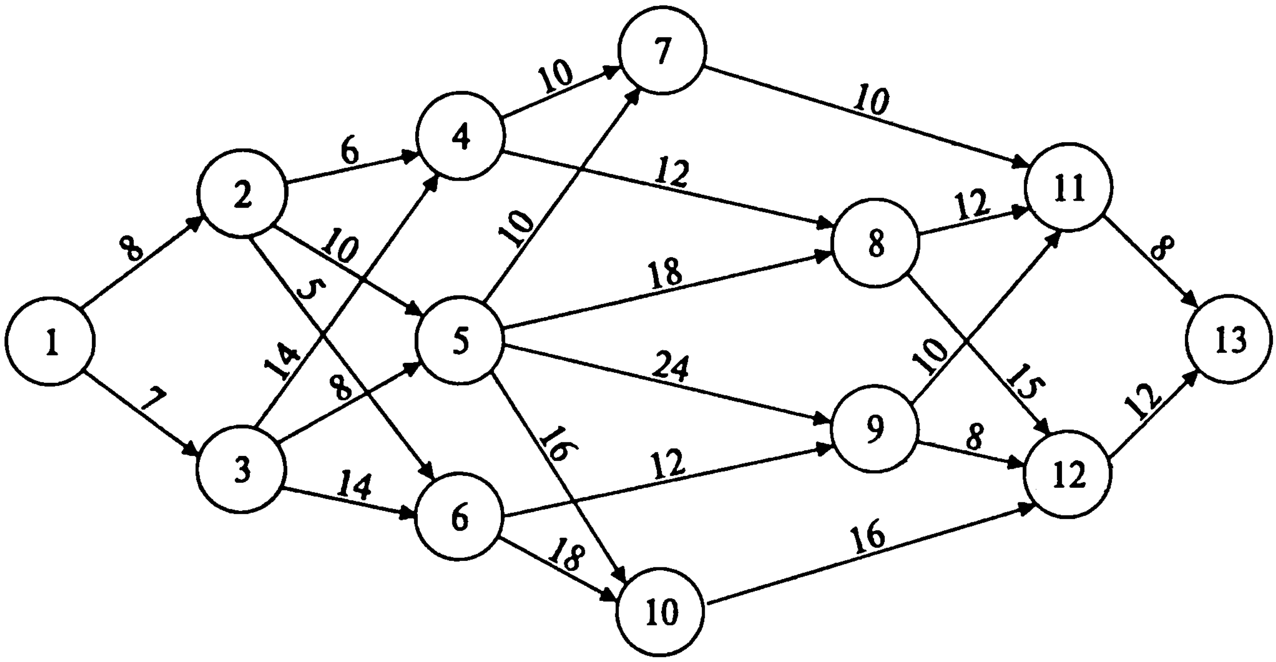


Рис. 6.5

6.4. ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ

Предприятие изготовляет машины, спрос на которые в каждом из месяцев равен $D_t(t=\overline{1,T})$ единиц. Запас машин на складе предприятия на начало планируемого периода i_0 единиц. Затраты на хранение единицы продукции равны h, поэтому затраты на содержание запасов численно равны уровню запасов на конец месяца, умноженному на h. Пусть общие затраты $c_t(x_t, i_t)$ состоят из затрат $c(x_t)$ на производство машин и затрат hi_t на их содержание до отправки потребителю, т.е.

$$c_t(x_t, i_t) = c(x_t) + hi_t.$$

В свою очередь, затраты $c(x_t)$ на производство машин складываются из условно постоянных — k и пропорциональных — lx_t (l единиц на каждую единицу продукции). Таким образом, для любого месяца

$$c(x_t) = k + l x_t.$$

Складские площади предприятия ограничены, и хранить можно не более M единиц продукции. Производственные мощности также ограничены, и в каждом месяце можно изготовить не более B единиц продукции.

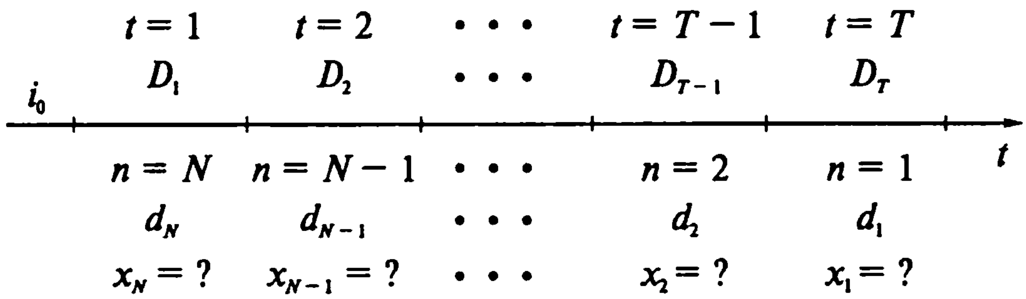


Рис. 6.6

Требуется определить производственную программу изготовления машин x_t, удовлетворяющую спрос в каждом из месяцев планируемого периода $D_t (t = \overline{1, T})$ и обеспечивающую минимальные затраты на производство продукции и содержание запасов. Запас продукции на складе в конце планируемого периода должен быть равен нулю.

Для решения задачи методом динамического программирования и записи рекуррентного соотношения будем использовать следующие обозначения: $n (n = \overline{1, N})$ — номер планового отрезка времени (соответствует обратной нумерации месяцев); j — уровень запаса на конец отрезка; d_n — спрос на продукцию на n-м отрезке ($d_1 = D_T$, $d_2 = D_{T-1}, \ldots, d_N = D_1$); $c_n(x, j)$ — затраты, связанные с выпуском x единиц продукции на n-м отрезке и с содержанием запасов, объем которых на конец n-го отрезка равен j единиц; $f_n(i)$ — значение функции, равное затратам на производство и хранение продукции за n последних месяцев при условии, что уровень запасов на начало n-го месяца составляет i единиц; $x_n(i)$ — производство продукции на n-м отрезке, если уровень запасов на начало отрезка равен i единиц.

Плановый период изображен на рис. 6.6, для наглядности на него нанесены некоторые параметры условия задачи.

В данном примере число шагов решения задачи совпадает с числом месяцев (количеством плановых отрезков времени n). Так как уровень запасов на конец планового периода должен быть равен нулю, то для $n = 0$

$$f_0(0) = 0. \tag{6.3}$$

Перейдем к рассмотрению первого отрезка ($n = 1$). Запас i на начало этого отрезка неизвестен. Однако ясно, что он может быть равен любому неотрицательному целому числу, не превышающему вместимости склада и спроса в рассматриваемом отрезке, т.е. не должен превышать $\min(d_1, M)$. Для полного удовлетворения спроса на последнем отрезке объем должен быть равен $d_1 - i$. Следовательно,

$$f_1(i) = c_1(x_1, j_1) = c_1(d_1 - i, j_1) = c_1(d_1 - i, 0); \tag{6.4}$$

где $i = 0, 1, \ldots, \min(d_1, M)$.

Перейдем ко второму шагу ($n = 2$). Уровень запасов на начало второго отрезка равен i. При этом величина i может принимать любые неотрицательные целочисленные значения, не превышающие $\min(d_1 + d_2, M)$. Целочисленные значения x (объем выпуска) во втором отрезке при заданном i должны быть не меньше чем $d_2 - i$ (спрос на данном отрезке должен быть удовлетворен), но не больше $\min(d_1 + d_2 - i, B)$, так как запас на конец планового периода равен нулю и производство продукции в любом отрезке не превышает B. Минимальные суммарные затраты на производство и хранение продукции за два последних месяца

$$f_2(i) = \min_x [c_2(x, i + x - d_2) + f_1(i + x - d_2)], \tag{6.5}$$

где $i = 0, 1, \ldots, \min(d_1 + d_2, M)$; $d_2 - i \le x \le \min(d_1 + d_2 - i, B)$.

Аналогично можно записать рекуррентное соотношение для $n = 3$. Общее рекуррентное соотношение имеет вид

$$f_n(i) = \min_x [c_n(x, i + x - d_n) + f_{n-1}(i + x - d_n)] \; (n = \overline{1, N}), \tag{6.6}$$

где $i = 0, 1, \ldots, \min(d_1 + d_2 + \ldots + d_n, M)$; $d_n - i \le x \le \min(d_1 + d_2 + \ldots + d_n - i, B)$.

В выражении (6.6) величина $(i + x - d_n) = j_n$ характеризует уровень запасов на конец отрезка n. Заметим, что поскольку уровень запасов i на начало каждого месяца (за исключением первого) неизвестен, то необходимо учесть все возможные его значения и произвести поочередно вычисления:

$$f_1(i),\ i = 0, 1, \ldots, \min(d_1, M);\ f_2(i),\ i = 0, 1, \ldots, \min(d_1 + d_2, M);\ \ldots;$$

$$f_{n-1}(i),\ i = 0, 1, \ldots, \min(d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1}, M);\ f_n(i_0),$$

где i_0 — известная величина.

На основании полученных расчетов находится объем выпуска продукции в каждом месяце, соответствующий оптимальному решению задачи. Для первого месяца планового периода он равен $x_N(i_0)$ и позволяет достичь $f_N(i_0)$. Уровень запасов на начало второго месяца $i_{N-1} = i_0 + x_N(i_0) - d_N$, а объем выпуска во втором месяце $x_{N-1}(i_{N-1})$. Рассматривая таким образом плановые отрезки до конца планового периода, находим объем выпуска в каждом из месяцев.

Рассмотренную задачу проиллюстрируем числовым примером.

Пример 6.2. Пусть $T = 3$, $D_1 = 3$, $D_2 = 4$, $D_3 = 3$, $h = 2$, $B = 6$, $M = 4$, $i_0 = 1$, $k = 8$, $l = 2$.

Так как $c(i) = k + lx$, то $c(0)=0$, $c(1)=10$, $c(2)=12$, $c(3)=14$, $c(4)=16$, $c(5)=18$, $c(6)=20$.

Рассмотрим $n = 0$ (отрезок за пределом планового периода). Так как уровень запасов на конец планового периода равен нулю, $f_0(0) = 0$.

Для $n = 1$

$$x_1(i) = d_1 - i;$$
$$f_1(i) = c_1(x_1, j_1) = c_1(d_1 - i, 0) = c_1(3 - i);$$
$$i = 0, 1, 2, 3.$$

Расчет всех значений $f_1(i)$ выполним в табл. 6.8, где $f_1(i) = c_1(3 - i)$.

Таблица 6.8

i	$x_1(i)$	$f_1(i)$
0	3	14
1	2	12
2	1	10
3	0	0

Для второго отрезка ($n = 2$) значения функции $f_2(i)$ вычисляются по формуле (6.5). В табл. 6.9 приведены все возможные значения сумм $c_2(x) + h(i + x - d_2) + f_1(i + x - d_2)$. Здесь предусмотрено по одной строке для каждого возможного значения начального уровня запаса i, который не должен превышать $\min(d_1 + d_2, M)$, и по одному столбцу для возможных значений выпуска x. Поскольку спрос на продукцию в каждом месяце должен быть удовлетворен, а уровень запасов на конец каждого отрезка не может превысить 4 единиц, некоторые клетки в таблице заштрихованы. Эти клетки соответствуют недопустимым сочетаниям значений i и x. Так, если $i = 0$, то спрос удается удовлетворить только при условии $x \geq 4$. Если $i = 4$, то $x \leq 3$, иначе запас на конец планового периода будет больше нуля. В каждой клетке таблицы слева от жирной черты записана сумма трех слагаемых. Первое слагаемое — значение $c(x) = k + lx$. Второе слагаемое — затраты на содержание запасов, равные уровню запасов на конец отрезка, умноженному на $h = 2$. Так, например, при $i = 3$ и $x = 1$ уровень запасов на конец отрезка равен нулю, поэтому в соответствующей клетке второе слагаемое равно нулю. При $i = 2$ и $x = 5$ уровень запасов на конец отрезка равен 3, следовательно, в соответствующей клетке таблицы второе слагаемое равно 6. Наконец, третье слагаемое есть ранее вычисленное значение $f_1(i + x - d_2) = f_1(i + x - 4)$, взятое из табл. 6.8.

Таблица 6.9

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	$x_2(i)$	$f_2(i)$
0					16+0+14	18+2+12	20+4+10	4	30
1				14+0+14	16+2+12	18+4+10	20+6+0	6	26
2			12+0+14	14+2+12	16+4+10	18+6+0		5	24
3		10+0+14	12+12+12	14+4+10	16+6+0			4	22
4	0+0+14	10+2+12	12+4+10	14+6+0				0	14

Значение функции $f_2(i)$, записанное в правом крайнем столбце табл. 6.9, представляет собой минимальную из всех сумм в клетках строки для каждого фиксированного i, а $x_2(i)$ — соответствующий выпуск продукции. Например, при $i=0$ оптимальный выпуск равен 4 единицам, так как наименьшая сумма в этой строке (16+0+14) находится в столбце, соответствующем $x = 4$.

Для $n = 3$ рекуррентное соотношение имеет вид

$$f_3(i) = \min_x [c_3(x) + h(i + x - d_3) + f_2(i + x - d_3)], \quad i = i_0,$$

$$d_3 - i_0 = 2 \le x \le 4 = \min(d_1 + d_2 + d_3 - i_0, M).$$

Расчет значений $f_3(i)$ приведен в табл. 6.10. Таблица состоит из двух строк: заглавной и предназначенной для записи вычислений при начальном уровне запаса $i_0=1$. Здесь мы не делаем предположений о значениях i, так как запас на начало первого месяца планового периода известен. Заметим, что при вычислении значений $f_3(i)$ использованы значения $f_2(i + x - d_3)$ из предыдущей таблицы.

Таблица 6.10

j \ x	0	1	2	3	4	5	6	$x_3(i)$	$f_3(i)$
$i_0 = 1$			12+0+30	14+2+26	16+4+24	18+6+22	20+8+14	2 3 6	42

Минимальные затраты, связанные с производством и хранением продукции за три месяца, $f_3(i) = 42$. Оптимальными являются три решения:

1) при $x_3 = 2$ уровень запасов на начало второго месяца (конец первого) равен $i_0 + x_3 - d_3 = 1 + 2 - 3 = 0$. Рассматривая строку табл. 6.9, соответствующую $i = 0$, видим, что $x_2= 4$. Поскольку запас продукции на начало третьего месяца также равен нулю ($i_1 = i_2 + x_2 - d_2 = 0 + 4 - 4 = 0$), из табл. 6.8 находим $x_1=3$; таким образом, чтобы достичь оптимальных затрат, равных 42 единицам, требуется в первый месяц изготовить 2 машины, во второй — 4 и в третий — 3 (Проводя аналогичные рассуждения, находим еще два оптимальных решения.);

2) $x_3 = 3$, $x_2 = 6$ и $x_1 = 0$;

3) $x_3 = 6$, $x_2 = 0$ и $x_1 = 3$.

6.5. ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Применение информационных технологий Excel рассмотрим на примере 6.1, для чего занесем исходные данные в память ЭВМ в следующем виде:

	A	B	C	D
1	ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ			
2	1-2	4	2-7	1000
3	1-3	11	3-7	1000
4	1-4	3	4-7	4
5	2-5	3	5-8	9
6	3-5	1	6-8	1000
7	4-5	4	7-8	7
8	2-6	4	5-9	8
9	3-6	6	6-9	5
10	4-6	6	7-9	12
11			8-10	5
12			9-10	3

Исходные данные сформированы так, что все дуги, входящие в любую из вершин, записаны одним блоком, например: *2 – 5*; *3 – 5*; *4 – 5*. Такое представление позволяет автоматизировать процесс занесения расчетных формул. Так, в табл 6.12 в ячейку B31 занесена формула =СУММ(D5;C$22). Аналогичные формулы занесены в ячейки B32 и B33 перемещением курсора мыши (в виде черного знака «плюс») при помощи **M1** над черным квадратиком в правом нижнем углу выделенной ячейки B31. Аналогично занесены данные и в другие ячейки табл. 6.11–6.14 (рис. 6.7). С аналогичной целью приписаны и большие расстояния (1000) в несуществующие связи между городами *2–7*, *3–7* и *6–8*.

	A	B	C	D	E	F
14		n = 0	$F_0(10)=0$			
15						
16		n = 1	$F_1(s) = \min\limits_{s,j}[C_{sj} + F_0(J)]$			
17						
18				Таблица 6.11		
19	Из города S	Расчет расстояний в город J	Минимальное расстояние $F_1(s)$	В город $J_1(s)$		
20						
21		10				
22	8	=СУММ(D11;C$14)	5	10		
23	9	=СУММ(D12;C$14)	3	10		
24						
25		n = 2	$F_2(s) = \min\limits_{s,j}[C_{sj} + F_1(J)]$			
26						

Рис. 6.7

27					Таблица 6.12
28	Из города S	Расчет расстояний в город J		Минимальное расстояние $F_2(s)$	В город $J_2(s)$
29					
30		8	9		
31	5	=СУММ(D5;C$22)	=СУММ(D8;C$23)	=МИН(B31;C31)	=ЕСЛИ(B31<C31;$B$30;$C$30)
32	6	=СУММ(D6;C$22)	=СУММ(D9;C$23)	=МИН(B32;C32)	=ЕСЛИ(B32<C32;$B$30;$C$30)
33	7	=СУММ(D7;C$22)	=СУММ(D10;C$23)	=МИН(B33;C33)	=ЕСЛИ(B33<C33;$B$30;$C$30)
34					
35		n = 3	$F_3(S) = \underset{s,j}{MIN}[C_{sj} + F_2(J)]$		
36					

37					Таблица 6.13
38	Из города S	Расчет расстояний в город J			Минимальное расстояние $F_3(s)$
39					
40		5	6	7	
41	2	=СУММ(B5;D$31)	=СУММ(B8;D$32)	=СУММ(D2;D$33)	=МИН(B41:D41)
42	3	=СУММ(B6;D$31)	=СУММ(B9;D$32)	=СУММ(D3;D$33)	=МИН(B42:D42)
43	4	=СУММ(B7;D$31)	=СУММ(B10;D$32)	=СУММ(D4;D$33)	=МИН(B43:D43)
44					
45		n = 4	$F_4(S) = \underset{s,j}{MIN}[C_{sj} + F_3(J)]$		
46					

47					Таблица 6.14
48	Из города S	Расчет расстояний в город J			Минимальное расстояние $F_4(s)$
49					
50		2	3	4	
51	1	=СУММ(B2;E41)	=СУММ(B3;E42)	=СУММ(B4;E43)	=МИН(B51;C51;D51)

	F
37	Правая часть таблицы 6.13
38	В город $J_3(s)$
39	
40	
41	=ЕСЛИ(И(B41<C41;B41<D41);B$40;ЕСЛИ(И(C41<D41;C41<B41);C$40;D$40))
42	=ЕСЛИ(И(B42<C42;B42<D42);B$40;ЕСЛИ(И(C42<D42;C42<B42);C$40;D$40))
43	=ЕСЛИ(И(B43<C43;B43<D43);B$40;ЕСЛИ(И(C43<D43;C43<B43);C$40;D$40))

	F
47	Правая часть таблицы 6.14
48	В город $J_4(s)$
49	
50	
51	=ЕСЛИ(И(B51<C51;B51<D51);B50;ЕСЛИ(И(C51<B51;C51<D51);C50;D50))

Окончание рис. 6.7

n = 0 $F_0(10)=0$

n = 1 $F_1(s) = \underset{s,j}{MIN}[C_{sj} + F_0(J)]$

Таблица 6.11

Из города S	Расчет расстояний в город J	Минимальное расстояние $F_1(s)$	В город $J_1(s)$
	10		
8	5	5	10
9	3	3	10

n = 2 $F_2(s) = \underset{s,j}{MIN}[C_{sj} + F_1(J)]$

Таблица 6.12

Из города S	Расчет расстояний в город J		Минимальное расстояние $F_2(s)$	В город $J_2(s)$
	8	9		
5	14	11	11	9
6	1005	8	8	9
7	12	15	12	8

n = 3 $F_3(S) = \underset{s,j}{MIN}[C_{sj} + F_2(J)]$

Таблица 6.13

Из города S	Расчет расстояний в город J			Минимальное расстояние $F_3(s)$	В город $J_3(s)$
	5	6	7		
2	14	12	1012	12	6
3	12	14	1012	12	5
4	15	14	16	14	6

n = 4 $F_4(S) = \underset{s,j}{MIN}[C_{sj} + F_3(J)]$

Таблица 6.14

Из города S	Расчет расстояний в город J			Минимальное расстояние $F_4(s)$	В город $J_4(s)$
	2	3	4		
1	16	23	17	16	2

Рис. 6.8

Схема решения рассматриваемого примера средствами Excel достаточно проста и в то же время в некоторой степени трудоемка (недостаточно автоматизирован процесс вычислений). Однако рассмотренный подход оправдывает себя, если нужно решить несколько задач с аналогичной топологией сети и другими исходными данными. Кроме того, читателю, незнакомому с Excel, будет полезным рассмотреть применение не только математических функций, но и статистических и логических (ячейки B31; D31; E41 и др.).

Все приведенные формулы в таблицах рис. 6.7 сформированы при установленном флажке **Формулы** в диалоговом окне **Параметры** из меню **Сервис**. После снятия флажка **Формулы** в указанном диалоговом окне в тех же таблицах представлены результаты расчетов (рис. 6.8).

Из результатов расчетов видно, что минимальное расстояние из города *1* в город *10* найдено при $n=4$, $F_4(s)=F_4(1)=16$, а оптимальный маршрут μ = *(1–2–6–9–10)*. Эту задачу можно решить, используя пакет **Network Optimization** (сетевая оптимизация), проблема — **Shortest Paths** и цель — **General case**. Применение названного пакета рассмотрено в подглавах 4.3 и 9.4.

Упражнения

6.4. Пусть плановый период состоит из N отрезков. Необходимо составить рекуррентное соотношение в общем виде и записать ограничения на уровень запасов (вместимость склада считать неограниченной) и объем выпуска (месячный выпуск не может превышать B единиц), если запас продукции на складе в конце планируемого периода должен быть равен нулю.

6.5. Условия те же, что и в задаче 6.4. Требуется записать ограничение на объем выпуска, если производственные мощности не ограничены.

6.6. Условия те же, что и в примере 6.2. Найти оптимальную производственную программу и соответствующие уровни запасов, если $i_0=0$ и $h=1$.

Определить оптимальную производственную программу в задачах 6.7–6.10. Условие задачи приведено в начале подглавы 6.4. Затраты на производство продукции составляют: $c(0)=0$, $c(1)=13$, $c(2)=15$, $c(3)=17$, $c(4)=19$, $c(5)=21$, $c(6)=23$. Плановый период состоит из четырех месяцев ($t=\overline{1,4}$):

6.7. $D_1=3$, $D_2=4$, $D_3=4$, $D_4=2$, $i_0=2$, $h=2$, $B=6$, $M=4$.

6.8. $D_1=2$, $D_2=3$, $D_3=2$, $D_4=2$, $i_0=1$, $h=2$, $B=4$, $M=4$.

6.9. $D_1=2$, $D_2=3$, $D_3=3$, $D_4=2$, $i_0=2$, $h=l$, $B=4$, $M=4$.

6.10. $D_1=3$, $D_2=3$, $D_3=2$, $D_4=4$, $i_0=1$, $h=1$, $B=5$, $M=4$.

РАЗДЕЛ III

Информационные технологии в элементах теории графов и сетевом управлении

7. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ГРАФОВ

7.1. ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Начало теории графов было положено Л. Эйлером в 1736 г. в его знаменитом рассуждении о кенигсбергских мостах, но как самостоятельная математическая дисциплина она сформировалась в 30-е годы XX в. Теория графов нашла широкое применение во многих разделах науки и техники; ее методы успешно используются в теории информации, сетей, в планировании производства, в генетике и химии, на транспорте и т.д.

Геометрически граф можно представить как набор вершин (точек), определенные пары которых соединены линиями. Например, сеть дорог, соединяющих города E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, можно представить в виде графа следующим образом. Города обозначим точками (вершинами), а дороги — неориентированными линиями (рис. 7.1). Неориентированные линии означают наличие двустороннего движения между соответствующей парой городов. Пересечения линий не считаются вершинами.

Рассмотрим другой пример. Пусть производственный участок изготовляет два вида изделий — E_9 и E_{10}. Изделие E_9 собирается из узлов E_6, E_7 и детали E_2, а изделие E_{10} — из узлов E_7, E_8 и детали E_5. В свою очередь, узел E_6 собирается из двух деталей E_1 и одной детали E_2, узел E_7 — из деталей E_2, E_3 и E_5, а узел E_8 — из деталей E_4 и E_5. Применяемость узлов и деталей изобразим в виде графа. Вершинам графа поставим в соответствие узлы, детали и изделия, а связи между ними (вхождение деталей в узлы и изделия и узлов — в изделия) изобразим ориентированными линиями (рис. 7.2).

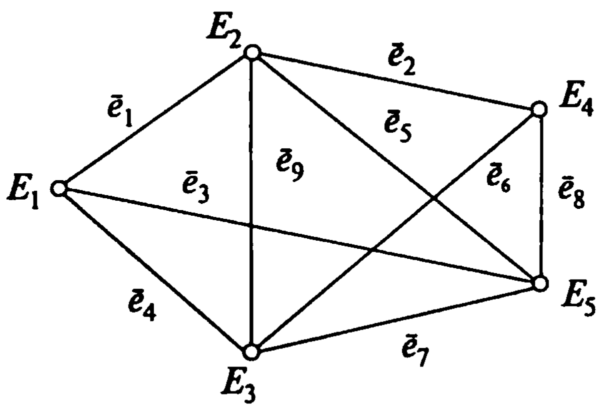


Рис. 7.1

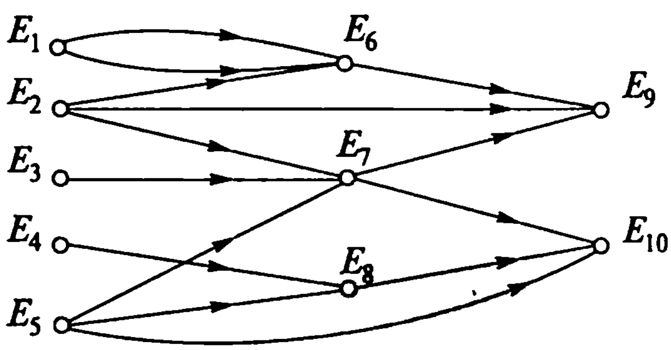


Рис. 7.2

Математически конечным графом G называется пара (E, e), где E — непустое конечное множество элементов (вершин), e — конечное (возможно, пустое) множество пар элементов (упорядоченных элементов) из E, которые называются ребрами (дугами). Символически граф можно записать $G = (E, e)$.

Подчеркнем, что *дугой* называется упорядоченная пара (E_i, E_j) вершин графа E_i и E_j , в которой E_i — начальная вершина дуги, а E_j — конечная.

При графическом изображении стрелка на дуге указывает порядок вершин и входит в конечную вершину. Дуга вида (E_i, E_i) называется *петлей*. Дуги называются *кратными*, если их начальные и конечные вершины совпадают. В некоторых случаях дугу удобно обозначать одной буквой с индексом, например $\vec{e}_i$. Во многих прикладных задачах пару дуг с одинаковыми номерами вершин и противоположной ориентацией удобно объединить и изображать связь между концевыми вершинами этих дуг линией без стрелки (рис.7.1). Такое объединение дуг называется ребром. Таким образом, *ребром* называется неупорядоченная пара (E_i, E_j) вершин E_i и E_j графа. Ребро обозначим через $\bar{e}$ или $(\overline{E_i, E_j})$, где E_i и E_j — концевые точки (вершины) ребра.

Два ребра (две дуги) называются *смежными*, если они имеют хотя бы одну общую вершину. Ребра называются *кратными*, если их концевые точки совпадают.

В зависимости от наличия или отсутствия ориентации у пар элементов из множества E различают графы *ориентированные, неориентированные* (реберные) и *смешанные*. Граф называется *ориентированным*, или *орграфом*, если связи между его вершинами заданы дугами (рис. 7.3). Орграф будем обозначать $G = (E, \vec{e})$, где $\vec{e}$ — множество дуг. Дугами орграфа, изображенного на рис. 7.3, являются: $\vec{e}_2 = (E_1, E_2)$, $\vec{e}_3 = (E_2, E_1)$, $\vec{e}_4 = (E_1, E_3)$, $\vec{e}_5 = (E_3, E_2)$, ...; дуга $\vec{e}_1 =$ $= (E_1, E_1)$ — петля.

Орграф называется *симметрическим*, если для любой дуги $(E_i, E_j) \in \vec{e}$ дуга $(E_j, E_i) \in \vec{e}$, и *антисимметрическим*, если для любой дуги $(E_i, E_j) \in \vec{e}$ дуга $(E_j, E_i) \notin \vec{e}$.

Граф называется *неориентированным*, если связи между его вершинами заданы ребрами (рис. 7.4). Неориентированный граф будем обозначать $G = (E, \bar{e})$, где $\bar{e}$ — множество ребер графа. Концевые точки (вершины) ребра (дуги) называются смежными вершинами, при этом они *инцидентны* этому ребру (этой дуге), а ребро инцидентно (дуга инцидентна) вершинам.

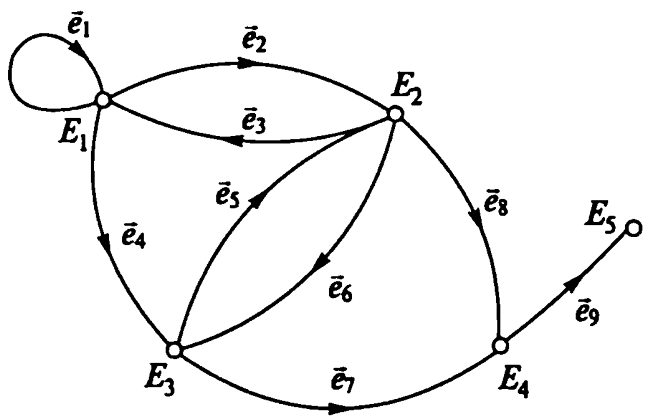


Рис. 7.3

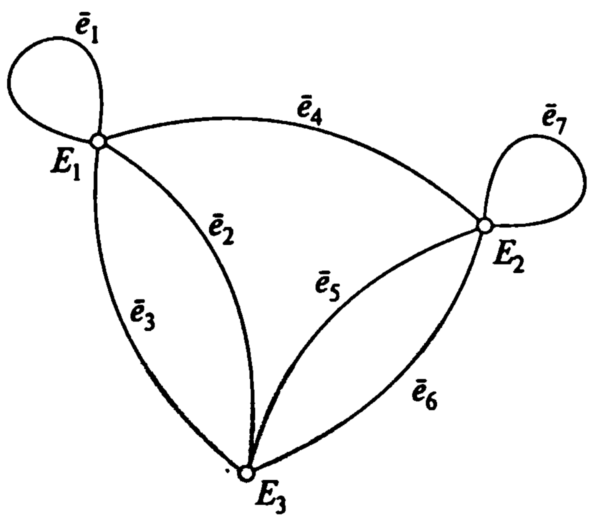


Рис. 7.4

Путем в орграфе называется такая конечная последовательность дуг ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_m$), $\vec{e}_i \in \vec{e}$, $i = \overline{1, m}$, в которой начало каждой последующей дуги совпадает с концом предыдущей. Так, на рис. 7.3

$$s_1 = (\vec{e}_2, \vec{e}_8, \vec{e}_9), s_2 = (\vec{e}_2, \vec{e}_6, \vec{e}_7, \vec{e}_9), s_3 = (\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_7)$$

представляют собой пути. При отсутствии кратных дуг путь можно записать также в виде последовательности вершин, через которые он проходит. Например, путь s_2 можно записать так: $s_2 = (E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5)$.

Контуром называется путь, начальная вершина которого совпадает с конечной. Так, $s_4 = (E_2 - E_1 - E_3 - E_2)$ и $s_5 = (E_3 - E_2 - E_3)$ — контуры (рис. 7.3). Длина пути или контура — число дуг, входящих в путь или контур. Так, длина пути s_2 равна 4, а длина контура s_5 равна 2. Путь называется *простым*, если ни одна дуга в нем не встречается дважды, и *элементарным*, если ни одна вершина не встречается дважды.

Цепью в графе $G = (E, \bar{e})$ называется такая последовательность ($\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, ..., $\bar{e}_m$), $\bar{e}_i \in \bar{e}$, $i = \overline{1, m}$ ребер графа, при которой любые два соседних ребра имеют общую вершину. На рис. 7.4 последовательность ребер $\bar{s} = (\bar{e}_4, \bar{e}_6)$ или, что то же самое, $\bar{s} = ((\overline{E_1, E_2}), (\overline{E_2, E_3}))$ образует цепь, соединяющую вершины E_1 и E_3.

Цепь называется *циклом*, если начальная вершина совпадает с конечной. Цепь $\bar{s} = (\bar{e}_4, \bar{e}_6, \bar{e}_3)$ на рис. 7.4 является циклом. Длина цепи или цикла определяется числом ребер, ее (его) составляющих.

Любой симметрический орграф можно рассматривать как неориентированный граф, в котором каждому ребру соответствует пара симметрических дуг орграфа, и наоборот, любой неориентированный граф можно рассматривать как орграф.

Число ребер, инцидентных вершине графа E_i, называется *локальной степенью* графа в вершине E_i и обозначается $\rho(E_i)$.

Вершина степени 1 называется *висячей*, а степени 0 — *изолированной.*

В орграфе $\rho(\overset{>}{E_i})$ — *полустепень исхода* определяется количеством дуг, исходящих из вершины E_i, а $\rho(\overset{<}{E_i})$ — *полустепень захода* — количеством дуг, входящих в E_i.

Наряду с неориентированными графами и орграфами в теории графов рассматриваются смешанные графы. Под *смешанным графом* понимается такой, в котором вершины соединены как ребрами, так и дугами.

Два графа $G = (E, e)$ и $G' = (E', e')$ называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение между множествами их вершин E и E' ($\varphi: E \leftrightarrow E'$), при котором $(E_i, E_j) \in e$ тогда и только тогда, когда $(\varphi(E_i), \varphi(E_j)) \in e'$.

Граф называется *сильно связным*, если между каждой парой его вершин E_i, $E_j \in E$, $E_i \neq E_j$, существует путь ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ...$\vec{e}_m$) такой, что E_i является начальной вершиной пути, а E_j — конечной.

Граф называется *связным*, если между каждой парой его вершин E_i, $E_j \in E, E_i \neq E_j$, существует такая последовательность элементов (дуг или ребер, или же и дуг, и ребер), что любая пара соседних элементов в этой последовательности имеет общую вершину (ориентация дуг в этой последовательности не учитывается). Очевидно, что любой сильно связный граф является связным. Граф на рис. 7.4 — сильно связный, так как после замены каждого ребра на пару симметричных дуг условие сильной связности выполняется. Этот граф является также связным. Орграф на рис. 7.3 — связный, но не сильно связный, так как не существует ни одного пути от вершины E_5 к другим вершинам.

Связный неориентированный граф называется *деревом*, если он не имеет циклов (рис. 7.5). В дереве любые две вершины связаны единственной цепью.

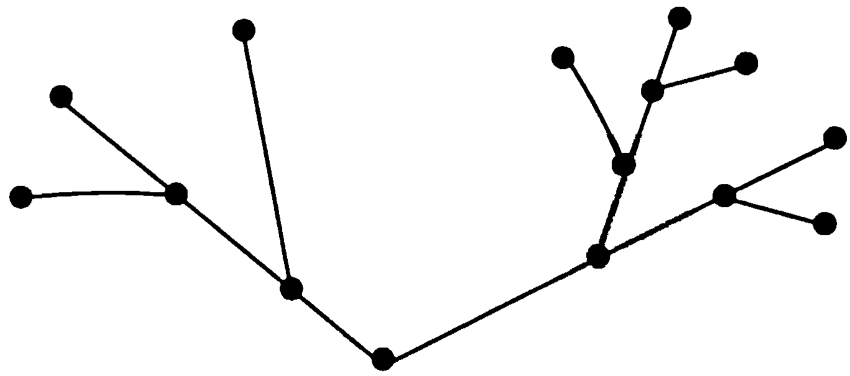


Рис. 7.5

7.2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФА

7.2.1. Матрицы смежности и инцидентности

Имеется несколько способов задания графа. Во многих случаях граф удобно задавать в виде матрицы смежности вершин, матрицы смежности дуг или матрицы инцидентности.

Матрицей смежности вершин орграфа называется квадратная матрица A, каждый ij-й элемент которой численно равен количеству дуг, идущих из вершины E_i в вершину E_j. Если $G = (E, \vec{e})$ — неориентированный граф, то ему соответствует симметрическая матрица смежности, так как дуги (E_i, E_j) и (E_j, E_i) существуют одновременно. Если $G = (E, \vec{e})$ — орграф, то соответствующая ему матрица смежности может не являться симметрической. Матрицы смежности вершин графов, изображенных на рис. 7.3 и 7.4, представлены в табл. 7.1 и 7.2 соответственно.

Любая симметрическая матрица смежности с целыми неотрицательными элементами может быть интерпретирована как граф.

Введем понятие матрицы смежности дуг (ребер) графа. Для простоты предположим, что граф не имеет петель и кратных ребер.

Матрицей смежности дуг (ребер) орграфа (графа) называется квадратная матрица A, каждый ij-й элемент которой равен единице, если конечная вершина дуги $\vec{e}_i$ является начальной вершиной дуги $\vec{e}_j$ (если ребра имеют общую вершину), и нулю во всех остальных случаях.

Таблица 7.1

E_i \ E_j	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1	1	1	1	0	0
E_2	1	0	1	1	0
E_3	0	1	0	1	0
E_4	0	0	0	0	1

Таблица 7.2

E_i \ E_j	E_1	E_2	E_3
E_1	1	1	2
E_2	1	1	2
E_3	2	2	0

В табл. 7.3 и 7.4 приведены матрицы смежности ребер и дуг графов, изображенных на рис. 7.1 и 7.6 соответственно.

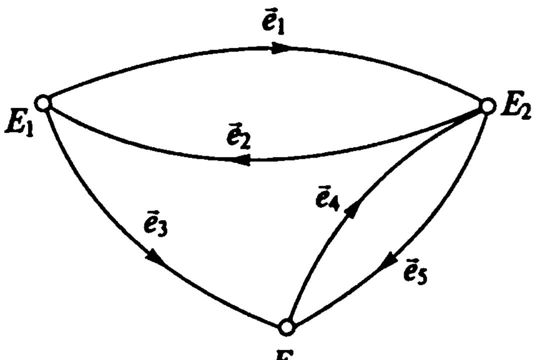


Рис. 7.6

Матрицей инцидентности орграфа называется прямоугольная матрица A, строки которой соответствуют вершинам, столбцы — дугам, а элементы равны 1, −1 или 0. При этом на пересечении вершины E и дуги $\vec{e}$ ставится значение $\varepsilon(E,\vec{e})=1$, если E — начальная вершина дуги $\vec{e}$, $\varepsilon(E,\vec{e})=-1$, если E — конечная вершина, и $\varepsilon(E,\vec{e})=0$, если E не инцидентна $\vec{e}$*.

*При рассмотрении матрицы инцидентности предполагается, что граф не имеет петель.

Таблица 7.3

$\bar{e}_i$ \ $\bar{e}_j$	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{e}_3$	$\bar{e}_4$	$\bar{e}_5$	$\bar{e}_6$	$\bar{e}_7$	$\bar{e}_8$	$\bar{e}_9$
$\bar{e}_1$		1	1	1	1				1
$\bar{e}_2$	1				1	1		1	1
$\bar{e}_3$	1			1	1		1	1	
$\bar{e}_4$	1		1			1	1		1
$\bar{e}_5$	1	1	1				1	1	1
$\bar{e}_6$		1		1			1	1	1
$\bar{e}_7$			1	1	1	1		1	1
$\bar{e}_8$		1	1		1	1	1		
$\bar{e}_9$	1	1		1	1	1	1		

Таблица 7.4

$\vec{e}_i$ \ $\vec{e}_j$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$\vec{e}_5$
$\vec{e}_1$		1			1
$\vec{e}_2$	1		1		
$\vec{e}_3$				1	
$\vec{e}_4$		1			1
$\vec{e}_5$				1	

Если G — неориентированный граф, то можно использовать значения $\varepsilon = 0, \varepsilon = 1$. Матрица инцидентности для графа, изображенного на рис. 7.6, представлена в табл. 7.5.

Кроме матричного способа задания графов, который не всегда приемлем и удобен, используются и другие. Остановимся на рассмотрении спискового способа, наиболее часто применяемого для задания орграфов и так называемых сетевых графиков, которым посвящена глава 8.

Таблица 7.5

E_i \ $\vec{e}_j$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$\vec{e}_5$
E_1	1	−1	1		
E_2	−1	1		−1	1
E_3			−1	1	−1

7.2.2. Задание орграфа с помощью списка вершин и информации о том, с какими вершинами они соединены дугами

Обозначим через ΓE_i множество вершин, соединяемых с вершиной E_i дугами, исходящими из E_i. Орграф, изображенный на рис. 7.3, представим списковым способом: $\Gamma E_1 = \{E_1, E_2, E_3\}$, $\Gamma E_2 = \{E_1, E_3, E_4\}$, $\Gamma E_3 = \{E_2, E_4\}$, $\Gamma E_4 = \{E_5\}$, $\Gamma E_5 = \varnothing$.

Поскольку множество дуг $\{\vec{e}\}$ и отображение (Г) взаимно определяют друг друга, то орграф можно записать в виде $G = (E, \vec{e})$ или $G = (E, \Gamma)$. Реберные графы можно представить аналогичным образом.

7.2.3. Задание орграфа с помощью дуг и информации о том, на какие дуги они опираются

Если конечная вершина дуги $\vec{e}_i$ является начальной вершиной дуги $\vec{e}_j$, то будем говорить, что дуга $\vec{e}_i$ непосредственно предшествует дуге $\vec{e}_j$, или дуга $\vec{e}_j$ опирается на дугу $\vec{e}_i$. В табл. 7.6 представлен орграф в виде списка дуг. Во второй графе таблицы записаны дуги, на которые опираются соответствующие дуги, указанные в первой графе. Такую таблицу будем называть *структурной*. Орграф, представленный в табл. 7.6, геометрически изображен на рис. 7.7.

Таблица 7.6

Дуга графа	Опирается на дуги	Дуга графа	Опирается на дуги
$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_6$	$\vec{e}_4$, $\vec{e}_5$
$\vec{e}_2$	—	$\vec{e}_7$	$\vec{e}_6$, $\vec{e}_8$, $\vec{e}_9$
$\vec{e}_3$	—	$\vec{e}_8$	$\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$
$\vec{e}_4$	—	$\vec{e}_9$	$\vec{e}_2$
$\vec{e}_5$	$\vec{e}_2$		

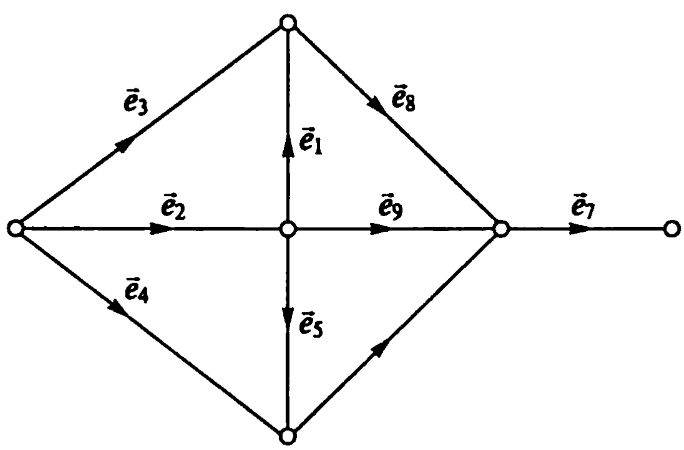


Рис. 7.7

7.3. РАЗБИЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРГРАФА ПО РАНГАМ

7.3.1. Отношение строгого порядка в орграфе

Некоторые операции, подлежащие исследованию, включают значительное количество разнообразных компонентов. Орграфы, описывающие такие операции, содержат большое количество элементов (вершин и дуг). Выработка управленческих решений по осуществлению операций производится, как правило, на ЭВМ и требует упорядоченной нумерации элементов орграфа.

Рассмотрим связный орграф без контуров. Положим $E_i < E_j$ — отношение строгого порядка, если существует путь ненулевой длины от E_i к E_j. Это отношение обладает свойствами:

1) антисимметричности: если $E_i < E_j$, то не существует $E_j < E_i$, так как в противном случае орграф содержал бы контур;

2) транзитивности: если $E_i < E_j$ и $E_j < E_s$, то $E_i < E_s$ (справедливость этого свойства очевидна из определения пути).

Теперь остановимся на разбиении элементов орграфа по рангам (слоям).

Вершина E_i называется *вершиной 1-го ранга*, если ее полустепень захода равна нулю ($\rho(\overset{<}{E_i}) = 0$). Вершина называется *вершиной 2-го ранга*, если в нее входят одна или несколько дуг из вершин 1-го ранга, и не входит ни одна дуга из вершин выше 1-го ранга. Вершина E_i называется *вершиной k-го ранга*, если в нее входят дуги из вершин не выше $(k-1)$-го ранга, и при этом имеется хотя бы одна дуга, исходящая из вершин $(k-1)$-го ранга. Дуга $\vec{e}_i$ называется *дугой k-го ранга*, если она опирается на дугу (дуги) не выше $(k-1)$-го ранга, среди которых есть хотя бы одна дуга $(k-1)$-го ранга.

После разбиения в случае необходимости элементам орграфа придается новая, более удобная нумерация, такая, чтобы:

1) все номера элементов некоторого ранга были меньше номеров элементов следующего ранга; номера элементов 1-го ранга были наименьшими, а номера элементов последнего ранга — наибольшими;

2) порядок номеров элементов внутри одного и того же ранга был безразличен (так как вершины, принадлежащие одному рангу, не соединены между собой дугами, а дуги друг на друга не опираются).

Рассмотрим методы, используемые для нахождения рангов вершин и дуг в связном орграфе без контуров.

7.3.2. Нахождение рангов вершин на чертеже орграфа

Идея метода основана на последовательном нахождении вершин орграфа, полустепень захода которых $\rho^{*}(\overset{<}{E_i}) = 0$, и отбрасывании этих вершин и выходящих из них дуг.

Рассмотрим нахождение рангов вершин связного орграфа без контуров на примере рис. 7.8. Найдем вершины 1-го ранга, т.е. локальной степени $\rho^*(\overset{<}{E}_i)=0$. Таких вершин две — E_2 и E_4.

Отбросим вершины E_2 и E_4 и дуги, выходящие из них, и на полученном орграфе (на рис. 7.9 отброшенные дуги показаны пунктиром) снова найдем вершины локальной степени $\rho^*(\overset{<}{E}_i)=0$. Ими являются вершины 2-го ранга E_1 и E_5. Продолжая процесс решения, находим, что единственная вершина E_3 3-го ранга.

Орграф с вершинами, разбитыми по рангам, приведен на рис. 7.10. На рис. 7.11 показан тот же орграф с новой нумерацией вершин ($E_1'=E_2$, $E_2'=E_4$, $E_3'=E_1$, $E_4'=E_5$, $E_5'=E_3$). Каждый ранг содержит вершины, не соединенные между собой дугами. С вершин меньшего ранга дуги входят только в вершины большего ранга. Нумерация вершин возрастает от 1-го ранга к последнему.

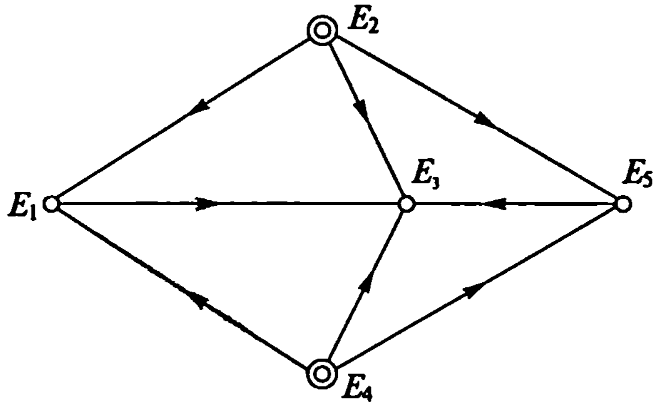


Рис. 7.8

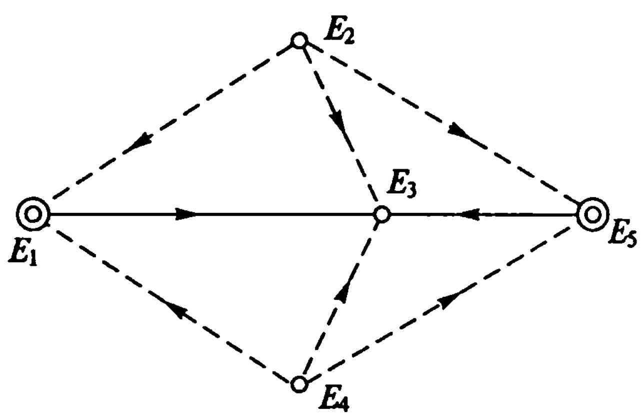


Рис. 7.9

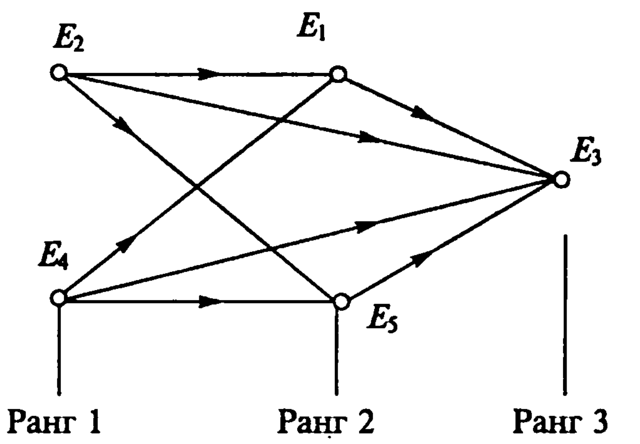


Рис. 7.10

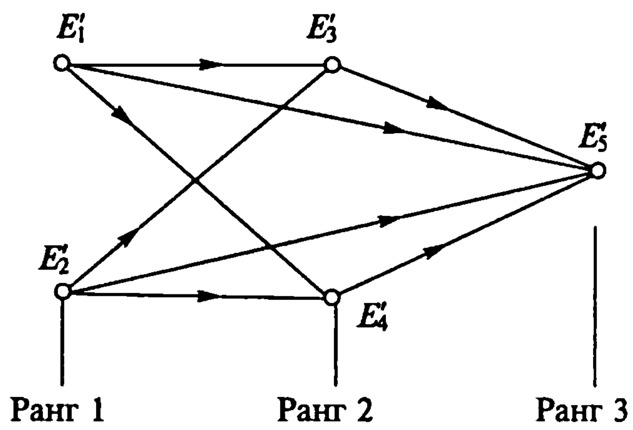


Рис. 7.11

7.3.3. Метод Демукрона нахождения рангов вершин орграфа

Метод Демукрона основан на использовании матрицы смежности вершин орграфа. Пусть орграф представлен матрицей смежности $A_{n\times n}$ (табл. 7.7).

Обозначим через $\mathbf{v}_{E_i} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, $i = \overline{1, n}$, векторы, являющиеся строками матрицы смежности. Вычислим

$$\mathbf{v}_1 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_{E_i}$$

и поместим результат в $(n + 1)$-ю строку табл. 7.7. Среди неотрицательных компонентов вектора $\mathbf{v}_1 = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)})$ находим компоненты, равные нулю.

Таблица 7.7

Номер строки	E_j / E_i	E_1	...	E_k	...	E_s	...	E_n	Ранг	Новая нумерация вершин
1	E_1	a_{11}	...	a_{1k}	...	a_{1s}	...	a_{1n}	r	E'_n
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
k	E_k	a_{k1}	...	a_{kk}	...	a_{ks}	...	a_{kn}	1	E'_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
s	E_s	a_{s1}	...	a_{sk}	...	a_{ss}	...	a_{sn}	1	E'_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	E_n	a_{n1}	...	a_{nk}	...	a_{ns}	...	a_{nn}	2	E'_3
$n+1$	$\mathbf{v}_1$	$a_1^{(1)}$	...	$a_k^{(1)}$	...	$a_s^{(1)}$	...	$a_n^{(1)}$		
$n+2$	$\mathbf{v}_2$	$a_1^{(2)}$	...	$a_k^{(2)}$	...	$a_s^{(2)}$	...	$a_n^{(2)}$		
...	...	...	...	...	...	...	...	...		
$n+r$	$\mathbf{v}_r$	0	...		...		...			

Пусть $a_k^{(1)}$ и $a_s^{(1)}$ равны нулю. Это значит, что в вершины E_k и E_s не входит ни одна дуга, и они относятся к 1-му рангу. В столбце, соответствующем рангу, в строках k и s запишем ранг этих вершин.

Из вектора $\mathbf{v}_1$ вычтем векторы-строки, соответствующие вершинам 1-го ранга E_k и E_s. В результате получим вектор $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{E_k} - \mathbf{v}_{E_s}$, в котором появятся новые компоненты, равные нулю.

Пусть $a_n^{(2)} = 0$. Следовательно, вершина E_n относится ко 2-му рангу. Ранг этой вершины, равный 2, заносим в таблицу.

Далее вычисляем вектор $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{E_n}$, в котором появятся новые нули. Следовательно, тем самым будут определены вершины 3-го ранга.

Процесс вычислений продолжается аналогично ранее изложенному до тех пор, пока не будет получен вектор, все компоненты которого равны нулю. Пусть $\mathbf{v}_r$ — нулевой вектор, новый нулевой компонент которого $a_1^{(r)}$. Тогда E_1 — вершина r-го ранга.

Перенумеруем вершины орграфа согласно их рангам и запишем новые номера в правый столбец матрицы, как показано в табл. 7.7.

Результаты вычислений используются для изображения орграфа с новой нумерацией вершин.

Пример 7.1. Определим ранги вершин орграфа, изображенного на рис. 7.8. Для этого запишем его в виде матрицы смежности вершин (табл. 7.8). Вычислим вектор

$$\mathbf{v}_1 = \sum_{i=1}^{5} \mathbf{v}_{E_i}, \mathbf{v}_1 = (2,0,4,0,2).$$

Так как 2-й и 4-й компоненты вектора равны нулю, то вершины E_2 и E_4 относятся к 1-му рангу. В предпоследнем столбце таблицы во 2-й и 4-й строках запишем ранги соответствующих вершин. Затем вычислим вектор $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{E_2} - \mathbf{v}_{E_4}$ и поместим результат в 7-ю строку таблицы, причем клетки данной строки, над которыми находятся нули в предшествующей строке, оставим пустыми.

Таблица 7.8

Номер строки	$E_i \backslash E_j$	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	Ранг	Новая нумерация вершин
1	E_1			1			2	E_3'
2	E_2	1		1		1	1	E_1'
3	E_3						3	E_5'
4	E_4	1		1		1	1	E_2'
5	E_5			1			2	E_4'
6	$\mathbf{v}_1$	2	0	4	0	2		
7	$\mathbf{v}_2$	0		2		0		
8	$\mathbf{v}_3$			0				

В 7-й строке появилось два новых нуля, которым соответствуют вершины 2-го ранга E_1 и E_5.

Вычислим вектор $\mathbf{v}_3$ с помощью вычитания из вектора $\mathbf{v}_2$ векторов $\mathbf{v}_{E_1}$ и $\mathbf{v}_{E_5}$, соответствующих вершинам 2-го ранга, т. е. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{E_1} - \mathbf{v}_{E_5}$.

В векторе $\mathbf{v}_3$ появится новый нуль, которому соответствует вершина 3-го ранга E_3. На этом закончим вычисления, так как $\mathbf{v}_3$ — нуль-вектор.

Совпадение рангов вершин орграфа, найденных методом Демукрона и непосредственно на чертеже, подтверждает правильность решения, и поэтому после перенумерации вершин получится орграф, изоморфный орграфу, изображенному на рис. 7.11.

7.3.4. Нахождение рангов дуг орграфа

Для нахождения рангов дуг орграфа можно воспользоваться ранее изложенными методами, несколько модифицировав их. Рассмотрим один из подходов к определению рангов дуг орграфа, заданного списковым способом. После разбиения дуг орграфа по рангам им придается более удобная нумерация, такая, что каждая дуга может опираться на дуги с меньшими порядковыми номерами. Практическую реализацию этого подхода проиллюстрируем на примере.

Требуется разбить по рангам дуги орграфа, заданного списковым способом (табл. 7.9), и при необходимости перенумеровать их. Орграф, представленный в табл. 7.9, изображен на рис. 7.12.

Таблица 7.9

Дуга	Опирается на дуги	Ранг	Новая нумерация дуг
$\vec{e}_1$	$\vec{e}_5$, $\vec{e}_6$	4	$\vec{b}_7$
$\vec{e}_2$	–	1	$\vec{b}_1$
$\vec{e}_3$	$\vec{e}_7$	2	$\vec{b}_4$
$\vec{e}_4$	$\vec{e}_7$	2	$\vec{b}_5$
$\vec{e}_5$	$\vec{e}_2$, $\vec{e}_4$	3	$\vec{b}_6$
$\vec{e}_6$	–	1	$\vec{b}_2$
$\vec{e}_7$	–	1	$\vec{b}_3$

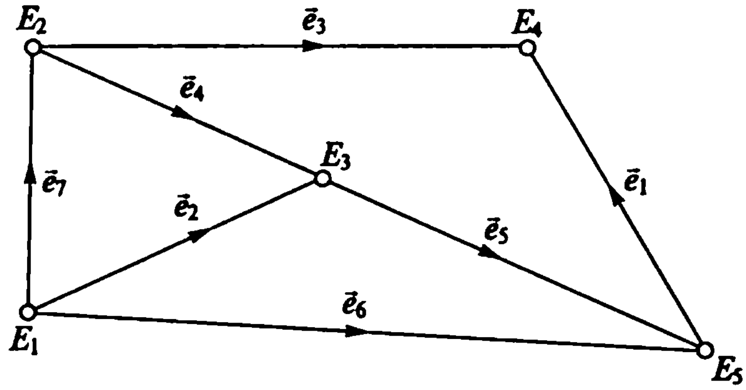


Рис. 7.12

К 1-му рангу будут относиться те дуги, которые не опираются ни на какие другие дуги.

В табл. 7.9 дуги $\vec{e}_2$, $\vec{e}_6$, $\vec{e}_7$ не опираются ни на какие другие дуги, следовательно, они относятся к 1-му рангу. Ранг этих дуг запишем в графе «Ранг» табл. 7.9.

Дуги $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$ опираются на дугу $\vec{e}_7$, следовательно, эти дуги 2-го ранга. Дуга $\vec{e}_5$ относится к 3-му рангу, так как она опирается на дугу $\vec{e}_2$ 1-го ранга и дугу $\vec{e}_4$ 2-го ранга. Дуга $\vec{e}_1$ опирается на дуги $\vec{e}_5$, $\vec{e}_6$, первая из которых 3-го ранга, а вторая — 1-го, следовательно, дуга $\vec{e}_1$ — 4-го ранга.

Перенумеруем дуги орграфа в соответствии с их рангом. Новая нумерация дуг записана в правом столбце табл. 7.9. Чтобы записать орграф с новой нумерацией дуг в структурную таблицу, поступим следующим образом. В левом столбце запишем по порядку все дуги орграфа в новой нумерации, а в правом — дуги, на которые они опираются (табл. 7.10).

Таблица 7.10

Дуга	Опирается на дуги	Дуга	Опирается на дуги
$\vec{b}_1$	—	$\vec{b}_5$	$\vec{b}_3$
$\vec{b}_2$	—	$\vec{b}_6$	$\vec{b}_1$, $\vec{b}_5$
$\vec{b}_3$	—	$\vec{b}_7$	$\vec{b}_2$, $\vec{b}_6$
$\vec{b}_4$	$\vec{b}_3$		

Так как дуги $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ 1-го ранга, то в правом столбце в первых трех строках запишем прочерки. Следующая по списку дуга $\vec{b}_4$ в старой нумерации имела номер $\vec{e}_3$ и опиралась на дугу $\vec{e}_7$, которая в новой нумерации имеет номер $\vec{b}_3$. Следовательно, дуга $\vec{b}_4$ опирается на дугу $\vec{b}_3$. Продолжая аналогичным образом, определим, что дуга $\vec{b}_5$ опирается на дугу $\vec{b}_3$, $\vec{b}_6$ — на $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_5$, $\vec{b}_7$ — на $\vec{b}_2$ и $\vec{b}_6$.

Орграф с новой нумерацией дуг, заданный списковым способом, представлен в табл. 7.10 и геометрически на рис. 7.13. Нетрудно заметить, что после нумерации каждая дуга опирается на дуги с меньшими порядковыми номерами. После разбиения элементов орграфа по рангам и их перенумерации возможно осуществление других важных исследований.

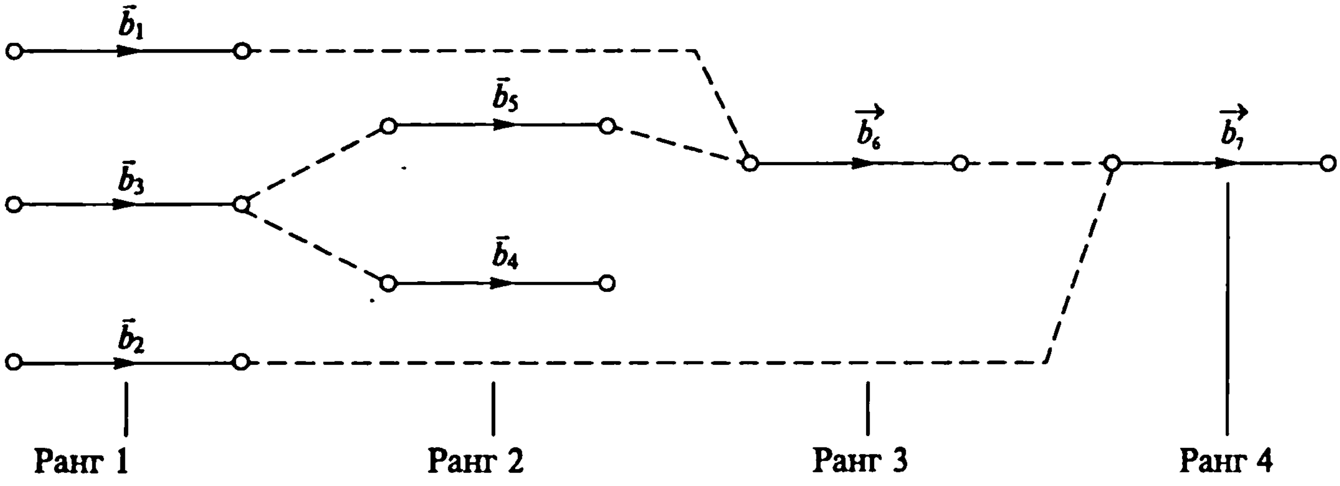


Рис. 7.13

7.4. ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ EXCEL

Рассмотрим применение Excel для нахождения рангов вершин графа на примере 7.1. Запишем граф в виде матрицы смежности вершин (табл. 7.11).

Таблица 7.11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Номер строки	Вершины							Новая нумерация вершин
2		Вершины	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	Ранг	
3	1	E_1			1			2	E_3'
4	2	E_2	1		1		1	1	E_1'
5	3	E_3						3	E_5'
6	4	E_4	1		1		1	1	E_2'
7	5	E_5			1			2	E_4'
8	6	V_1	2	0	4	0	2		
9	7	V_2	0	0	2	0	0		
10	8	V_3	0	0	0	0	0		

Найдем суммы элементов в столбцах E_j ($j = \overline{1,5}$), для чего в ячейку C8 занесем функцию СУММ C3:C7, далее выделим эту ячейку и, установив курсор на малый квадратик в правом нижнем углу (он имеет вид черного крестика), протащим его таким образом при помощи **M1** до ячейки G8. В результате функция суммирования элементов будет занесена в столбцы остальных ячеек 8-й строки электронной таблицы.

В 6-й строке (вектор V_1) находятся два нулевых элемента. Следовательно, вершины E_2 и E_4 1-го ранга. Занесем их ранг, равный единице, в графу **Ранг**. В ячейку C9 занесем формулу =C8 − C4 − C6 и, протащив курсор, как и ранее, занесем соответствующие формулы в ячейки D9:G9. В 7-й строке (вектор V_2) появятся два новых нулевых элемента, находящиеся в столбцах, соответствующих вершинам E_1 и E_5. Следовательно, эти вершины 2-го ранга. В ячейку C10 занесем формулу: =C9 − C3 − C7, а также занесем аналогичные формулы в ячейки D10:G10. В результате в 8-й строке (вектор V_3) получим еще один нуль в столбце с вершиной E_5. Следовательно, она 3-го ранга. Так как V_3 — нуль-вектор, на этом вычисления заканчиваются. Новая нумерация вершин занесена в последнюю графу табл. 7.11.

Орграф, построенный с учетом ранга вершин и их новой нумерации, будет изоморфен орграфу на рис. 7.11. В табл. 7.12 показаны формулы, занесенные в ячейки диапазона C8:G10. Если снять флажок **Формулы** в диалоговом окне **Параметры** (рис. 7.14), вызываемом командой **Параметры** из меню **Сервис**, табл. 7.12 снова примет вид табл. 7.11.

Таблица 7.12

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Номер строки	Вер-шины	Вершины						Новая нумера-ция вершин
2			E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	Ранг	
3	1	E_1			1			2	E_3'
4	2	E_2	1		1		1	1	E_1'
5	3	E_3						3	E_5'
6	4	E_4	1		1		1	1	E_2'
7	5	E_5			1			2	E_4'
8	6	V_1	=СУММ (C3:C7)	=СУММ (D3:D7)	=СУММ (E3:E7)	=СУММ(F 3:F7)	=СУММ (G3:G7)		
9	7	V_2	=C8-C4- -C6	=D8-D4- -D6	=E8-E4- -E6	=F8-F4- -F6	=G8-G4- -G6		
10	8	V_3	=C9-C3- -C7	=D9-D3- -D7	=E9-E3- -E7	=F9-F3- -F7	=G9-G3- -G7		

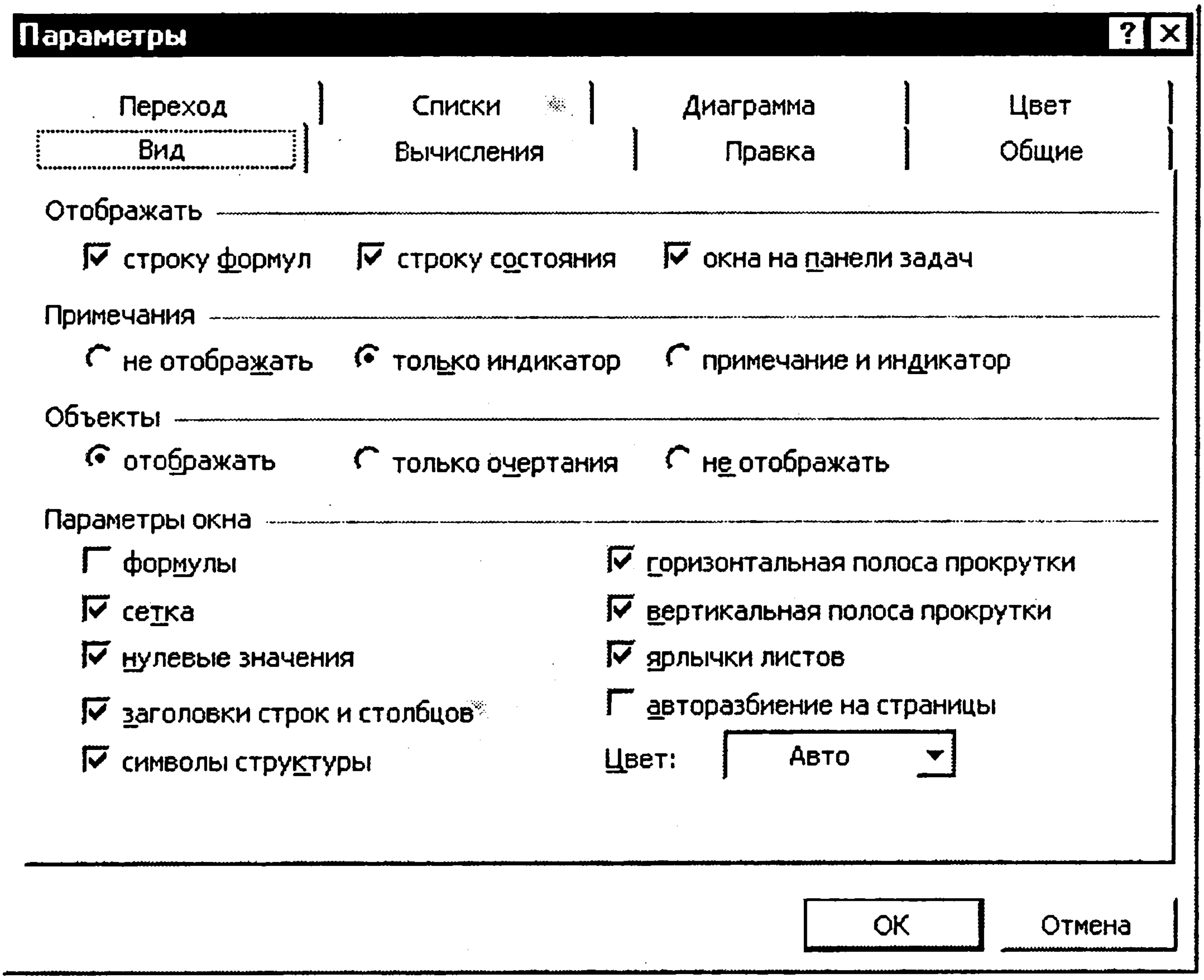


Рис. 7.14

8. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

8.1. СЕТЕВОЙ ГРАФИК КОМПЛЕКСА ОПЕРАЦИЙ И ПРАВИЛА ЕГО ПОСТРОЕНИЯ

В практике управления большими системами широко применяется *метод сетевого планирования и управления* (*СПУ*). Методы СПУ были предложены сравнительно недавно. Так как они разрабатывались в разных странах, возникло несколько их разновидностей: СПУ — в СССР, PERT и СРМ — в США и др.

Метод PERT применяется в планировании научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработок, для которых характерна неопределенность в оценке затрат времени, необходимого для выполнения отдельных операций (работ). Метод СРМ применяется тогда, когда оценки времени операций детерминированные.

Основой метода СПУ является сетевой график (сетевая модель), отражающий(ая) логическую взаимосвязь и взаимообусловленность входящих в него элементарных операций (работ).

Сетевые графики представляют собой ориентированные графы (орграфы) без контуров, дугам или вершинам которых приписаны некоторые числовые значения.

В системах СПУ используются следующие наиболее распространенные способы построения сетевых графиков:

1) сетевые графики в терминах «дуги-операции» (под операцией понимается какая-то работа). В таких графиках вершины, называемые *событиями*, соответствуют моментам времени начала или окончания одной или нескольких операций, а дуги — операциям;

2) сетевые графики в терминах «дуги-связи», в которых операции изображаются вершинами сети, а дуги показывают порядок выполнения (взаимосвязь) отдельных операций.

Каждый из способов построения сетевых графиков имеет как преимущества, так и недостатки. Учитывая, что первый способ получил большее практическое применение в нашей стране, в дальнейшем сетевые графики будем рассматривать в терминах «дуги-операции».

В сетевом графике различают три вида событий: исходное, завершающее и промежуточное. *Исходное* — это такое событие, с которого начинается выполнение комплекса операций. *Завершающее* соответствует достижению конечной цели, т.е. завершению комплекса операций. Сетевые графики с несколькими завершающими событиями называются *многоцелевыми*. К *промежуточным* относятся все прочие события.

События обозначаются кружками или другими геометрическими фигурами. Предполагается, что события не имеют продолжительности и наступают как бы мгновенно.

Моментом свершения события считается момент окончания выполнения всех входящих в это событие операций. Пока не выполнены все входящие в событие операции, не может свершиться само событие, а следовательно, не может быть начата ни одна из непосредственно следующих за ним операций.

Различают три вида операций:

1) *действительная операция* (⟶) — процесс, требующий затрат времени и ресурсов (разработка проекта, подвоз материалов, выполнение монтажных работ и т.д.);

2) *операция - ожидание* (····→) — процесс, требующий только затрат времени (затвердение бетона, естественная сушка штукатурки перед началом отделочных работ, рост растений и т.д.);

3) *фиктивная операция* (---→), или логическая зависимость, отражает технологическую или ресурсную зависимость в выполнении некоторых операций.

При построении сетевых графиков необходимо соблюдать определенные правила:

1) в сети не должно быть событий (кроме исходного), в которые не входит ни одна дуга;

2) не должно быть событий (кроме завершающего), из которых не выходит ни одной дуги;

3) сеть не должна содержать контуров;

4) любая пара событий сетевого графика может быть соединена не более чем одной дугой. Если изобразить одновременно (параллельно) выполняемые три различные операции *b*, *c*, *d* с общими начальным и конечным событиями (рис. 8.1), то возникает путаница из-за того, что различные операции имеют одно и то же обозначение (*2, 5*). В этом случае рекомендуется ввести дополнительные события и соединить их с последующими фиктивными операциями (рис. 8.2);

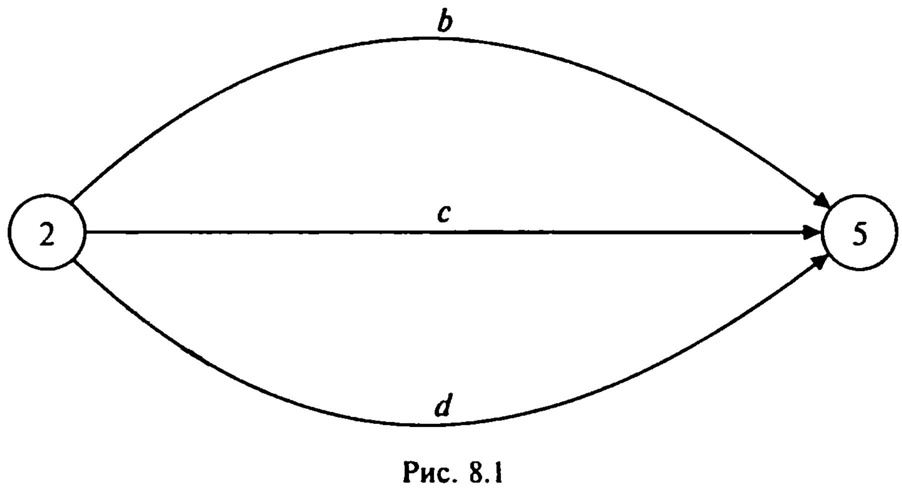


Рис. 8.1

5) номер начального события любой операции должен быть меньше номера ее конечного события;

6) если какие-либо операции могут быть начаты до полного окончания непосредственно предшествующей им операции, то последнюю целесообразно представить как ряд последовательно выполняемых операций, завершающихся определенными событиями. Например, если операции *c* и *d* могут

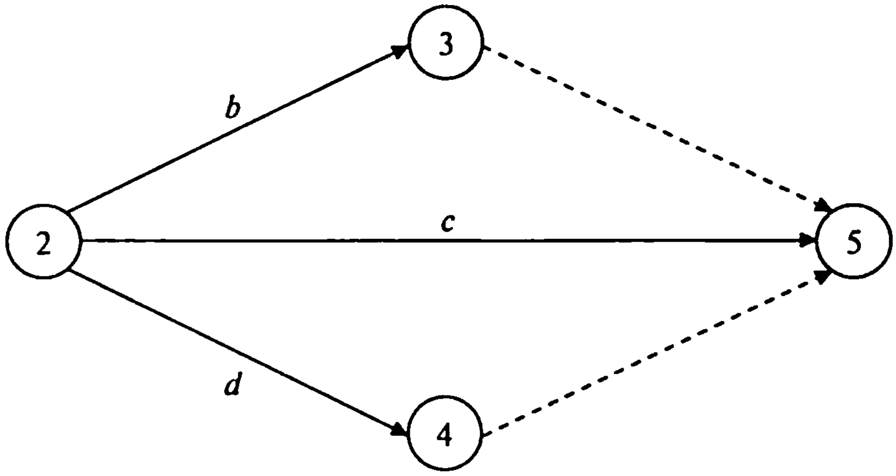


Рис. 8.2

быть начаты до полного окончания операции *b*, то операцию *b* рекомендуется разбить на элементарные операции b_1, b_2 и b_3 и представить выполнение всех операций в виде графика, изображенного на рис. 8.3.

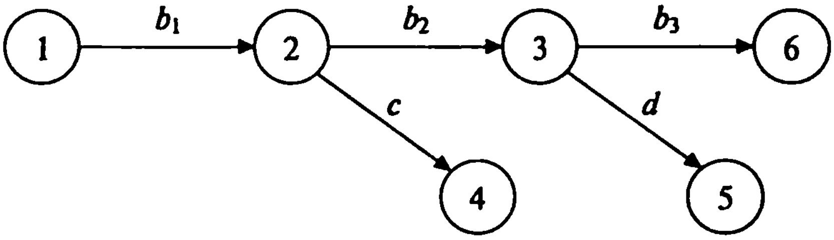


Рис. 8.3

Для отражения технологической или ресурсной зависимости в выполнении операций применяют фиктивные операции. Предположим, что операция *c* может выполняться после завершения операций *a* и *b*, а операция *d* — только после завершения операции *b*. Эта зависимость представлена на рис. 8.4, из которого видно, что операция *c* следует за операцией *a* и фиктивной операцией (*2,3*). В свою очередь операция (*2,3*) следует за операцией *b*. Тогда в силу транзитивности выполнение операции *b* предшествует выполнению операции *c*.

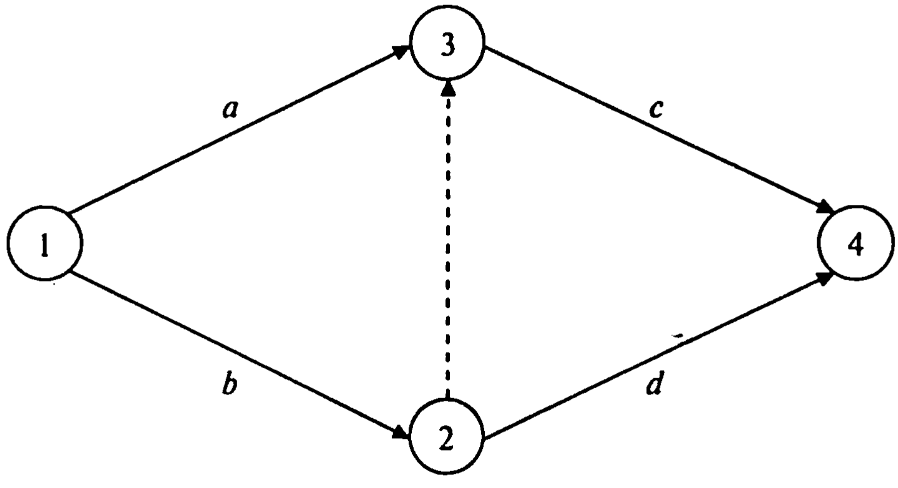


Рис. 8.4

Построение сетевого графика начинается с составления списка операций (работ), подлежащих выполнению. Последовательность операций в списке произвольная. Порядок нумерации операций осуществляется в соответствии с последовательностью их записи в списке. Перечень операций тщательно продумывается и в зависимости от конкретных условий с какой-то степенью детализируется. Операции, включенные в список, характеризуются определенной продолжительностью, которая устанавливается на основе действующих нормативов или по аналогии с ранее выполнявшимися операциями. Такие временные оценки называются *детерминированными*. Если же нормативные данные временных оценок операций отсутствуют, то определяются *вероятностные* оценки.

После составления списка операций приступают к процедуре построения сети.

Пример 8.1. Необходимо построить укрупненный сетевой график выполнения комплекса операций по реконструкции цеха. Список операций представлен в табл. 8.1. Сетевой график комплекса операций изображен на рис. 8.5.

Таблица 8.1

Операция	Шифр операции	Наименование операции	Опирается на операции	Продолжительность, дни
a_1	$(1, 2)$	Подготовительные работы	–	5
a_2	$(1, 3)$	Демонтаж старого оборудования	–	3
a_3	$(2, 6)$	Ремонтные строительно-монтажные работы	a_1	30
a_4	$(3, 4)$	Подготовка фундамента под новое оборудование	a_1, a_2	16
a_5	$(2, 4)$	Подготовка к монтажу нового оборудования	a_1	10
a_6	$(2, 5)$	Электротехнические работы	a_1	12
a_7	$(4, 5)$	Монтаж нового оборудования	a_4, a_5	8
a_8	$(5, 7)$	Подключение оборудования к электросети	a_6, a_7	2
a_9	$(7, 8)$	Наладка и технологические испытания оборудования	a_8	6
a_{10}	$(6, 8)$	Отделочные работы	a_3, a_6, a_7	8
a_{11}	$(8, 9)$	Приемка цеха в эксплуатацию	a_9, a_{10}	1

Все операции графика, за исключением фиктивных операций $(2, 3)$ и $(5, 6)$, являются действительными. Числа в скобках, приписанные дугам, означают продолжительность выполнения соответствующих операций. Операции a_1 и a_2 не опираются ни на какие операции, следовательно, на графике они изображаются дугами, выходящими из исходного события (*1*), означающего момент начала выполнения комплекса операций. Операции a_3, a_5 и a_6 опираются на операцию a_1, поэтому на графике дуги a_3, a_5 и a_6 непосредственно следуют за дугой a_1. Событие (*2*) означает момент окончания операции a_1 и начала операций, представленных дугами, выходящими из этого события. Операция a_4 опирается на операции a_1 и a_2. Графически это условие отражено посредством последовательного изображения операций (*1, 3*) и (*3, 4*) и введения фиктивной операции (*2, 3*). *Событие* (*3*) *инцидентно операциям* (*1, 3*) и (*2, 3*), следовательно, моментом свершения события (*3*) является такой момент, к которому будут выполнены все входящие в это событие операции и может быть начата операция, отраженная дугой, выходящей из него. Аналогично, с учетом технологии выполнения, изображены на графике остальные операции. Завершающее событие (*9*) означает момент окончания выполнения всего комплекса операций по реконструкции цеха. Шифры операций (табл. 8.1) состоят из номеров начального и конечного событий и практически в список заносятся после составления графика.

События построенного сетевого графика (рис. 8.5) имеют упорядоченную нумерацию. Практически же в исходном сетевом графике элементы, как правило, имеют неупорядоченную нумерацию. Поэтому после построения графика рекомендуется перенумеровать его элементы.

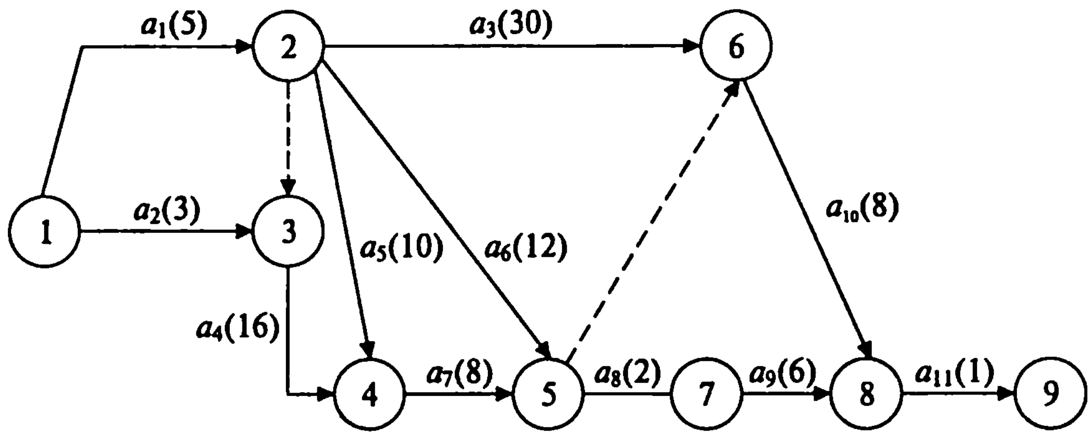


Рис. 8.5

Построение сетевых графиков скоротечных комплексов операций, когда из-за недостатка времени нет возможности производить оптимизационные расчеты, осуществляется с учетом технологических и ресурсных ограничений. Построение графиков нескоротечных комплексов операций, когда достаточно времени для их исследования, выполняется лишь с учетом технологических ограничений. Такой подход обеспечивает минимальную продолжительность выполнения комплекса операций. После построения графика рассчитываются его временные параметры и производится оптимизация по ресурсам или другим показателям, для чего используются формальные методы оптимизации.

Для разного уровня руководства составляются графики различной степени детализации. Так, например, на рис. 8.5 изображен укрупненный сетевой график реконструкции цеха. Для конкретных исполнителей составляются частные сетевые графики с большей степенью детализации.

8.2. РАСЧЕТ ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ СЕТЕВОГО ГРАФИКА

Для управления ходом выполнения комплекса операций, представленного *сетевой моделью*, оперирующая сторона должна располагать количественными параметрами элементов сети. К таким параметрам относятся: продолжительность выполнения всего комплекса операций, сроки выполнения отдельных операций и их резервы времени. Важнейшим параметром сетевого графика является также критический путь. Различают следующие виды путей: полный, предшествующий событию, следующий за событием.

Путь сетевого графика называется *полным*, если его начальная вершина совпадает с исходным событием, а конечная — с завершающим.

Предшествующий событию путь — это путь от исходного события до данного.

Следующий за событием путь есть путь от данного события до завершающего.

Критическим называется полный путь, имеющий наибольшую продолжительность во времени. Операции и события, принадлежащие критическому пути, называются соответственно *критическими операциями* и *критическими событиями*. Суммарная продолжительность операций, принадлежащих критическому пути, составляет *критическое время* $t_{кр}$ выполнения комплекса операций в целом. На графике критический путь, как правило, выделяется жирной линией.

Расчет параметров сетевого графика может осуществляться различными методами. Рассмотрим один из них.

Предположим, что продолжительности t_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, выполнения операций (i, j) известны и обозначены у соответствующих дуг графика (рис. 8.6).

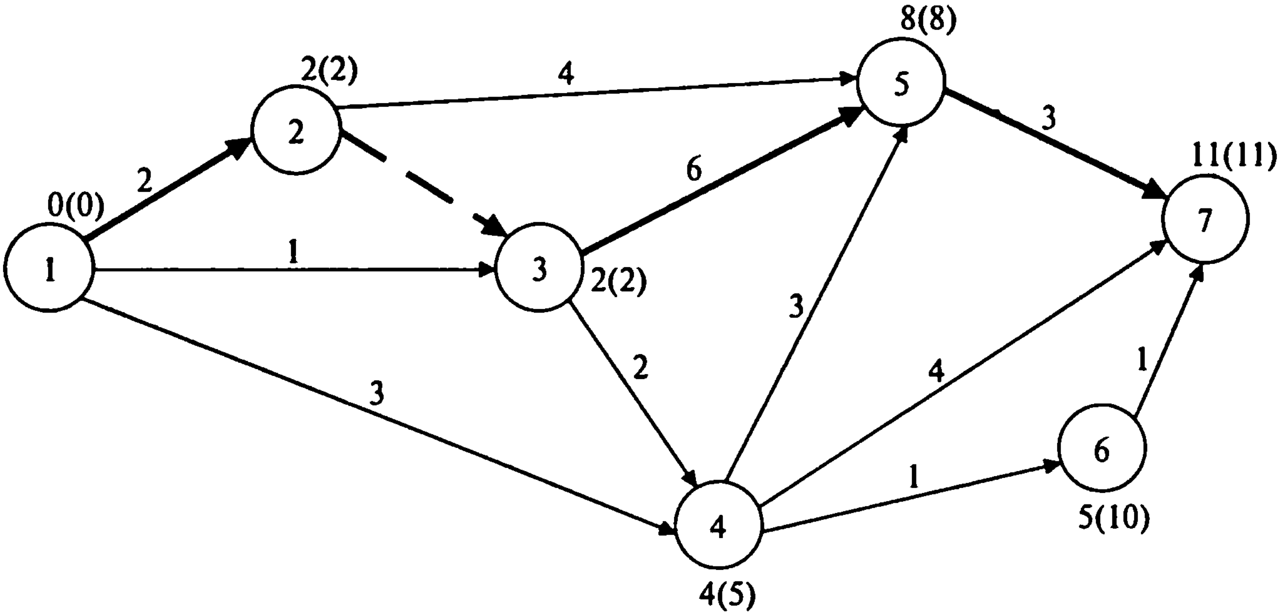


Рис. 8.6

Определим прежде всего *ожидаемые (ранние) сроки* t_i *свершения событий* (i) сетевого графика. Исходное событие означает момент начала выполнения комплекса операций, следовательно, $t_1 = 0$. Событие (*2*) свершится, очевидно, спустя 2 единицы времени после свершения события (*1*), так как время выполнения операции (*1, 2*) равно 2. Следовательно, $t_2 = t_1 + t_{12} = 0 + 2 = 2$. Событию (*3*) предшествуют два пути: $\mu_1 = (1 - 3)$ и $\mu_2 = (1 - 2 - 3)$. Продолжительность первого пути равна 1 единице времени, а второго — 2 единицам времени, так как $t_{12} + t_{23} = 2 + 0 = 2$. Продолжительность второго пути можно найти добавлением к ожидаемому сроку свершения события (*2*) времени выполнения операции (*2, 3*), т.е. $t_2 + t_{23} = 2 + 0 = 2$. Поскольку событие (*3*) может свершиться не раньше момента окончания всех входящих в него операций, то

$$t_3 = \max(t_1 + t_{13};\ t_2 + t_{23}) = \max(0 + 1;\ 2 + 0) = 2.$$

В событие (*4*) входят две дуги, исходящие из событий (*1*) и (*3*), для которых ожидаемые сроки свершения найдены. Следовательно, ожидаемый срок свершения события (*4*) $t_4 = \max(t_1 + t_{14};\ t_3 + t_{34}) = \max(0 + 3;\ 2 + 2) = 4$. Аналогично находятся ожидаемые сроки свершения событий (*5*), (*6*) и (*7*). Значения t_i, $i = \overline{1,7}$, приписаны соответствующим событиям на рис. 8.6.

Общую формулу для нахождения ожидаемых сроков свершения событий можно записать так:

$$t_1 = 0;$$

$$t_j = \max_{\{(\vec{i,j})\}}(t_i + t_{ij}),\ j = 2, 3, \ldots, n,$$

где $\{(\vec{i,j})\}$ — подмножество дуг сети, входящих в событие (*j*).

Ожидаемый срок свершения события (7) $t_7 = 11$ совпадает с критическим временем (суммарной продолжительностью операций, принадлежащих критическому пути). Возвращаясь теперь от завершающего события к исходному, выделим операции, принадлежащие критическому пути. Из трех операций, входящих в событие (7), $t_{кр} = 11$ определила операция (*5,7*), выполнение которой начинается после свершения события (5) и продолжается 3 единицы времени ($t_5 + t_{57} = 8 + 3 = 11$). Момент свершения события (5) определила операция (*3, 5*), так как $t_2 + t_{35} = 2 + 6 = 8$. В свою очередь момент свершения события (*3, 5*) определила операция (*2, 3*), а события (*2*) — операция (*1*, 2). Эти операции на рис. 8.6 выделены жирной линией. Таким образом, критический путь $\mu_{кр} = (1 - 2 - 3 - 5 - 7)$. Увеличение времени выполнения любой операции, принадлежащей критическому пути, ведет к увеличению времени выполнения комплекса операций. Увеличение же времени выполнения или задержка с выполнением некритических операций может не отразиться на сроке свершения завершающего события. Например, время выполнения операции (*4, 5*) может быть увеличено, или начало ее выполнения может быть отсрочено на 1 единицу времени, и это не отразится на сроке свершения события (*5*), а следовательно, и всего комплекса операций.

Начало выполнения операции (*4*, 7) может быть отсрочено на 3 единицы времени. Отсюда следует, что для события (*4*), не лежащего на критическом пути, существует *предельный (поздний) срок* свершения. Обозначим предельный срок свершения любого события сетевого графика через $t_i^*, i = \overline{1,n}$. Примем, что ожидаемый и предельный сроки свершения завершающего события (n) совпадают ($t_n = t_n^*$), тогда предельный срок свершения любого события сетевого графика равен минимальной разности между предельными сроками окончания операций, исходящих из данного события, и временем выполнения соответствующих операций. Нахождение предельного срока осуществляется по формуле

$$t_n^* = t_n;$$

$$t_i^* = \min_{\{(\overset{<}{i,j})\}}(t_j^* - t_{ij}),\ i = \overline{1, n-1},$$

где $\{(\overset{<}{i,j})\}$ — подмножество дуг сети, исходящих из события (i).

В нашем примере $t_7^* = t_7 = 11$. Определим этот показатель для оставшихся событий. Из события (*5*) исходит одна операция, следовательно, $t_5^* = t_7^* - t_{57} = 11 - 3 = 8$. Аналогично $t_6^* = t_7^* - t_{67} = 10$. Из события (*4*) исходят три операции, поэтому

$$t_4^* = \min(t_5^* - t_{45};\ t_6^* - t_{46};\ t_7^* - t_{47}) = \min(8 - 3;\ 10 - 1;\ 11 - 4) = 5.$$

Аналогично находим, что $t_3^* = 2$, $t_2^* = 2$, $t_1^* = 0$ (на рис. 8.6 предельные сроки свершения событий указаны в скобках). Для критических событий эти сроки совпадают с ожидаемыми.

Некритические события имеют *резервы времени*, которые показывают, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение событий без изменения срока свершения завершающего события. Резерв времени R_i события (i) равен разности между предельным и ожидаемым сроками его свершения:

$$R_i = t_i^* - t_i.$$

Ожидаемые и предельные сроки свершения событий находятся в диалектическом единстве со сроками начала и окончания операций: *ранний срок начала* выполнения операции (i, j) равен ожидаемому сроку свершения события (i)($t_{ij}^{\text{р.н}} = t_i$); *поздний срок окончания операции* совпадает с поздним сроком свершения ее конечного события ($t_{ij}^{\text{п.о}} = t_j^*$); *поздний срок начала* выполнения операции равен разности между предельным сроком свершения ее конечного события и продолжительностью ($t_{ij}^{\text{п.н}} = t_j^* - t_{ij}$); *ранний срок окончания* операции равен сумме ожидаемого срока свершения ее начального события и продолжительности ($t_{ij}^{\text{р.о}} = t_i + t_{ij}$).

Сроки выполнения операций находятся в границах, определяемых параметрами $t_{ij}^{\text{р.н}}$, $t_{ij}^{\text{п.н}}$, $t_{ij}^{\text{р.о}}$, $t_{ij}^{\text{п.о}}$. Следовательно, операции, как и события, могут иметь некоторый резерв времени. Различают четыре разновидности резервов времени операций: полный, свободный, частный первого вида и частный второго вида.

Полный резерв времени операции $R_{ij}^{\text{п}}$ показывает, на сколько можно сдвинуть начало выполнения операции или увеличить ее продолжительность, не изменяя ожидаемого срока свершения начального события, при условии, что конечное для данной операции событие свершится не позднее своего предельного срока. Величина полного резерва времени вычисляется по формуле

$$R_{ij}^{\text{п}} = t_j^{*} - (t_i + t_{ij}) = t_j^{*} - t_{ij}^{\text{р.о}}.$$

Свободный резерв времени операции $R_{ij}^{\text{с}}$ показывает, на сколько можно увеличить продолжительность или отсрочить начало выполнения операции (i, j), при условии, что начальное и конечное ее события свершаются в ожидаемое время:

$$R_{ij}^{\text{с}} = t_j - (t_i + t_{ij}) = t_j - t_{ij}^{\text{р.о}}.$$

Частный резерв времени первого вида R'_{ij} — это запас времени, которым можно располагать при выполнении операции (i, j) в предположении, что начальное и конечное ее события свершаются в предельные сроки:

$$R'_{ij} = t_j^{*} - (t_i^{*} + t_{ij}) = t_{ij}^{\text{п.н}} - t_i^{*}.$$

Частный резерв времени второго вида R''_{ij} — это запас времени, которым можно располагать при выполнении операции (i, j) в предположении, что ее начальное событие свершится в предельное, а конечное — в ожидаемое время. Для некоторых операций интервал времени между предельным сроком свершения начального события и ожидаемым сроком свершения конечного события может быть меньше их продолжительности. В этом случае R''_{ij} принимается равным нулю. Определяется частный резерв времени второго вида по формуле

$$R''_{ij} = \max(t_j - t_i^{*} - t_{ij};\ 0).$$

Найдем резервы времени операции (*4, 6*) сетевого графика (рис. 8.6):

$$R_{46}^{\text{п}} = t_6^{*} - (t_4 + t_{46}) = 10 - (4 + 1) = 5;$$

$$R_{46}^{\text{с}} = t_6 - (t_4 + t_{46}) = 5 - (4 + 1) = 0;$$

$$R'_{46} = t_6^{*} - (t_4^{*} + t_{46}) = 10 - (5 + 1) = 4;$$

$$R''_{46} = \max(t_6 - t_4^{*} - t_{46};\ 0) = \max(5 - 5 - 1;\ 0) = 0.$$

8.3. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СЕТИ

Сетевые графики комплекса операций могут иметь *детерминированную* или *стохастическую* структуру. Если все операции комплекса и их взаимосвязи точно определены, то такая структура графика называется *детерминированной*. *Стохастическая* структура означает, что все операции включаются в сеть с некоторой вероятностью. Например, в научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработках заранее не известны не только продолжительности отдельных операций, но и их перечень, а также структура сети.

Расчет параметров и анализ сетей случайной структуры связаны с известными трудностями. Поэтому на практике обычно применяются детерминированные сети со случайными временными оценками операций. Такие сети называются *вероятностными*.

При исследовании вероятностных сетей возможны два случая: 1) операции не являются новыми, и мы приближенно знаем для каждой из них функцию распределения продолжительности выполнения; 2) операции являются новыми, малоизученными, и для них функции распределения продолжительностей неизвестны. В первом случае по известной функции распределения нетрудно определить среднее значение (математическое ожидание) и дисперсию продолжительности выполнения каждой операции. Во втором случае применяется метод усреднения. Исходными данными для метода усреднения являются вероятностные оценки продолжительности каждой операции: a — минимальная продолжительность (оптимистическая оценка) операции; b — максимальная продолжительность (пессимистическая оценка) операции; m — наиболее вероятная продолжительность (мода) операции. Эти оценки времени задаются ответственным исполнителем или группой экспертов.

Исследования, проведенные в нашей стране и за рубежом, позволили обосновать возможность использования бета-распределения в качестве типового распределения продолжительности операций с оценками a, b и m.

Функция плотности бета-распределения (рис. 8.7) имеет вид

$$f(t)=\begin{cases} c(t-a)^p(b-t)^q & \text{для } a\le t\le b,\\ 0 & \text{для } -\infty<t<a,\ b<t<\infty,\end{cases}$$

где p, q — параметры распределения, зависящие от вида операций; c — нормирующий множитель, определяемый из условия $c\int_a^b (t-a)^p(b-t)^q\,dt=1$.

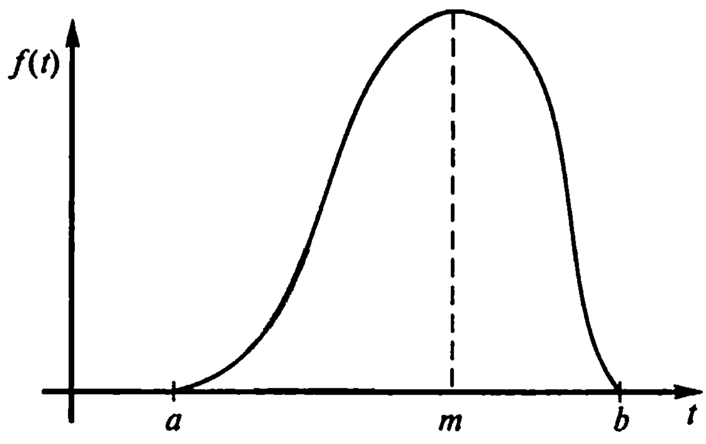


Рис. 8.7

По известной функции распределения $f(t)$ находятся числовые характеристики операций:

— среднее значение (математическое ожидание) продолжительности операции

$$M[t] = \bar{t} = \int_a^b tf(t)dt = \frac{(p+q)m + (a+b)}{p+q+2};$$

— дисперсия

$$D[t] = \sigma_t^2 = \int_a^b t^2 f(t)dt - \bar{t}^2.$$

Статистический анализ, проведенный эмпирико-экспериментальным путем разработчиками математического аппарата системы PERT, позволил установить, что $p + q \approx 4$. Следовательно,

$$\bar{t} = \frac{a + 4m + b}{6}; \tag{8.1}$$

$$D[t] \approx \left(\frac{b-a}{6}\right)^2. \tag{8.2}$$

После определения математических ожиданий продолжительностей операций по формуле (8.1) проводится расчет временных параметров сети, как и в детерминированном случае. Длительность критического пути рассматривают как математическое ожидание случайной величины $t_{\text{кр}}$:

$$M[t_{\text{кр}}] = \bar{t}_{\text{кр}} = \sum_{(i,j)\text{кр}} \bar{t}_{ij}.$$

Дисперсию продолжительности пути считают равной сумме дисперсий продолжительностей операций, находящихся на критическом пути,

$$D[t_{\text{кр}}] = \sum_{(i,j)\in\mu_{\text{кр}}} D_{ij}[t].$$

Практически расчет временных параметров сети по средним значениям продолжительностей операций не позволяет строго определить срок завершения комплекса операций. Фактическое отклонение случайных величин t_{ij} от их средних значений $\bar{t}_{ij}$ может быть как в большую, так и в меньшую сторону. Поэтому фактическая продолжительность выполнения комплекса операций $t_{\text{ф}}$ может быть больше или меньше $\bar{t}_{\text{кр}}$. В связи с этим представляет большой интерес оценка вероятности завершения комплекса операций к определенному сроку, которая зависит от дисперсии $D[t_{\text{кр}}]$ продолжительности критического пути.

При одних значениях величин t_{ij} может быть один критический путь, при других — другой. Однако если продолжительности работ отклоняются от своих средних значений на такую малую величину, что критический путь не изменяется, и если на критическом пути лежит значительное число операций (5 и более), то на основании центральной предельной теоремы можно считать, что его продолжительность приближенно подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $\bar{t}_{кр}$, $D[t_{кр}]$. Тогда вычисление вероятности того, что фактическая продолжительность выполнения комплекса операций $t_ф$ меньше планового директивного срока $T_{пл}$, производится по формуле

$$P(t_ф - T_{пл}) = \Phi(u) + 0{,}5, \tag{8.3}$$

где $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа, значения которой берутся из таблиц; $u = \frac{T_{пл} - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}}$; $\sigma_{кр} = \sqrt{D[t_{кр}]}$ — среднеквадратичное отклонение.

По формуле (8.3) можно вычислить вероятность выполнения любой операции в заданный срок.

Если же при случайных изменениях операций может изменяться критический путь, то при большом числе операций в комплексе вычисление вероятности того, что фактическая продолжительность выполнения комплекса операций $t_ф$ меньше директивного срока, может осуществляться на ЭЦВМ методом Монте-Карло.

Рассмотрим подход к определению математического ожидания $\bar{t}_{ij}$ и дисперсии $D_{ij}[t]$ операций (i, j) сетевого проекта на основе двух оценок: оптимистической a и пессимистической b. Многочисленные эмпирико-экспериментальные исследования двухоценочной методики показали, что в бета-распределении величины p и q, определенные для большого количества сетевых моделей, близки к постоянным значениям: $p = 1$, $q = 2$. Выбрав их в качестве стандартных показателей степени, получим функцию, которая относится к классу бета-распределений и имеет следующие параметры:

— математическое ожидание

$$\bar{t}_{ij} = \int_a^b t f(t) dt = \frac{3a + 2b}{5}; \tag{8.4}$$

— дисперсия

$$D_{ij}[t] = \int_a^b t^2 f(t) dt - \bar{t}_{ij}^2 = \left(\frac{b-a}{5}\right)^2. \tag{8.5}$$

Применение двух временных оценок существенно уменьшает объем информации, который требуется от ответственного исполнителя, так как последний освобождается от задания наиболее вероятной оценки.

Пример 8.2. Найти критическое время $t_{кр}$ выполнения комплекса операций, представленного на рис. 8.8, используя средние оценки продолжительности и дисперсию, а также определить:

1) вероятность выполнения комплекса операций за: а) $T_{пл}$ = 35 дней; б) $T_{пл}$ = 42 дня;

2) время, за которое комплекс операций будет выполнен с вероятностью, не меньшей: *а*) $P = 0{,}75$; *б*) $P = 0{,}35$;

3) вероятность завершения операции (*2, 5*) в 8-й день.

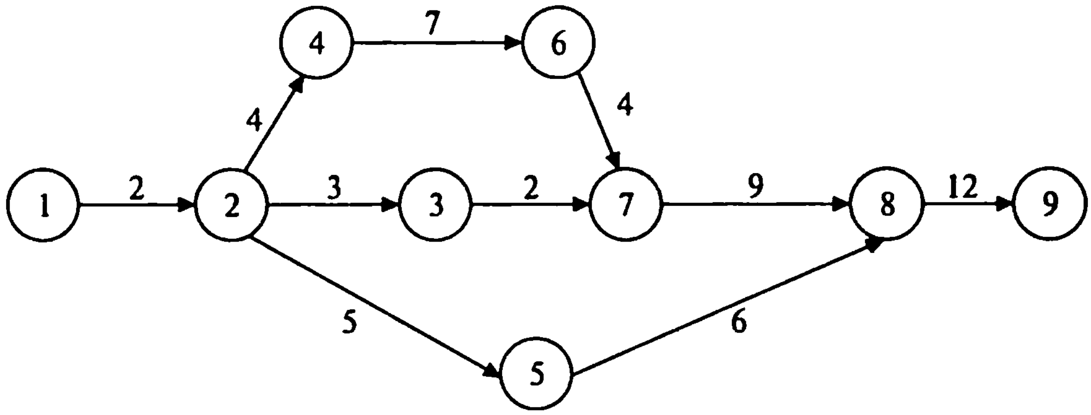


Рис. 8.8

Оптимистическая оценка a_{ij} и пессимистическая оценка b_{ij} для каждой операции заданы в табл. 8.2. Случайные отклонения времени выполнения операций от математических ожиданий не меняют критического пути. По формулам (8.4), (8.5) вычислим $\bar{t}_{ij}$ и $D_{ij}[t]$ и занесем в две правые графы табл. 8.2.

Таблица 8.2

Исходные параметры			Расчетные параметры	
(*i, j*)	a_{ij}	b_{ij}	$\bar{t}_{ij}$	D_{ij}
(*1, 2*)	1	3,5	2	0,25
(*2, 3*)	2	4,5	3	0,25
(*2, 4*)	2, 5	6,25	4	0,56
(*2, 5*)	4	6,5	5	0,25
(*3, 7*)	1, 5	2,75	2	0,063
(*4, 6*)	5	10	7	1
(*5, 8*)	4, 5	8,25	6	0,56
(*6, 7*)	3	5,5	4	0,25
(*7, 8*)	8	10,5	9	0,25
(*8, 9*)	8	18	12	4

Продолжительность критического пути, найденного по средним оценкам времени (средние оценки приписаны дугам графика), $t_{кр}$ = 38 дней, по оптимистическим оценкам: $t_{кр.опт}$ = 27,5 дня, по пессимистическим: $t_{кр.пес}$ = 53,75 дня. Практически комплекс операций может быть выполнен с некоторой вероятностью в любой срок интервала [27,5; 53,75].

Так как критический путь включает 6 операций и, согласно центральной предельной теореме, его длина подчиняется нормальному закону распределения, она характеризуется параметрами:

$$\bar{t}_{кр} = 38; D[t_{кр}] = \sum_{(i,j)кр} D_{ij} = 6{,}31; \sigma_{кр} = \sqrt{D[t_{кр}]} = 2{,}51.$$

Вычислим вероятность выполнения комплекса операций за $T_{пл}$ = 35 дней:

$$P(t_ф < T_{пл}) = \Phi\left(\frac{35-38}{2{,}51}\right) + 0{,}5 = -0{,}383 + 0{,}5 = 0{,}117.$$

Вероятность выполнения комплекса операций за $T_{пл}$ = 42 дня:

$$P(t_ф < T_{пл}) = \Phi\left(\frac{42-38}{2{,}51}\right) + 0{,}5 = 0{,}439 + 0{,}5 = 0{,}939.$$

Определим время, за которое комплекс операций будет выполнен с вероятностью не менее чем $P = 0{,}75$.

Интегралу $\Phi(u) = P - 0{,}5 = 0{,}75 - 0{,}5 = 0{,}25$ соответствует значение $u = 0{,}68$. Следовательно,

$$T_{пл} = \bar{t}_{кр} + \sigma_{кр} u = 38 + 2{,}51 \cdot 0{,}68 = 38 + 1{,}7 = 39{,}7 \approx 40 \text{дней}.$$

Для $P = 0{,}35$ $\Phi(u) = 0{,}35 - 0{,}50 = -0{,}15$ и $u = -0{,}39$.

Таким образом,

$$T_{пл} = 38 + 2{,}51(-0{,}39) = 38 - 0{,}98 \approx 37 \text{дней}.$$

Ожидаемый срок свершения события (*5*) $t_5 = 7$. Сумма дисперсий операций, принадлежащих пути (*1–2–5*), ведущему к событию (*5*),

$$D_{12}(t) + D_{25}(t) = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5.$$

Таким образом,

$$P_{(2,5)}(t_ф < T_{пл}) = \Phi\left(\frac{8-7}{\sqrt{0{,}5}}\right) + 0{,}5 = \Phi(1{,}41) + 0{,}5 = 0{,}4207 + 0{,}5 = 0{,}9207 \approx 0{,}921.$$

Следовательно, с вероятностью 0,921 операция будет завершена в плановый срок.

8.4. ОПТИМИЗАЦИЯ КОМПЛЕКСА ОПЕРАЦИЙ

8.4.1. Оптимизация комплекса операций по времени

Оптимизация по времени комплекса операций, представленного сетевым графиком, сводится к сокращению продолжительности критического пути. Такая задача возникает тогда, когда критическое время выполнения комплекса операций превосходит срок T_0, заданный оперирующей стороной. Естественно предположить, что сокращение времени выполнения комплекса операций требует осуществления определенных мероприятий или вложения каких-то средств.

В некоторых случаях сокращение может быть достигнуто за счет перепланировки сетевого проекта (изменения топологии сети). Так, например, одновременно выполняемые операции, не лежащие на критическом пути с большими резервами времени, целесообразно выполнять последовательно, если такое выполнение допускается технологией. Освободившиеся при этом ресурсы можно использовать на критических операциях, что приведет к ускорению их выполнения. Сокращение времени выполнения операций возможно также за счет автоматизации и механизации производственных процессов, улучшения организации работ, применения передовой технологии и других мероприятий.

Задачи оптимизации комплекса операций по времени решаются с привлечением дополнительных средств и с использованием внутренних резервов.

Рассмотрим две постановки задачи *оптимизации с использованием дополнительных средств.*

I. Задан сетевой график $G(E,\vec{e})$ выполнения комплекса операций, где E — множество событий графика, $\vec{e}$ — множество операций. Время выполнения каждой операции (i,j) равно t_{ij}. Известно, что вложение x_{ij} дополнительных средств в операцию (i,j) сокращает время выполнения с t_{ij} до $t'_{ij} = f_{ij}(x_{ij}) < t_{ij}$. Следует, однако, иметь в виду, что насыщение критических операций ресурсами не беспредельно. Для каждой операции существует минимально возможное время ее выполнения, равное d_{ij}. Требуется определить время начала $T_{ij}^{\text{н}}$ и окончания $T_{ij}^{\text{о}}$ выполнения операций, а также размер дополнительно вложенных средств x_{ij} в каждую из операций (i,j), чтобы: общее время выполнения комплекса операций было минимальным; сумма вложенных дополнительных средств не превышала заданной величины B; время выполнения каждой операции было не меньше минимально возможного времени d_{ij}.

Математически условия задачи можно записать следующим образом:

$$t_{\text{кр}} = T_{n-1,n}^{\text{о}} \to \min; \tag{8.6}$$

$$\sum_{(i,j)\in\vec{e}} x_{ij} \le B; \tag{8.7}$$

$$T_{ij}^{\text{о}} - T_{ij}^{\text{н}} \ge d_{ij} \text{ для всех } (i,j) \in \vec{e}; \tag{8.8}$$

$$t_{ij}(x_{ij}) = T_{ij}^{о} - T_{ij}^{н} \text{ для всех } (i,j) \in \vec{e}; \quad (8.9)$$

$$T_{jr}^{н} \geq T_{ij}^{о} \text{ для всех } i,\ j,\ r \in E; \quad (8.10)$$

$$T_{ij}^{н} \geq 0,\ T_{ij}^{о} \geq 0,\ x_{ij} \geq 0, \text{ для всех } (i,j) \in \vec{e}. \quad (8.11)$$

Добавив при необходимости фиктивную операцию, выходящую из последнего события, целевую функцию любого графика можно записать в виде выражения (8.6).

Ограничения-равенства (8.9) показывают зависимость продолжительности выполнения операций от вложенных средств. Ограничения (8.10) обеспечивают выполнение условий предшествования операций в соответствии с топологией сети (время начала выполнения каждой операции должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей операции).

Критический путь $\mu_{кр}$ в данной задаче является функцией от объемов дополнительно вкладываемых средств x_{ij}.

Сформулированная задача относится к классу оптимизационных задач и может быть решена методами линейной или нелинейной оптимизации в зависимости от вида функций $f_{ij}(x_{ij})$.

Пример 8.3. Комплекс операций представлен сетевым графиком (рис. 8.9). Цифры, приписанные дугам графика, означают соответственно продолжительность t_{ij} и минимально возможное время d_{ij} выполнения операций.

Продолжительность выполнения операций зависит линейно от дополнительно вложенных средств и выражается соотношением

$$t'_{ij} = t_{ij}(1 - k_{ij}x_{ij}), \text{ где } k_{12} = 0{,}2; \quad k_{13} = 0{,}1; \quad k_{14} = 0{,}3;$$

$$k_{23} = 0{,}2; \quad k_{24} = 0{,}5; \quad k_{45} = 0{,}3.$$

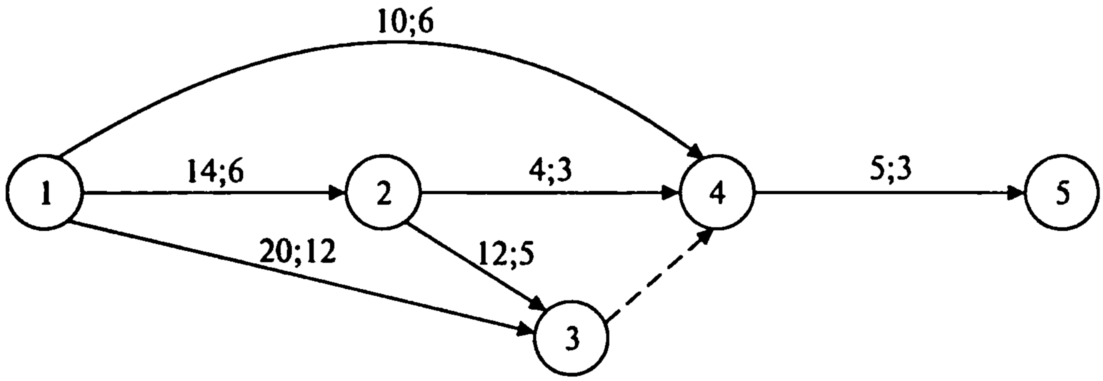


Рис. 8.9

Требуется построить развернутую математическую модель для определения времени начала и окончания выполнения операций и количества средств, вкладываемых в каждую операцию, чтобы время выполнения комплекса операций было минимальным, а сумма вложенных средств не превышала 10 единиц.

В силу особенностей сетевого графика целевая функция имеет вид

$$t_{кр} = T^{о}_{45} \to \min.$$

Запишем ограничения задачи:

— сумма вложенных средств не должна превышать наличного их количества:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{45} \le 10;$$

— время выполнения каждой операции должно быть не меньше минимально возможного времени:

$$T^{о}_{12} - T^{н}_{12} \ge 6; \quad T^{о}_{13} - T^{н}_{13} \ge 12; \quad T^{о}_{14} - T^{н}_{14} \ge 6;$$

$$T^{о}_{23} - T^{н}_{23} \ge 5; \quad T^{о}_{24} - T^{н}_{24} \ge 3; \quad T^{о}_{34} - T^{н}_{34} \ge 0;$$

$$T^{о}_{45} - T^{н}_{45} \ge 3;$$

— зависимость продолжительностей операций от вложенных средств влечет ограничения-равенства:

$$T^{о}_{12} - T^{н}_{12} = 14(1 - 0{,}2x_{12}); \; T^{о}_{13} - T^{н}_{13} = 20(1 - 0{,}1x_{13});$$

$$T^{о}_{14} - T^{н}_{14} = 10(1 - 0{,}3x_{14}); \; T^{о}_{23} - T^{н}_{23} = 12(1 - 0{,}2x_{23});$$

$$T^{о}_{24} - T^{н}_{24} = 4(1 - 0{,}5x_{24}); \; T^{о}_{45} - T^{н}_{45} = 5(1 - 0{,}3x_{45});$$

— время начала выполнения каждой операции должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей операции (моменты времени $T^{н}_{12} = T^{н}_{13} = T^{н}_{14} = 0$):

$$T^{н}_{23} \ge T^{о}_{12}; \quad T^{н}_{24} \ge T^{о}_{12}; \quad T^{н}_{34} \ge T^{о}_{23}; \quad T^{н}_{34} \ge T^{о}_{13};$$

$$T^{н}_{45} \ge T^{о}_{14}; \quad T^{н}_{45} \ge T^{о}_{34}; \quad T^{н}_{45} \ge T^{о}_{24};$$

— условие неотрицательности неизвестных:

$$T^{н}_{ij} \ge 0, T^{о}_{ij} \ge 0, x_{ij} \ge 0 \text{ для всех } (i,j) \in \vec{e}.$$

Сформулированная математическая модель задачи, содержащая 17 неизвестных и 21 ограничение, может быть реализована симплекс-методом (читателю рекомендуется решить эту задачу самостоятельно).

Пример 8.4. Комплекс операций представлен сетевым графиком (рис. 8.10). Цифры, приписанные дугам, означают соответственно продолжительность t_{ij} и минимально возможное время d_{ij} выполнения операций (дней).

Продолжительность выполнения операций зависит линейно от дополнительно вложенных средств и выражается соотношением

$$t'_{ij} = t_{ij}(1 - k_{ij}x_{ij}), \text{ где } k_{12} = 0{,}01, \quad k_{13} = 0{,}02,$$

$$k_{23} = 0{,}05, \quad k_{24} = 0{,}03, \quad k_{35} = 0{,}04, \quad k_{45} = 0{,}02.$$

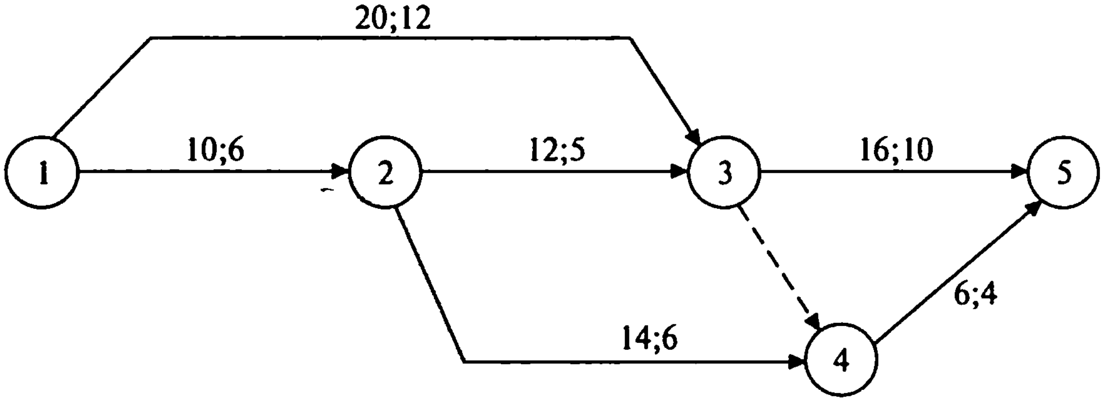


Рис. 8.10

Требуется оптимизировать сетевой график по времени, т.е. определить время выполнения каждой операции сетевого графика таким образом, чтобы время выполнения комплекса операций было минимальным, а сумма вложенных средств B не превышала 12 единиц.

Добавив на сетевом графике фиктивную операцию (*5, 6*), запишем целевую функцию в виде:

$$t_{кр} = T_{56}^{о} \to \min.$$

Запишем ограничения задачи:

— сумма вложенных средств не должна превышать наличного их количества:

$$x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{24} + x_{35} + x_{45} \le 12;$$

— время выполнения каждой операции должно быть не меньше минимально возможного времени:

$$T_{12}^{о} - T_{12}^{н} \ge 6;\ T_{13}^{о} - T_{13}^{н} \ge 12;\ T_{23}^{о} - T_{23}^{н} \ge 5;$$

$$T_{24}^{о} - T_{24}^{н} \ge 6;\ T_{34}^{о} - T_{34}^{н} \ge 0;\ T_{35}^{о} - T_{35}^{н} = 10;$$

$$T_{45}^{о} - T_{45}^{н} \ge 4;\ T_{56}^{о} - T_{56}^{н} \ge 0;$$

— зависимость продолжительностей операций от вложенных средств в виде ограничений-равенств:

$$T_{12}^{о} - T_{12}^{н} = 10(1 - 0{,}01x_{12});\ T_{13}^{о} - T_{13}^{н} = 20(1 - 0{,}02x_{13});$$

$$T_{23}^{о} - T_{23}^{н} = 12(1 - 0{,}05x_{23});\ T_{24}^{о} - T_{24}^{н} = 14(1 - 0{,}03x_{24});$$

$$T_{35}^{о} - T_{35}^{н} = 16(1 - 0{,}04x_{35});\ T_{45}^{о} - T_{45}^{н} = 6(1 - 0{,}02x_{45});$$

— время начала выполнения каждой операции должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей операции (моменты времени $T_{12}^{н} = T_{13}^{н} = 0$):

$$T_{23}^{н} \ge T_{12}^{о};\ T_{24}^{н} \ge T_{12}^{о};\ T_{35}^{н} \ge T_{13}^{о};\ T_{35}^{н} \ge T_{23}^{о};$$

$$T_{34}^{н} \ge T_{13}^{о};\ T_{34}^{н} \ge T_{23}^{о};\ T_{45}^{н} \ge T_{24}^{о};\ T_{45}^{н} \ge T_{34}^{о};$$

$$T_{56}^{н} \ge T_{35}^{о};\ T_{56}^{н} \ge T_{45}^{о};$$

— условие неотрицательности неизвестных: $T_{ij}^{н} \ge 0; T_{ij}^{о} \ge 0;\ x_{ij} \ge 0$, для всех дуг сетевого графика.

Таблица 8.3

Математическая модель задачи оптимизации сетевого графика по времени

№ ограничения	Ограничения	Неизвестные задачи																				Правые части ограничений
		$T_{12}^{о}$	$T_{13}^{о}$	$T_{23}^{н}$	$T_{23}^{о}$	$T_{24}^{н}$	$T_{24}^{о}$	$T_{34}^{н}$	$T_{34}^{о}$	$T_{35}^{н}$	$T_{35}^{о}$	$T_{45}^{н}$	$T_{45}^{о}$	$T_{56}^{н}$	$T_{56}^{о}$	$x_{1,2}$	$x_{1,3}$	$x_{2,3}$	$x_{2,4}$	$x_{3,5}$	$x_{4,5}$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	
1	На подвижные средства															1	1	1	1	1	1	≤ 12
2	На минимально возможные значения времени выполнения операций	1																				≥ 6
3			1																			≥ 12
4				−1	1																	≥ 5
5						−1	1															≥ 6
6								−1	1													≥ 0
7										−1	1											≥ 10
8												−1	1									≥ 4
9														−1	1							≥ 0
10	На значения продолжительности операций в зависимости от вложенных средств	1														0,1						= 10
11			1														0,4					= 20
12				−1	1													0,6				= 12
13						−1	1												0,42			= 14
14										−1	1									0,64		= 16
15												−1	1								0,12	= 6
16	На предшествование операций	−1		1																		≥ 0
17		−1				1																≥ 0
18			−1							1												≥ 0
19					−1					1												≥ 0
20			−1					1														≥ 0
21					−1			1														≥ 0
22							−1					1										≥ 0
23									−1			1										≥ 0
24											−1			1								≥ 0
25													−1	1								≥ 0
	$t_{кр}$ =														1							→ min

Табличная запись математической модели задачи оптимизации сетевого графика по времени представлена в табл. 8.3, в которой под неизвестными $T_{ij}^{н}$, $T_{ij}^{о}$ второй заглавной строки записаны (в третьей строке) соответствующие им неизвестные $x_j (j = \overline{1, 20})$. Это порядковые номера неизвестных, заложенных в программе ЭВМ. После реализации данной модели по программе Simplex на ПЭВМ получено решение:

$$t_{кр} = 30{,}425; T_{12}^{о} = 10; T_{13}^{о} = 20; T_{23}^{н} = 10; T_{23}^{о} = 20{,}425;$$

$$T_{24}^{н} = 10{,}425; T_{24}^{о} = 24{,}425; T_{34}^{н} = 20{,}425; T_{34}^{о} = 24{,}425;$$

$$T_{35}^{н} = 20{,}425; T_{35}^{о} = 30{,}425; T_{45}^{н} = 24{,}425; T_{45}^{о} = 30{,}425;$$

$$T_{56}^{н} = T_{56}^{о} = 30{,}425; x_{1,2} = 0; x_{1,3} = 0; x_{2,3} = 2{,}625; x_{2,4} = 0;$$

$$x_{3,5} = 9{,}375; x_{4,5} = 0.$$

Таким образом, чтобы выполнить комплекс операций за 30,425 дня, необходимо вложить в операцию (*2, 3*) 2,625 единицы подвижных средств и в операцию (*3, 5*) — 9,375 единицы, при этом время выполнения операции (*2, 3*) равно 10,425 дня и операции (*3, 5*) — 10 дням.

Упражнения

В задачах **8.1–8.6** условие такое же, как и в примере 8.4, т.е. необходимо осуществить оптимизацию сетевого графика (рис. 8.10) по времени. Исходные данные задач представлены в табл. 8.4.

Найдите критический путь на сетевом графике до и после его оптимизации и сравните результаты.

Таблица 8.4

Номер задачи	Показатели	Операции							Дополнительное количество подвижных средств (*B*)
		(*1, 2*)	(*1, 3*)	(*2, 3*)	(*2, 4*)	(*3, 4*)	(*3, 5*)	(*4, 5*)	
8.1	t_{ij}	10	20	12	14	0	16	6	10
	d_{ij}	6	12	5	6	0	10	4	
	k_{ij}	0,05	0,01	0,02	0,03	—	0,01	0,04	
8.2	t_{ij}	6	10	12	8	0	6	10	12
	d_{ij}	4	6	5	4	0	3	7	
	k_{ij}	0,02	0,04	0,01	0,06	—	0,02	0,05	
8.3	t_{ij}	8	4	3	4	0	7	7	8
	d_{ij}	6	3	1	2	0	4	5	
	k_{ij}	0,04	0,03	0,02	0,06	—	0,05	0,01	

Окончание табл. 8.4

Номер задачи	Показатели	Операции							Дополнительное количество подвижных средств (B)
		(*1*, *2*)	(*1*, *3*)	(*2*, *3*)	(*2*, *4*)	(*3*, *4*)	(*3*, *5*)	(*4*, *5*)	
8.4	t_{ij}	16	12	10	8	0	3	2	6
	d_{ij}	10	7	6	5	0	2	1	
	k_{ij}	0,02	0,01	0,06	0,03	—	0,01	0,04	
8.5	t_{ij}	6	18	10	8	0	10	7	14
	d_{ij}	4	12	6	5	0	7	4	
	k_{ij}	0,04	0,03	0,01	0,05	—	0,05	0,02	
8.6	t_{ij}	6	18	10	8	0	6	10	9
	d_{ij}	4	14	5	4	0	4	6	
	k_{ij}	0,03	0,05	0,03	0,01	—	0,02	0,04	

В задачах **8.7—8.10** необходимо осуществить оптимизацию по времени комплекса операций, представленного сетевым графиком (рис. 8.11), за счет использования дополнительных средств. Время выполнения операций линейно зависит от дополнительно вкладываемых средств и выражается формулой $t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}x_{ij}$. Сравните время выполнения комплекса операций до оптимизации и после оптимизации сетевого графика. Исходные данные задач представлены в табл. 8.5.

Таблица 8.5

Номер задачи	Показатели	Операции					Дополнительное количество подвижных средств (B)
		(*1*, *2*)	(*1*, *3*)	(*2*, *3*)	(*2*, *4*)	(*3*, *4*)	
8.7	t_{ij}	14	20	12	16	5	16
	d_{ij}	8	12	7	10	3	
	k_{ij}	0,2	0,1	0,4	0,25	0,3	
8.8	t_{ij}	10	20	8	16	12	12
	d_{ij}	6	14	5	12	7	
	k_{ij}	0,5	0,3	0,6	0,2	0,45	
8.9	t_{ij}	24	18	6	16	8	10
	d_{ij}	20	12	4	14	5	
	k_{ij}	0,2	0,4	0,1	0,35	0,5	
8.10	t_{ij}	6	22	18	14	10	24
	d_{ij}	4	16	15	10	6	
	k_{ij}	0,1	0,15	0,3	0,5	0,2	

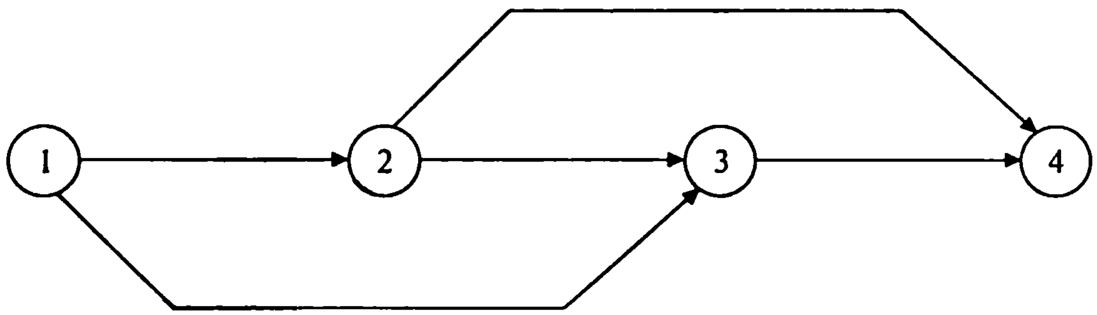


Рис. 8.11

II. Постановка этой задачи отличается от предыдущей тем, что в ней наложено ограничение на общее время выполнения комплекса операций, которое не должно превышать величину T_0 (директивное время).

Ставится задача определить значения неизвестных величин x_{ij} (объемы дополнительно вкладываемых средств в операции (i,j)) таким образом, чтобы:

— суммарное количество дополнительно привлекаемых средств было минимальным, т.е.

$$f(x) = \sum_{(i,j)\in\bar{e}} x_{ij} \to \min;$$

— время завершения комплекса операций было не выше заданного срока T_0, а время выполнения каждой операции $(i,j) \in \bar{e}$ — не меньше минимально возможного времени d_{ij}, что выражается соотношениями:

$$T^{о}_{n-1,n} \le T_0;$$

$$T^{о}_{ij} - T^{н}_{ij} \ge d_{ij} \text{ для всех } (i,j) \in \bar{e},$$

а зависимость продолжительности выполнения операций от вложенных средств выражается соотношениями:

$$T^{о}_{ij} - T^{н}_{ij} = f_{ij}(x_{ij}) \text{ для всех } (i,j) \in \bar{e};$$

— время окончания любой операции (i,j) сетевого графика было не больше времени начала непосредственно следующей за ней операции (j, r), т.е. для любых смежных операций сети (i,j) и (j, r) должно выполняться условие

$$T^{о}_{ij} \le T^{н}_{jr};$$

— соблюдалось условие неотрицательности переменных

$$T^{н}_{ij} \ge 0;\ T^{о}_{ij} \ge 0;\ x_{ij} \ge 0, \text{ для всех } (i,j) \in \bar{e}.$$

Пример 8.5. Комплекс операций представлен сетевым графиком (рис. 8.12). Цифры, приписанные дугам графика, означают соответственно продолжительность t_{ij} и минимально возможное время d_{ij} выполнения операций.

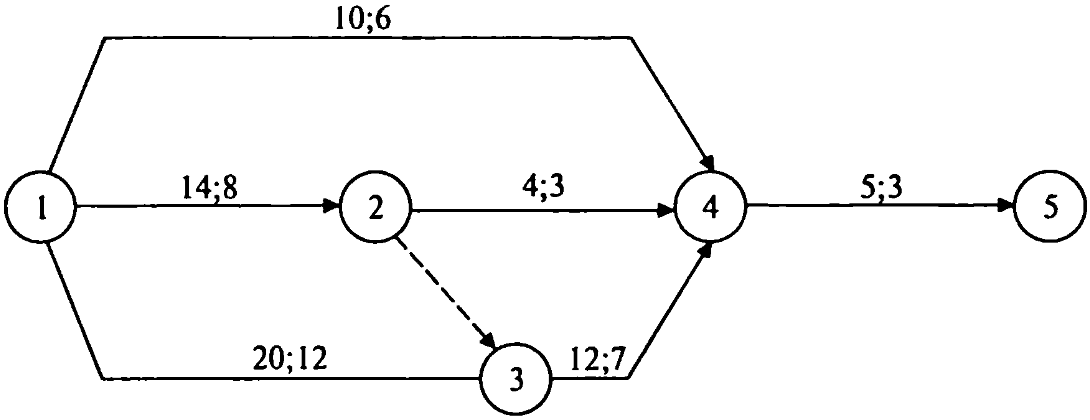


Рис. 8.12

Требуется определить, сколько вложить дополнительно средств в каждую операцию, чтобы время завершения комплекса операций не превосходило $T_0 = 26$, время выполнения каждой операции было не меньше минимально возможного времени d_{ij} и суммарное количество дополнительно вкладываемых средств было минимальным, в предположении, что продолжительность выполнения операций линейно зависит от дополнительно вложенных средств и выражается соотношением:

$$t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}x_{ij}, \text{ где } k_{12} = 0{,}15;\ k_{13} = 0{,}3;\ k_{14} = 0{,}1;$$
$$k_{24} = 0{,}5;\ k_{34} = 0{,}3;\ k_{45} = 0{,}25.$$

Целевая функция задачи имеет вид

$$f(x) = x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} \to \min.$$

Запишем ограничения задачи:

— время завершения комплекса операций не должно превышать директивное время:

$$T_{45}^{\text{о}} \le 26;$$

— время выполнения каждой операции должно быть не меньше минимально возможного времени:

$$T_{12}^{\text{о}} - T_{12}^{\text{н}} \ge 8;\ T_{13}^{\text{о}} - T_{13}^{\text{н}} \ge 12;\ T_{14}^{\text{о}} - T_{14}^{\text{н}} \ge 6;$$

$$T_{23}^{\text{о}} - T_{23}^{\text{н}} \ge 0;\ T_{24}^{\text{о}} - T_{24}^{\text{н}} \ge 3;\ T_{34}^{\text{о}} - T_{34}^{\text{н}} \ge 7;$$

$$T_{45}^{\text{о}} - T_{45}^{\text{н}} \ge 3;$$

— зависимость продолжительности каждой операции от вложенных средств (ограничения-равенства):

$$T_{12}^{\text{о}} - T_{12}^{\text{н}} = 14 - 0{,}15x_{12};\ T_{13}^{\text{о}} - T_{13}^{\text{н}} = 20 - 0{,}3x_{13};$$

$$T_{14}^{\text{о}} - T_{14}^{\text{н}} = 10 - 0{,}1x_{14};\ T_{24}^{\text{о}} - T_{24}^{\text{н}} = 4 - 0{,}5x_{24};$$

$$T_{34}^{\text{о}} - T_{34}^{\text{н}} = 12 - 0{,}3x_{34};\ T_{45}^{\text{о}} - T_{45}^{\text{н}} = 5 - 0{,}25x_{45};$$

— время начала выполнения каждой операции должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей операции (моменты времени $T^{н}_{12} = T^{н}_{13} = T^{н}_{14} = 0$):

$$T^{н}_{23} \ge T^{о}_{12};\ T^{н}_{24} \ge T^{о}_{12};\ T^{н}_{34} \ge T^{о}_{13};\ T^{н}_{34} \ge T^{о}_{23};$$

$$T^{н}_{45} \ge T^{о}_{14};\ T^{н}_{45} \ge T^{о}_{24};\ T^{н}_{45} \ge T^{о}_{34};$$

— условие неотрицательности неизвестных:

$$T^{н}_{ij} \ge 0;\ T^{о}_{ij} \ge 0;\ x_{ij} \ge 0, \text{ для всех дуг сетевого графика.}$$

Табличная запись математической модели задачи оптимизации сетевого графика по времени представлена в табл. 8.6.

После реализации данной модели на ПЭВМ по программе **Simplex** получено решение:

$$x_{1,2} = 0;\ x_{1,3} = 20;\ x_{1,4} = 0;\ x_{2,4} = 0;\ x_{3,4} = 16{,}667;\ x_{4,5} = 0;$$

$$T^{о}_{12} = 14;\ T^{о}_{13} = 14;\ T^{о}_{14} = 10;\ T^{н}_{23} = 14;\ T^{о}_{23} = 14;$$

$$T^{н}_{24} = 14;\ T^{о}_{24} = 21;\ T^{н}_{34} = 14;\ T^{о}_{34} = 21;\ T^{н}_{45} = 21;\ T^{о}_{45} = 26;$$

$$f(x)_{\min} = 36{,}667.$$

Таким образом, чтобы выполнить комплекс операций за директивное время $T_0 = 26$, необходимо дополнительно 36,667 единицы средств. При этом время выполнения операции (*1, 3*) сократилось на 6 единиц и операции (*3, 4*) — на 5 единиц.

Упражнения

В задачах **8.11—8.18** условие такое же, как и в примере 8.5, т.е. необходимо осуществить оптимизацию комплекса операций, представленного сетевым графиком (рис. 8.13). Исходные параметры задач представлены в табл. 8.7.

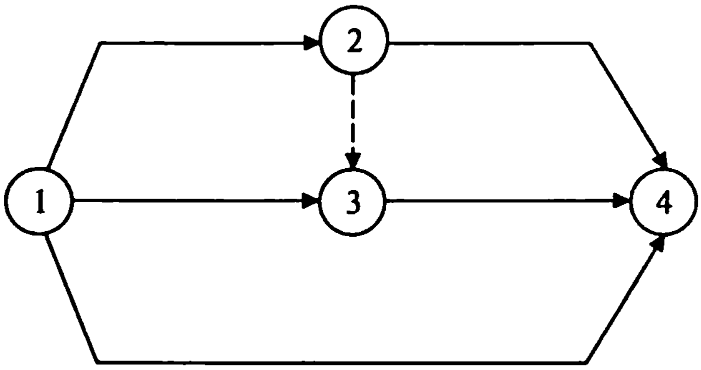


Рис. 8.13

Таблица 8.6

№ ограничения	Ограничения	Неизвестные																															Правые части ограничений
		$T^{о}_{12}$	$T^{о}_{13}$	$T^{о}_{14}$	$T^{н}_{23}$	$T^{о}_{23}$	$T^{н}_{24}$	$T^{о}_{24}$	$T^{н}_{34}$	$T^{о}_{34}$	$T^{н}_{45}$	$T^{о}_{45}$	$i_{1,2}$	$i_{1,3}$	$i_{1,4}$	$i_{2,4}$	$i_{3,4}$	$i_{4,5}$	Дополнительные неизвестные														
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}	x_{28}	x_{29}	x_{30}	x_{31}	
1	на окончание операций комплекса											1																					≤ 26
2	на минимально возможное время выполнения операций	1																	−1														= 8
3			1																	−1													= 12
4				1																	−1												= 6
5					−1	1																−1											= 0
6							−1	1															−1										= 3
7									−1	1														−1									= 7
8											−1	1													−1								= 3
9	на продолжительность операций в зависимости от вложенных средств	1											0,15																				= 14
10			1											0,3																			= 20
11				1											0,1																		= 10
12							−1	1								0,5																	= 4
13									−1	1							0,3																= 12
14											−1	1						0,25															= 5
15	на предшествование операций	−1			1																					−1							= 0
16		−1					1																				−1						= 0
17			−1						1																			−1					= 0
18						−1			1																				−1				= 0
19				−1							1																			−1			= 0
20								−1			1																				−1		= 0
21										−1	1																					−1	= 0
	$f(x)$												1	1	1	1	1	1															→ min

Таблица 8.7

Номер задачи	Показатели	Операции					T_0
		(*1, 2*)	(*1, 3*)	(*1, 4*)	(*2, 4*)	(*3, 4*)	
8.11	t_{ij}	24	17	28	16	12	30
	d_{ij}	18	12	20	10	9	
	k_{ij}	0,2	0,4	0,1	0,1	0,5	
8.12	t_{ij}	20	10	24	12	18	29
	d_{ij}	14	6	16	8	12	
	k_{ij}	0,1	0,3	0,5	0,2	0,25	
8.13	t_{ij}	24	17	30	16	12	32
	d_{ij}	18	13	20	10	12	
	k_{ij}	0,3	0,1	0,15	0,4	0,2	
8.14	t_{ij}	16	10	24	18	20	28
	d_{ij}	12	8	16	14	15	
	k_{ij}	0,45	0,2	0,1	0,4	0,1	
8.15	t_{ij}	20	16	38	14	10	26
	d_{ij}	10	12	30	8	6	
	k_{ij}	0,25	0,1	0,5	0,4	0,4	
8.16	t_{ij}	20	16	38	14	10	36
	d_{ij}	10	12	30	10	8	
	k_{ij}	0,4	0,5	0,2	0,1	0,15	
8.17	t_{ij}	24	17	28	18	12	34
	d_{ij}	18	14	22	10	8	
	k_{ij}	0,2	0,4	0,6	0,1	0,7	
8.18	t_{ij}	10	20	12	14	6	20
	d_{ij}	6	12	5	8	4	
	k_{ij}	0,8	0,6	0,2	0,3	0,35	

Рассмотрим математическую модель задачи *оптимизации сетевого графика в случае использования внутренних резервов*. Пусть для комплекса операций, заданного сетевым графиком, известно время выполнения t_{ij} каждой операции (i, j). В распоряжении оперирующей стороны имеются подвижные средства в количестве B, которые распределены между операциями. Для выполнения каждой операции выделено b_{ij} подвижных средств. Средства x_{ij}, снятые с операции (i, j), увеличивают продолжительность выполнения операции с t_{ij} до $t'_{ij} = \psi_{ij}(x_{ij}) > t_{ij}$, а средства x_{ij}, вложенные в операцию (i, j), уменьшают продолжительность выполнения до величины $t''_{ij} = \varphi_{ij}(x_{ij}) < t_{ij}$. Некритические операции имеют резервы времени, поэтому, перебрасывая средства с некритических операций на критические, можно уменьшить продолжительность выполнения комплекса операций.

Требуется так перераспределить подвижные средства между операциями, чтобы продолжительность выполнения комплекса операций была минимальной.

Обозначим количество средств, перебрасываемых на операцию (i, j), через x_{ij} (если с операции (i, j) снимаются средства, то значение x_{ij} отрицательно).

Новые продолжительности будут равны:

— для операций, с которых снимаются средства —

$$t'_{ij} = \psi_{ij}(|x_{ij}|);$$

— для операций, на которые перебрасываются средства —

$$t'_{ij} = \varphi_{ij}(x_{ij}).$$

Суммарное количество средств, снятых с каких-либо операций и добавленных другим операциям, должно быть равно нулю, т.е.

$$\sum_{(i,j)\in\vec{e}} x_{ij} = 0.$$

Количество подвижных средств, снимаемых с операций (i, j), не должно превышать соответствующих величин b_{ij}:

$$x_{ij} \geq -b_{ij}, (i, j) \in \vec{e}. \quad (8.12)$$

Целевая функция, отражающая общую продолжительность выполнения комплекса операций, имеет вид

$$T = \sum_{(i,j)\in\mu_{кр}} t'_{ij} + \sum_{(i,j)\in\mu_{кр}} t''_{ij} \to \min.$$

Ограничения (8.12) записываются для всех операций сетевого графика, так как в результате расчетов критические операции могут перейти в некритические, и наоборот. По той же причине в целевую функцию включены две суммы. В первую сумму включаются продолжительности операций, с которых снимаются средства, во вторую — операций, на которые перебрасываются средства, если те и другие входят в критический путь.

8.4.2. Оптимизация комплекса операций по стоимости

Рассмотрим частный случай оптимизации комплекса операций по стоимости (затратам)*. Будем предполагать, что затраты на выполнение отдельных операций находятся в обратной зависимости от продолжительности их выполнения. При

*Под стоимостью выполнения операции подразумеваются прямые затраты.

этой зависимости коэффициент дополнительных затрат (КДЗ) k_{ij} для операции (i, j) вычисляется по формуле

$$k_{ij} = \frac{c'_{ij} - c''_{ij}}{t''_{ij} - t'_{ij}}, \qquad (8.13)$$

где t'_{ij} — срочный режим выполнения операции (наименьшая продолжительность), которому соответствуют наибольшие затраты c'_{ij}; t''_{ij} — нормальный режим выполнения операции (наибольшая продолжительность), которому соответствуют минимальные затраты c''_{ij}.

КДЗ показывает, на сколько увеличится стоимость операции при увеличении продолжительности на единицу времени.

В случае ***оптимизации при нефиксированной величине критического пути*** предполагаем, что сетевой график комплекса операций построен. Для каждой операции установлены оценки на уровне наибольших продолжительностей t''_{ij} и минимальных затрат c''_{ij}. Следовательно, продолжительность критического пути будет наибольшей, а стоимость выполнения комплекса операций — наименьшей (минимальной). Необходимо сократить критический путь до некоторого минимально возможного значения при минимальном возрастании стоимости выполнения комплекса операций.

В общем случае сетевой график может содержать несколько критических путей, взаимосвязь между операциями которых может быть довольно сложной. Не ограничивая общности изложения сущности подхода к решению задачи, рассмотрим более простой случай, а именно: будем полагать, что если график содержит несколько критических путей, то или они не имеют общих операций, или же имеется одна либо несколько общих операций для всех критических путей.

При этом предположении алгоритм оптимизации комплекса операций по стоимости сводится к следующему.

Предварительный шаг. Определяем коэффициенты дополнительных затрат. Используя продолжительность операций t''_{ij}, находим критический путь, длину критического пути $t_{кр}$, полные резервы времени операций $R^{п}_{ij}$ сетевого графика и затраты на реализацию комплекса операций C.

Общий шаг.

1. Среди критических находим операцию, для которой КДЗ наименьший. Если найденная операция является общей для всех критических путей или если критический путь один, то она и подлежит сокращению. Если же найденная операция не является для критических путей общей, однако пути имеют одну или несколько общих операций, то на каждом из них находим операцию с наименьшим КДЗ, суммируем КДЗ этих операций и сравниваем с КДЗ той из общих операций, для которой он наименьший. Если сумма КДЗ операций меньше КДЗ общей операции критических путей, то все эти операции подлежат сокращению. Если же, наоборот, сумма КДЗ операций больше КДЗ общей операции, то сокращению подлежит общая для критических путей операция. Если критические пути не имеют общих операций, то на каждом из них находится операция с наименьшим КДЗ.

2. Производим сокращение продолжительности этой операции (этих операций) до тех пор, пока она (они) не достигнет (не достигнут) минимальной продолжительности t'_{ij} или не образуется новый критический путь (полный резерв одной из некритических операций сети будет равен нулю).

3. Для данного варианта сетевого графика определяем критический путь, $t_{кр}$, $R^{п}_{ij}$ и C.

4. Проверяем, все ли операции критического пути достигли минимальной продолжительности. Если достигли, действие алгоритма закончено, так как сокращение продолжительности некритических операций увеличивает стоимость выполнения всего комплекса, не влияя на длину критического пути. Если же не достигли, переходим к п.1.

Пример 8.6. Сетевой график комплекса операций изображен на рис. 8.9. Цифры, приписанные дугам графика, означают продолжительности выполнения операций в нормальном и срочном режимах соответственно. Прямые затраты на выполнение операций следующие:

$$c''_{12}=150;\ c'_{12}=190;\ c''_{13}=111;\ c'_{13}=175;\ c''_{14}=30;\ c'_{14}=90;$$

$$c''_{23}=66;\ c'_{23}=87;\ c''_{24}=72;\ c'_{24}=112;\ c''_{45}=89;\ c'_{45}=123.$$

Требуется сократить критический путь при минимальном возрастании стоимости выполнения комплекса операций.

Предварительный шаг. Определяем КДЗ по формуле (8.13):

$$k_{12}=5;\ k_{13}=8;\ k_{14}=15;\ k_{23}=3;\ k_{24}=40;\ k_{45}=17.$$

Находим, что при наибольшей продолжительности операций t''_{ij} критический путь $\mu_{кр} = (1-2-3-4-5)$, $t_{кр}=31$, резервы времени некритических операций $R^{п}_{13}=6$, $R^{п}_{14}=16$, $R^{п}_{24}=8$ и стоимость выполнения комплекса операций $C = 518$. Результаты расчетов заносим в табл. 8.8.

Первый шаг.

1. Среди критических операций наименьший КДЗ имеет операция $(2,\ 3)$: $k_{23}=3$.
2. Сокращаем время выполнения операции $(2,\ 3)$ на величину, равную

$$\min(t''_{23}-t'_{23};\ R^{п}_{13};\ R^{п}_{14};\ R^{п}_{24}) = \min(7;\ 6;\ 16;\ 8) = 6.$$

3. В результате сокращения операции $(2,\ 3)$ образовались два критических пути: $\mu' = (1-2-3-4-5)$ и $\mu'' = (1-3-4-5)$ с общими операциями $(3,\ 4)$ и $(4,\ 5)$. Продолжительность критического пути уменьшилась на 6 единиц: $t^{(1)}_{кр}=25$. Резервы времени некритических операций составляют: $R^{п}_{14}=10$, $R^{п}_{24}=2$, а критических — равны нулю. Стоимость выполнения комплекса операций $C = 536$ (данные занесены табл. 8.8).

4. Так как критические операции выполняются за время, большее чем t'_{ij}, то переходим ко второму шагу оптимизации.

Второй шаг.

1. Критической операцией с наименьшим КДЗ является операция (*2, 3*), для которой $k_{23} = 3$. Но эта операция принадлежит только пути μ', и уменьшение ее продолжительности не дает желаемого результата. Поэтому на пути μ'' находим операцию с наименьшим КДЗ, которая выполняется параллельно операции (*2, 3*). Такой операцией является единственная операция (*1, 3*), для которой $k_{13} = 8$. Сумма КДЗ $k_{13} + k_{23} = 11$, что меньше $k_{34} = \infty$ и $k_{45} = 17$, следовательно, сокращению подлежат операции (*1, 3*) и (*2, 3*).

2. Операции (*1, 3*) и (*2, 3*) сокращаем на 1 единицу, так как наименьшая продолжительность операции (*1, 3*) равна 5 и дальнейшее сокращение ее невозможно.

3. Рассчитываем параметры сетевого графика и заносим их в строки табл. 8.8. Значение продолжительности операции (*2, 3*) $t_{23} = t'_{23} = 5$ выделяем (шрифтом). Критические пути после сокращения операций сохранились: $\mu' = (1 - 2 - 3 - 4 - 5)$ и $\mu'' = (1 - 3 - 4 - 5)$.

Таблица 8.8

Параметры			Операции (*i, j*) (*1,2*)	(*1,3*)	(*1,4*)	(*2,3*)	(*2,4*)	(*3,4*)	(*4,5*)	Продолжительность критического пути $t_{кр}$	Стоимость *C*
t''_{ij}			14	20	10	12	4	0	5		
t'_{ij}			6	12	6	5	3	0	3		
k_{ij}			5	8	15	3	40	∞	17		
t_{ij}	Шаг оптимизации	Предв.	14	20	10	12	4	0	5	31	518
		1	14	20	10	6	4	0	5	25	536
		2	14	19	10	**5**	4	0	5	24	547
		3	7	**12**	10	**5**	4	0	5	17	638
		4	7	**12**	10	**5**	4	0	**3**	15	672
R''_{ij}	Шаг оптимизации	Предв.	0	6	16	0	8	0	0		
		1	0	0	10	0	2	0	0		
		2	0	0	9	0	1	0	0		
		3	0	0	2	0	1	0	0		
		4	0	0	2	0	1	0	0		
Сокращение времени Δt			7	8	0	7	0	0	2		
Приращение стоимости ΔC			35	64	0	21	0	0	34		

4. Учитывая, что не все критические операции выполняются в срочном режиме, переходим к выполнению третьего шага.

Третий шаг.

1. Из оставшихся критических операций наименьший КДЗ имеет операция (*1, 2*), принадлежащая пути μ', для которой $k_{12} = 5$. Из пути μ'' выбираем операцию (*1, 3*), которая выполняется параллельно операции (*1, 2*). Сумма $k_{12} + k_{13} = 13$, что меньше $k_{34} = \infty$ и $k_{45} = 17$. Следовательно, сокращению подлежат операции (*1, 2*) и (*1, 3*).

2. Сокращаем продолжительности операций (*1, 2*) и (*1, 3*) на 7 единиц, так как $\min(t''_{12} - t'_{12};\ t_{13} - t'_{13}) = \min(14 - 6;\ 19 - 12) = 7$ и эта величина меньше полного резерва некритической операции (*1, 4*). Заносим продолжительности операций в соответствующую строку табл. 8.8. Дальнейшее сокращение продолжительности критической операции (*1, 3*) невозможно, поэтому значение $t_{13} = 12$ выделяем.

3. Рассчитываем параметры сетевого графика и заносим в соответствующие строки табл. 8.8. Критические пути остались прежними: $\mu' = (1 - 2 - 3 - 4 - 5)$ и $\mu'' = (1 - 3 - 4 - 5)$.

4. Переходим к четвертому шагу оптимизации.

Четвертый шаг.

1. Из оставшихся критических операций наименьший КДЗ имеет операция (*1, 2*). Однако сокращать ее не имеет смысла, потому что уменьшение ее продолжительности не повлияет на длину критического пути, а лишь увеличит стоимость выполнения комплекса операций. Поэтому сокращению подлежит операция (*4, 5*), для которой $k_{45} = 17$.

2. Операцию (*4, 5*), принадлежащую обоим критическим путям, сокращаем на 2 единицы времени.

3. Рассчитываем параметры сети и заносим их в таблицу. Дальнейшее сокращение операции (*4, 5*) невозможно, поэтому значение $t_{45} = t'_{45} = 3$ выделяем.

4. Все продолжительности операций критического пути (*1–3–4–5*) уменьшены до минимальных. Следовательно, выполнение алгоритма закончено.

Пример 8.7. Комплекс операций представлен сетевым графиком (рис. 8.14). Цифры, приписанные дугам графика, означают продолжительности выполнения операций в нормальном и срочном режимах соответственно. Прямые затраты на выполнение операций следующие:

$$c''_{12} = 160;\ c'_{12} = 190;\ c''_{13} = 120;\ c'_{13} = 176;\ c''_{24} = 35;\ c'_{24} = 95;$$

$$c''_{25} = 60;\ c'_{25} = 84;\ c''_{34} = 72;\ c'_{34} = 112;\ c''_{45} = 110;\ c'_{45} = 144.$$

Требуется максимально сократить критический путь при минимальном возрастании стоимости выполнения операций.

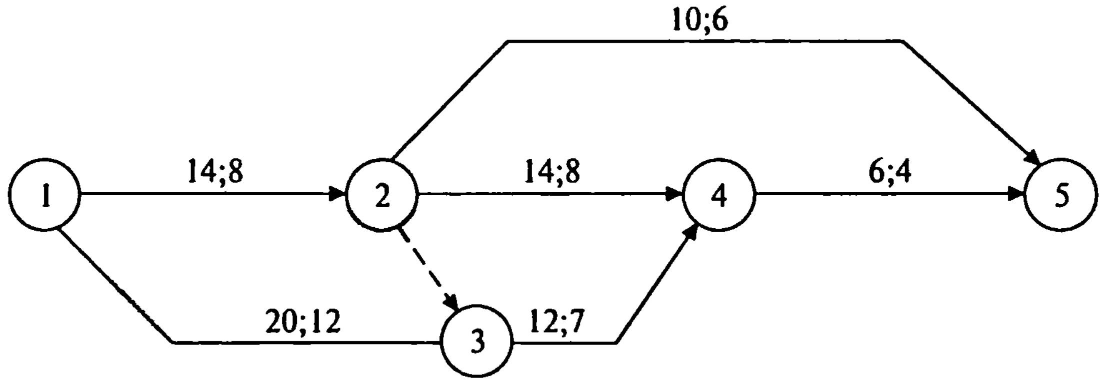


Рис. 8.14

Предварительный шаг. Определяем КДЗ операций по формуле (8.13):

$$k_{12} = 5;\ k_{13} = 7;\ k_{24} = 10;\ k_{25} = 6;\ k_{34} = 8;\ k_{45} = 17.$$

Находим, что при наибольшей продолжительности операций t''_{ij} критический путь $\mu_{кр} = (1 - 3 - 4 - 5)$, $t_{кр} = 38$, резервы времени некритических операций $R^{п}_{12} = 4$; $R^{п}_{24} = 4$; $R^{п}_{25} = 14$; $R^{п}_{23} = 6$ и стоимость выполнения комплекса операций $C = 557$. Результаты расчетов заносим в табл. 8.9.

Первый шаг.

1. Среди критических операций наименьший КДЗ имеет операция (*1, 3*): $k_{13} = 7$. *Так как критический путь один, то она и подлежит сокращению.*

2. Сокращаем время выполнения операции (*1, 3*) на величину, равную

$$\min(t''_{13} - t'_{13};\ R^{п}_{12}) = \min(20 - 12;\ 4) = 4.$$

3. В результате сокращения операции (*1, 3*) образовалось два критических пути: $\mu' = (1 - 2 - 4 - 5)$ и $\mu'' = (1 - 3 - 4 - 5)$ с общей операцией (*4, 5*). Продолжительность критического пути уменьшилась на 4 единицы: $t^{(1)}_{кр} = 34$. Резервы времени некритических операций составляют: $R^{п}_{23} = 2$; $R^{п}_{25} = 10$. Стоимость выполнения комплекса операций $C = 585$ (данные занесены в соответствующие строки табл. 8.9).

Таблица 8.9

Параметры		(*1,2*)	(*1,3*)	(*2,3*)	(*2,4*)	(*2,5*)	(*3,4*)	(*4,5*)	Продолжительность критического пути $t_{кр}$	Стоимость C
t''_{ij}		14	20	0	14	10	12	6		
t'_{ij}		8	12	0	8	6	7	4		
k_{ij}		5	7	M^*	10	6	8	17		
t_{ij}, Шаг оптимизации	Предв.	14	20	0	14	10	12	6	38	557
	1	14	16	0	14	10	12	6	34	585
	2	10	**12**	0	14	10	12	6	30	633
	3	10	**12**	0	14	10	12	**4**	28	667
	4	10	**12**	0	9	10	**7**	**4**	23	757
$R^{п}_{ij}$, Шаг оптимизации	Предв.	4	0	6	4	14	0	0		
	1	0	0	2	0	10	0	0		
	2	0	0	2	0	10	0	0		
	3	0	0	2	0	8	0	0		
	4	0	0	2	0	3	0	0		
Сокращение времени Δt		4	8	0	5	0	5	2		
Приращение стоимости ΔC		20	56	0	50	0	40	34		

M^* — достаточно большое число, практически можно взять равное бесконечности.

4. Так как критические операции выполняются за время, большее чем t'_{ij}, то переходим ко второму шагу оптимизации.

Второй шаг.

1. Из критических операций операция (*4, 5*) является общей для критических путей μ' и μ'', а операции (*1, 2*) и (*2, 4*) выполняются параллельно с операциями (*1, 3*) и (*3, 4*). Наименьший КДЗ, равный 5, имеет операция $(1, 2) \in \mu'$, а на пути μ'' наименьший КДЗ, равный 7, имеет операция (*1, 3*). Сумма КДЗ этих операций равна 12, что меньше КДЗ операции (*4, 5*), которая является общей для путей μ' и μ''. Следовательно, сокращению подлежат операции (*1, 2*) и (*1, 3*).

2. Операции (*1, 2*) и (*1, 3*) сокращаем на 4 единицы, так как наименьшая продолжительность операции (*1, 3*) равна 12 и дальнейшее сокращение ее невозможно.

3. Рассчитываем параметры сетевого графика и заносим их в соответствующие строки табл. 8.9. Значение продолжительности операции (*1, 3*) $t_{13} = 12$ выделяем. Критические пути после сокращения операций сохранились: $\mu' = (1-2-4-5)$ и $\mu'' = (1-3-4-5)$.

4. Учитывая, что не все критические операции выполняются в срочном режиме, переходим к выполнению третьего шага.

Третий шаг.

1. Из оставшихся критических операций наименьший КДЗ имеет операция (*1, 2*). Однако сокращать ее не имеет смысла, потому что уменьшение ее продолжительности не повлияет на длину критического пути, а лишь увеличит стоимость выполнения комплекса операций. Из оставшихся критических операций наименьший КДЗ имеет операция (*2, 4*), которая выполняется параллельно с операцией (*3, 4*). Поскольку $k_{45} = 17 < k_{24} + k_{34}$, то операция (*4, 5*) подлежит сокращению.

2. Операцию (*4, 5*) сокращаем на 2 единицы, так как $\min(t''_{45} - t'_{45},\ R^{п}_{25}) = \min(6 - 4;\ 10) = 2$ Дальнейшее сокращение операции (*4, 5*) невозможно, поэтому при занесении данных в таблицу значение t_{45}, равное 4, отмечаем.

3. Рассчитываем параметры сетевого графика и заносим в соответствующие строки табл. 8.9. Критические пути снова остались прежними. Переходим к четвертому шагу оптимизации.

Четвертый шаг.

1. Дальнейшему сокращению подлежат операции (*2, 4*) и (*3, 4*), принадлежащие соответственно путям μ' и μ''.

2. Сокращаем продолжительности операций (*2, 4*) и (*3, 4*) на 5 единиц, так как

$$\min(t''_{24} - t'_{24};\ t''_{34} - t'_{34};\ R^{п}_{25};) = \min(14 - 8;\ 12 - 7;\ 8) = 5.$$

3. Рассчитываем параметры сетевого графика и заносим их в табл. 8.9. Дальнейшее сокращение операции (*3, 4*) невозможно, поэтому значение $t_{34} = t'_{34} = 7$ выделяем.

4. Все операции критического пути (*1—3—4—5*) сокращены до минимальных продолжительностей. Следовательно, выполнение алгоритма закончено.

Упражнения

8.19. Оптимизировать сетевой график (рис. 8.14) по стоимости при известных параметрах операций, заданных в табл. 8.10.

Таблица 8.10

Параметры	Операции						
	(1, 2)	*(1, 3)*	*(2, 3)*	*(2, 4)*	*(2, 5)*	*(3, 4)*	*(4, 5)*
t''_{ij}	14	20	0	14	10	12	6
t'_{ij}	8	10	0	9	6	6	4
c''_{ij}	160	120	–	35	60	72	110
c'_{ij}	190	160	–	95	84	114	144

В задачах **8.20** и **8.21** по заданной сетевой модели (рис. 8.15) и известным параметрам операций (табл. 8.11) найти план выполнения комплекса операций минимальной продолжительности и с оптимальными затратами.

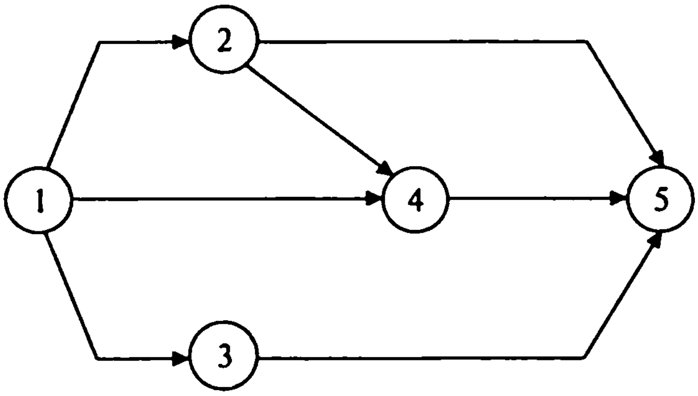


Рис. 8.15

Таблица 8.11

Номер задачи	Параметры	Операции						
		(1, 2)	*(1, 3)*	*(1, 4)*	*(2, 4)*	*(2, 5)*	*(3, 5)*	*(4, 5)*
8.20	t''_{ij}	6	4	2	2	6	5	4
	t'_{ij}	3	2	1	2	4	4	3
	c''_{ij}	300	160	70	90	270	260	150
	c'_{ij}	345	180	90	90	320	290	160
8.21	t''_{ij}	6	4	2	2	4	5	4
	t'_{ij}	3	2	1	2	2	3	3
	c''_{ij}	200	160	60	40	270	160	50
	c'_{ij}	236	200	75	40	290	210	68

В задачах **8.22–8.25** по заданным сетевым моделям (рис. 8.16–8.19) и параметрам операций (табл. 8.12 — 8.15) найти план выполнения комплекса операций минимальной продолжительности и с оптимальными затратами.

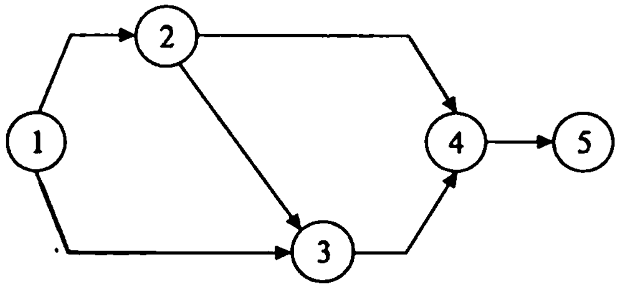


Рис. 8.16

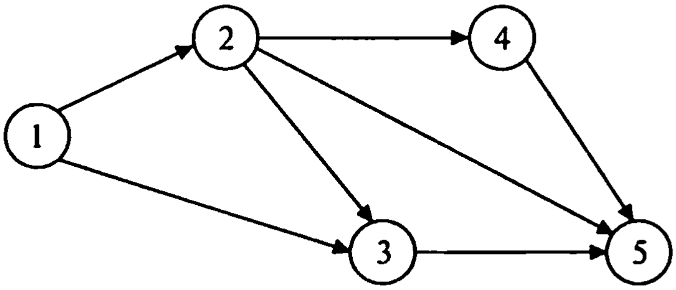


Рис. 8.17

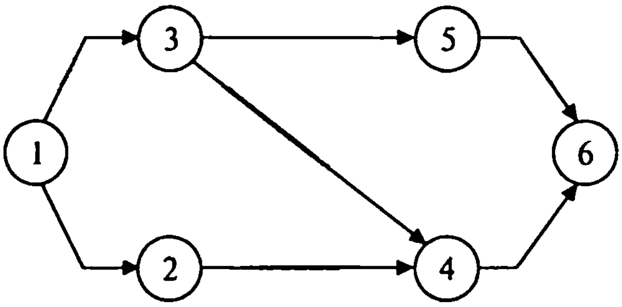


Рис. 8.18

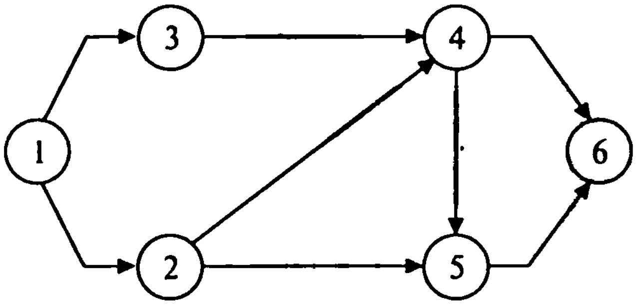


Рис. 8.19

Таблица 8.12

Номер задачи	Параметры	Операции					
		(1, 2)	*(1, 3)*	*(2, 3)*	*(2, 4)*	*(3, 4)*	*(4, 5)*
8.22	t''_{ij}	6	3	5	2	9	6
	t'_{ij}	4	2	2	1	6	4
	c''_{ij}	1	3	1	3	1	2
	c'_{ij}	3	5	10	8	4	6

Таблица 8.13

Номер задачи	Параметры	Операции						
		(1, 2)	*(1, 3)*	*(2, 3)*	*(2, 4)*	*(2, 5)*	*(3, 5)*	*(4, 5)*
8.23	t''_{ij}	6	11	4	7	9	3	8
	t'_{ij}	2	6	1	3	4	1	3
	c''_{ij}	6	2	4	3	2	5	1
	c'_{ij}	14	17	13	19	27	7	31

Таблица 8.14

Номер задачи	Параметры	Операции						
		(1, 2)	*(1, 3)*	*(2, 4)*	*(3, 4)*	*(3, 5)*	*(4, 6)*	*(5, 6)*
8.24	t''_{ij}	9	4	6	8	10	11	10
	t'_{ij}	7	3	4	6	6	5	7
	c''_{ij}	3	3	1	8	5	5	6
	c'_{ij}	11	9	9	28	37	35	33

Таблица 8.15

Номер задачи	Параметры	Операции							
		(1, 2)	*(1, 3)*	*(2, 4)*	*(2, 5)*	*(3, 4)*	*(4, 5)*	*(4, 6)*	*(5, 6)*
8.25	t''_{ij}	5	7	3	6	5	11	5	8
	t'_{ij}	4	3	2	3	3	9	3	6
	c''_{ij}	4	8	8	3	10	10	8	2
	c'_{ij}	5	20	9	12	20	18	12	4

Отличительная особенность ***оптимизации при фиксированном сроке выполнения*** комплекса операций заключается в том, что в исходном варианте сети оценки для каждой операции установлены на уровне минимальных продолжительностей t'_{ij} и максимальных затрат c'_{ij}. Следовательно, стоимость выполнения всего комплекса операций является максимальной. Предполагается, что увеличение продолжительности операции (i, j) на 1 единицу вызывает уменьшение стоимости на величину k_{ij}. Таким образом, ставится задача: при фиксированном сроке завершения $T_о$ минимизировать стоимость выполнения комплекса операций, используя резервы времени. Критическое время $t_{кр}$ может быть меньше заданного срока $T_о$ или равно ему. Если $t_{кр} = T_о$, то оптимизация возможна за счет увеличения времени выполнения некритических операций; если $t_{кр} < T_о$, то оптимизировать можно за счет всех операций комплекса.

Рассмотрим более общий случай, когда $t_{кр} < T_о$. Обозначим стоимость выполнения операции (i, j) через c'_{ij}. Исходя из условия задачи, стоимость каждой операции (i, j) за время ее выполнения t_{ij} определим по формуле

$$c_{ij} = c'_{ij} - k_{ij}(t_{ij} - t'_{ij}), \tag{8.14}$$

где $t'_{ij} \le t_{ij} \le t''_{ij}$. Учитывая, что величины c_{ij}, t'_{ij}, k_{ij} известны, раскроем скобки в правой части выражения (8.14) и обозначим через b_{ij} сумму $c'_{ij} + k_{ij}t'_{ij}$. В результате получим

$$c_{ij} = b_{ij} - k_{ij}t_{ij} = b_{ij} - k_{ij}(t^{о}_{ij} - t^{н}_{ij}).$$

Здесь время выполнения операции (i, j) равно разности между временем ее окончания $(t^{о}_{ij})$ и временем начала $(t^{н}_{ij})$.

Математическая модель задачи может быть сформулирована следующим образом: найти такое время начала и окончания каждой операции сетевого графика, при котором стоимость выполнения комплекса операций будет минимальной:

$$C = \sum_{(i,j)\in \bar{e}} c_{ij} = \sum_{(i,j)\in \bar{e}} [b_{ij} - k_{ij}(t^{о}_{ij} - t^{н}_{ij})] \to \min.$$

На неизвестные величины задачи налагаются следующие ограничения:

— продолжительность выполнения каждой операции $(i, j) \in \bar{e}$ должна быть не меньше t'_{ij} и не больше t''_{ij}:

$$t'_{ij} \le t^{о}_{ij} - t^{н}_{ij} \le t''_{ij};$$

— время окончания любой операции сетевого графика должно быть не больше времени начала непосредственно следующей за ней операции, т.е. для любых смежных операций сети (i, j) и (j, r) должно выполняться условие

$$t^{о}_{ij} \le t^{н}_{jr};$$

— выполнение комплекса операций должно быть завершено не позже директивного срока $T_о$:

$$t^{о}_{in} \le T_о, i = \overline{1, n-1};\ n \text{— номер завершающего события;}$$

— переменные должны быть неотрицательными:

$$t^{н}_{ij} \ge 0;\ t^{о}_{ij} \ge 0 \text{ для всех } (i, j) \in \bar{e}, \text{ при этом } t^{н}_{1j} = 0,\ j = \overline{2, n}.$$

Пример 8.8. Исходные данные комплекса операций, представленного сетевым графиком (рис. 8.20), приведены в табл. 8.16. Требуется оптимизировать сетевой график по стоимости при $T_о = 34$.

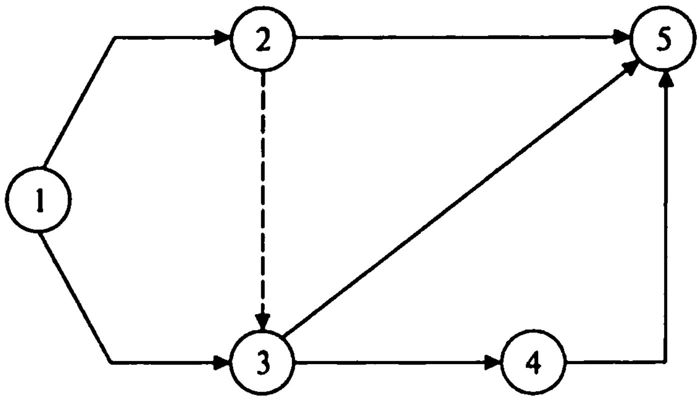


Рис. 8.20

Таблица 8.16

Параметры	Операции						
	(1, 2)	*(1, 3)*	*(2, 3)*	*(2, 5)*	*(3, 4)*	*(3, 5)*	*(4, 5)*
t'_{ij}	9	10	0	3	4	5	8
t''_{ij}	11	15	0	5	7	8	10
k_{ij}	2	5	—	5	4	10	3
b_{ij}	80	40	—	90	145	50	25

Запишем c_{ij} для всех (i, j), принадлежащих сетевому графику:

$$c_{12} = 80 - 2(t_{12}^{\text{о}} - t_{12}^{\text{н}});\ c_{13} = 40 - 5(t_{13}^{\text{о}} - t_{13}^{\text{н}});\ c_{23} = 0;$$

$$c_{25} = 90 - 5(t_{25}^{\text{о}} - t_{25}^{\text{н}});\ c_{34} = 145 - 4(t_{34}^{\text{о}} - t_{34}^{\text{н}});\ c_{35} = 50 - 10(t_{35}^{\text{о}} - t_{35}^{\text{н}});$$

$$c_{45} = 25 - 3(t_{45}^{\text{о}} - t_{45}^{\text{н}});$$

$$c = \sum_{(i,j)\in \vec{e}} c_{ij} = c_{12} + c_{13} + c_{23} + c_{25} + c_{34} + c_{35} + c_{45} =$$

$$= -2t_{12}^{\text{о}} - 5t_{13}^{\text{о}} - 5t_{25}^{\text{о}} + 5t_{25}^{\text{н}} - 4t_{34}^{\text{о}} + 4t_{34}^{\text{н}} - 10t_{35}^{\text{о}} + 10t_{35}^{\text{н}} -$$

$$-3t_{45}^{\text{о}} + 3t_{45}^{\text{н}} + 430 \to \min.$$

При записи функции принято, что $t_{12}^{\text{н}} = t_{13}^{\text{н}} = 0$. Так как при параметрах $t_{ij}^{\text{н}}$ величина $t_{\text{кр}} = 32$ меньше $T_{\text{о}} = 34$, то оптимизация возможна за счет всех операций сетевого графика. Запишем ограничения по времени выполнения операций:

$$9 \le t_{12}^{\text{о}} \le 11;\ 10 \le t_{13}^{\text{о}} \le 15;\ t_{23}^{\text{о}} - t_{23}^{\text{н}} \ge 0;$$

$$3 \le t_{25}^{\text{о}} - t_{25}^{\text{н}} \le 5;\ \le t_{34}^{\text{о}} - t_{34}^{\text{н}} \le 7;$$

$$5 \le t_{35}^{\text{о}} - t_{35}^{\text{н}} \le 8;\ 8 \le t_{45}^{\text{о}} - t_{45}^{\text{н}} \le 10;$$

$$t_{25}^{\text{о}} \le 34;\ t_{35}^{\text{о}} \le 34;\ t_{45}^{\text{о}} \le 34.$$

Ограничения по предшествованию в выполнении операций:

$$t_{12}^{\text{о}} \le t_{23}^{\text{н}};\ t_{12}^{\text{о}} \le t_{25}^{\text{н}};\ t_{13}^{\text{о}} \le t_{34}^{\text{н}};\ t_{13}^{\text{о}} \le t_{35}^{\text{н}};$$

$$t_{23}^{\text{о}} \le t_{34}^{\text{н}};\ t_{23}^{\text{о}} \le t_{35}^{\text{н}};\ t_{34}^{\text{о}} \le t_{45}^{\text{н}}.$$

Все неизвестные должны быть неотрицательными, т.е. $t_{ij}^{\text{н}} \ge 0$, $t_{ij}^{\text{о}} \ge 0$ для всех операций (i, j) сети.

После решения задачи на ЭВМ получено решение:

$$t_{12}^{\text{о}} = 11;\ t_{13}^{\text{о}} = 15;\ t_{23}^{\text{н}} = 11;\ t_{23}^{\text{о}} = 11;\ t_{25}^{\text{н}} = 11;\ t_{25}^{\text{о}} = 16;$$

$$t_{34}^{\text{н}} = 15;\ t_{34}^{\text{о}} = 22;\ t_{35}^{\text{н}} = 15;\ t_{35}^{\text{о}} = 23;\ t_{45}^{\text{н}} = 22;\ t_{45}^{\text{о}} = 32;$$

$$C_{\min} = 170.$$

Упражнения

8.26. Определить, уменьшится ли количество неизвестных в математической модели примера 8.8, если $T_{\text{о}} = 32$. Если уменьшится, то за счет каких неизвестных? Чему равны эти неизвестные? Записать целевую функцию и ограничения задачи при условии, что $T_{\text{о}} = 32$.

В задачах **8.27–8.34** при фиксированном сроке завершения комплекса операций T_o (рис. 8.13) найти такое время начала и окончания операций, при котором стоимость выполнения комплекса операций будет минимальной. Исходные данные задач приведены в табл. 8.17.

Таблица 8.17

Номер задачи	Параметры	Операции					T_o
		(1, 2)	*(1, 3)*	*(1, 4)*	*(2, 4)*	*(3, 4)*	
8.27	t''_{ij}	24	17	28	16	12	36
	t'_{ij}	18	12	20	10	9	
	k_{ij}	2	3	5	4	10	
	b_{ij}	115	140	130	45	60	
8.28	t''_{ij}	20	10	24	12	18	32
	t'_{ij}	14	6	16	8	12	
	k_{ij}	0,2	0,4	0,5	0,2	0,25	
	b_{ij}	20	60	40	30	35	
8.29	t''_{ij}	24	17	30	16	14	34
	t'_{ij}	18	13	20	10	12	
	k_{ij}	0,45	0,2	0,1	0,4	0,1	
	b_{ij}	15	24	30	54	70	
8.30	t''_{ij}	16	10	24	18	20	30
	t'_{ij}	12	8	16	14	15	
	k_{ij}	3	1	4	2	7	
	b_{ij}	160	80	280	80	340	
8.31	t''_{ij}	20	16	38	14	10	35
	t'_{ij}	10	12	30	8	6	
	k_{ij}	4	2	1	3	2	
	b_{ij}	180	240	70	310	90	
8.32	t''_{ij}	20	16	38	14	10	30
	t'_{ij}	10	12	30	10	8	
	k_{ij}	5	3	7	3	2	
	b_{ij}	150	130	250	410	120	

Окончание табл. 8.17

Номер задачи	Параметры	Операции (1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	$T_о$
8.33	t''_{ij}	24	17	28	18	12	40
	t'_{ij}	18	14	22	10	8	
	k_{ij}	0,5	0,25	2	3	1	
	b_{ij}	20	30	120	180	60	
8.34	t''_{ij}	10	20	12	14	6	20
	t'_{ij}	6	12	5	8	4	
	k_{ij}	5	3	1	4	6	
	b_{ij}	240	180	70	150	320	

Оптимальный безрезервный план. Стоимость выполнения операций c_{ij} может зависеть от времени их выполнения как линейно, так и не линейно. Рассмотрим вариант линейной зависимости.

Пусть стоимость операции c_{ij} зависит линейно от времени выполнения t_{ij}, т.е. $c_{ij} = b_{ij} - k_{ij}t_{ij}$. Если на продолжительности операций наложено ограничение только снизу ($t_{ij} \geq t'_{ij}$, $(i, j) \in \bar{e}$), то каждая из них может быть увеличена так, что окажется на одном из критических путей. Так как все операции в оптимальном плане будут критическими, то ожидаемые и предельные сроки наступления событий сети будут совпадать. Следовательно, продолжительность любой операции можно выразить как разность времени наступления ее конечного и начального событий ($t_{ij} = t_j - t_i$).

В этом случае задача оптимизации комплекса операций по стоимости заключается в нахождении таких сроков свершения событий сетевого графика, т.е. неотрицательных значений t_i и t_j, при которых

$$C = \sum_{(i,j)\in\bar{e}} c_{ij} = \sum_{(i,j)\in\bar{e}} [b_{ij} - k_{ij}(t_j - t_i)] \to \min$$

и выполняются ограничения

$$t_j - t_i \geq t'_{ij};\ t_1 = 0;\ t_n = T_0;\ (i, j) \in \bar{e}.$$

При $T_о = t_{кр}$ оптимизация возможна только за счет некритических операций, при $T_о > t_{кр}$ — за счет всех операций комплекса.

Сформулированная задача также относится к классу задач линейной оптимизации и может быть решена симплекс-методом.

Пример 8.9. Сетевой график выполнения комплекса операций представлен на рис. 8.20. Требуется оптимизировать сетевой график по стоимости при $T_o = 34$. Зависимость стоимости выполнения операций от времени следующая:

$$c_{12} = 50 - 2t_{12};\ c_{13} = 140 - 5t_{13};\ c_{25} = 230 - 5t_{25};$$

$$c_{34} = 145 - 4t_{34};\ c_{35} = 350 - 10t_{35};\ c_{45} = 125 - 3t_{45}.$$

Минимальное время выполнения операций:

$$t_{12} = 9;\ t_{13} = 10;\ t_{23} = 0;\ t_{25} = 3;\ t_{34} = 4;\ t_{35} = 5;\ t_{45} = 8.$$

При минимальном времени выполнения операций $t_{кр} = 22$. Так как $t_{кр} < T_o$, то график оптимизируется за счет всех операций комплекса.

Построим математическую модель задачи. Запишем целевую функцию, учитывая, что $t_{ij} = t_j - t_i$:

$$C = 50 - 2(t_2 - t_1) + 140 - 5(t_3 - t_1) + 230 - 5(t_5 - t_2) +$$
$$+145 - 4(t_4 - t_3) + 350 - 10(t_5 - t_3) + 125 - 3(t_5 - t_4) =$$
$$= 50 - 2t_2 + 2t_1 + 140 - 5t_3 + 5t_1 + 230 - 5t_5 + 5t_2 + 145 -$$
$$-4t_4 + 4t_3 + 350 - 10t_5 + 10t_3 + 125 - 3t_5 + 3t_4 = 7t_1 +$$
$$+3t_2 + 9t_3 - t_4 - 18t_5 + 1040 \to \min.$$

Ограничения:

$$t_2 - t_1 \geq 9,\ t_4 - t_3 \geq 4,\ t_3 - t_1 \geq 10,$$
$$t_3 - t_2 \geq 0,\ t_5 - t_4 \geq 8,\ t_5 - t_2 \geq 3,$$
$$t_5 - t_3 \geq 5.$$

Подставив $t_1 = 0$ и $t_5 = 34$ в выражения для целевой функции и ограничений, окончательно имеем задачу линейной оптимизации:

$$C = 3t_2 + 9t_3 - t_4 + 428 \to \min;$$

ограничения:

$$t_2 \geq 9,\ \ -t_3 + t_4 \geq 4,$$
$$t_3 \geq 10,\ \ t_3 \leq 29,$$
$$-t_2 + t_3 \geq 0,\ \ t_4 \leq 26,$$
$$t_2 \leq 31,\ \ t_4 \geq 0.$$

Реализация задачи на ЭВМ дала решение:

$$C_{\min} = 519;\ t_2 = 9;\ t_3 = 10;\ t_4 = 26;\ t_5 = 34.$$

Следовательно, значения времени выполнения операций комплекса после оптимизации равны: $t_{12} = 9$; $t_{13} = 10$; $t_{23} = 0$; $t_{25} = 25$; $t_{34} = 16$; $t_{35} = 24$; $t_{45} = 8$.

Все пути сетевого графика после оптимизации являются критическими.

Упражнения

8.35. Исходные данные задачи такие же, как в примере 8.9. Требуется оптимизировать сетевой график при $T_о = t_{кр} = 22$.

В задачах **8.36–8.42** найти оптимальный безрезервный план выполнения комплекса операций, представленного сетевым графиком (рис. 8.21). Исходные данные в табл. 8.18.

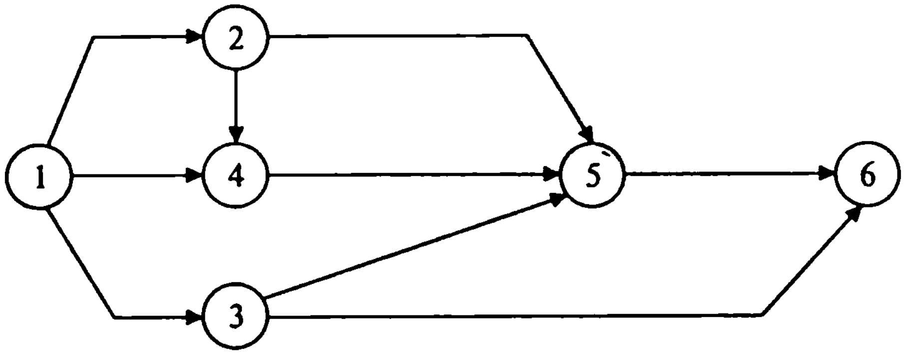


Рис. 8.21

Таблица 8.18

Номер задачи	Параметры	Операции									$T_о$
		(1, 2)	*(1, 3)*	*(1, 4)*	*(2, 4)*	*(2, 5)*	*(3, 5)*	*(3, 6)*	*(4, 5)*	*(5, 6)*	
8.36	t'_{ij}	5	16	7	9	4	6	18	10	8	40
	k_{ij}	2	5	3	4	1	6	5	2	3	
	b_{ij}	150	40	70	170	140	200	180	60	120	
8.37	t'_{ij}	5	14	7	6	4	6	16	8	8	44
	k_{ij}	2	3	5	4	1	3	1	4	6	
	b_{ij}	80	170	160	220	90	240	50	190	315	
8.38	t'_{ij}	5	14	7	9	4	6	8	10	8	38
	k_{ij}	4	2	1	3	2	1	3	5	4	
	b_{ij}	150	58	70	30	90	50	220	330	290	
8.39	t'_{ij}	8	10	12	6	18	10	12	5	7	36
	k_{ij}	5	3	7	3	2	1	6	4	2	
	b_{ij}	180	150	240	310	100	70	180	200	110	
8.40	t'_{ij}	8	4	10	7	18	9	11	8	7	33
	k_{ij}	5	3	1	4	6	2	4	3	5	
	b_{ij}	150	130	80	320	450	140	260	210	350	
8.41	t'_{ij}	6	13	10	3	6	8	11	20	12	42
	k_{ij}	2	4	1	2	5	3	2	1	4	
	b_{ij}	20	180	60	140	320	200	120	70	240	

Окончание табл. 8.18

Номер задачи	Параметры	Операции									$T_о$
		(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 5)	(3, 6)	(4, 5)	(5, 6)	
8.42	t'_{ij}	4	16	8	6	10	12	8	14	9	37
	k_{ij}	5	4	3	1	2	1	5	3	1	
	b_{ij}	270	190	240	60	130	90	310	220	120	

8.4.3. Оптимизация комплекса операций по ресурсам

Комплекс операций представлен сетевым графиком $G(E,\vec{e})$. Оперирующая сторона для выполнения комплекса операций располагает m видами русурсов в количествах $R_s(s=\overline{1,m})$. Каждая операция комплекса характеризуется продолжительностью выполнения t_{ij} и интенсивностью $r_{ij}^{(s)}$. Под интенсивностью операции (i,j) будем понимать требуемое количество ресурсов для ее выполнения в течение времени t_{ij}, например, требумое количество рабочих или механизмов. Топологически сетевой график удовлетворяет технологическим ограничениям (ресурсные ограничения при составлении сетевого графика не принимались во внимание). Поэтому, прежде чем приступить к выполнению операций сетевого графика, необходимо определить потребное количество ресурсов по календарным срокам и сравнить его с наличными ресурсами. Если окажется, что в отдельные промежутки времени наличного количества ресурсов недостаточно для удовлетворения потребности в них, то ставится задача: найти такие календарные сроки начала и окончания операций сетевого трафика, при которых в любой момент планируемого периода было бы достаточно ресурсов для выполнения операций и время завершения комплекса было бы минимальным.

Для простоты изложения алгоритма решения задачи рассмотрим случай, когда интенсивности постоянные и используется один вид ресурсов. Отметим, что приведенный ниже алгоритм не всегда позволяет найти оптимальное решение задачи, однако часто дает хороее приближение к нему.

Алгоритм решения задачи

Предварительный шаг.

Составляем линейную диаграмму (график Ганта) выполнения комплекса операций. На диаграмме каждая операция (i,j) изображается горизонтальным отрезком, длина которого в соответствующем масштабе равна времени ее выполнения. Начало каждой операции совпадает с ожидаемым сроком свершения ее начального события. Определяем по диаграмме критическое время выполнения комплекса операций $t_{кр}$ и критический путь.

Первый шаг.

1. Проецируем на ось времени начало и конец каждой операции и обозначаем проекцию, выходящую из начала координат, через τ_0, а следующую за ней — через τ_1.

2. Определяем полные резервы времени $R_{ij}^{п}$ операций, расположенных над промежутком (τ_0, τ_1). Нумеруем эти операции в порядке возрастания их полных резервов. Операции с одинаковыми полными резервами времени нумеруем в порядке убывания интенсивностей.

3. Суммируем последовательно значения интенсивностей операций, расположенных над промежутком (τ_0, τ_1) в порядке возрастания их номеров, и сравниваем полученные суммы с заданной величиной ресурсов R. Все операции, сумма интенсивностей которых не превосходит R, оставляем в первоначальном положении. Если после прибавления величины интенсивности какой-нибудь операции окажется, что суммарное потребление ресурсов больше R, то эту операцию сдвигаем вправо на величину рассматриваемого промежутка, переходим к добавлению величины интенсивности следующей операции и так продолжаем до тех пор, пока не будут просмотрены все операции, расположенные над промежутком (τ_0, τ_1).

Результатом выполнения этого действия является новая линейная диаграмма, момент τ_1 которой считаем началом оставшейся части комплекса операций. Операции (i, j), расположенные над промежутком $(\tau_1, \tau_{кр})$, изображаем так, чтобы их начала совпали с новыми ожидаемыми сроками свершения событий.

Общий шаг.

Предположим, что выполнено k шагов алгоритма и получена линейная диаграмма, момент τ_k которой является началом оставшейся части комплекса операций.

1. Проецируем на ось времени начало и конец каждой операции, расположенной над промежутком $(\tau_k, \tau_{кр})$, и обозначаем проекцию, ближайшую к τ_k, через τ_{k+1}. Таким образом, выделен новый промежуток (τ_k, τ_{k+1}).

2. Определяем полные резервы времени $R_{ij}^{п}$ операций, расположенных над промежутком (τ_k, τ_{k+1}), и нумеруем их. При этом в зависимости от постановки задачи возможны два случая: 1) операции не допускают перерыва в выполнении; 2) операции допускают перерывы в их выполнении. В первом случае сначала нумеруем операции (i, j), начатые левее момента τ_k, согласно возрастанию разностей между полными резервами этих операций и длительностями от начала момента до момента τ_{k+1} (длительности операций обозначим через l_{ij}). Операции с одинаковыми разностями нумеруем в порядке убывания интенсивностей. Все остальные операции нумеруем в порядке возрастания их полных резервов, а с одинаковыми резервами — в порядке убывания интенсивностей. Во втором случае все операции нумеруются согласно предписаниям п. 2 первого шага.

3. Выполняем то же, что и в п. 3 первого шага. Однако следует иметь в виду, что если сдвигу подлежит операция (i, j), начатая левее τ_k, то в первом случае сдвигаем всю операцию, т.е. начало этой операции устанавливаем в момент τ_{k+1}, а во втором случае операцию делим на части и первую часть операции — отрезок продолжительностью от начала до τ_k — оставляем на месте, а вторую часть — от τ_k до конца — сдвигаем вправо на величину промежутка (τ_k, τ_{k+1}). Части разделенной операции в дальнейшем рассматриваем как самостоятельные операции и присваиваем им соответствующие номера событий.

4. Проверяем, все ли операции комплекса просмотрены. Если все, решение закончено, если нет, то переходим к п. 1 общего повторяющегося шага.

Пример 8.10. Для выполнения комплекса операций по ремонту технологического оборудования химического предприятия, представленного сетевым графиком (рис. 8.22), в первые три дня выделено 7 единиц ресурсов, в четвертый и пятый день — 6 единиц, а в последующее время — 8 единиц. Каждой дуге графика приписаны два числа: первое — временная оценка в днях; второе — интенсивность выполнения операции.

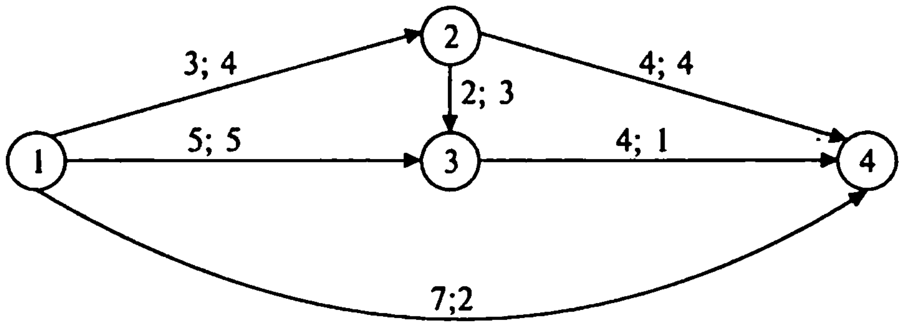


Рис. 8.22

Необходимо определить сроки выполнения операций таким образом, чтобы завершить весь комплекс за минимальное время. Операции не допускают перерыва в выполнении.

Предварительный шаг.

Составляем линейную диаграмму комплекса операций (рис. 8.23, *а*). Построим эпюру потребления ресурса без учета его ограниченности (рис. 8.23, *б*). Из эпюры видно, что в первые три дня потребность в ресурсах превышает наличное количество на 4 единицы, в четвертый и пятый день — на 8 единиц, а в последующее время ресурсы имеются в избытке.

Покажем, как на диаграмме найти критический путь. Операция (*3*, *4*) заканчивается позже всех, спустя 9 дней от начала выполнения комплекса. Следовательно, она критическая и $t_{кр} = 9$. Операция (*3*, *4*) начинает выполняться в момент времени $t_3 = 5$. Находим операции с третьим конечным событием, которые заканчиваются в это же время. Таких операций две: (*1*, *3*) и (*2*, *3*). Следовательно, они также критические. Операции (*2*, *3*) *непосредственно предшествует критическая операция* (*1*, *2*). Таким образом, $\mu^1_{кр} = (1 - 2 - 3 - 4)$ и $\mu^2_{кр} = (1 - 3 - 4)$.

Первый шаг.

1. Проецируем на ось времени начала и концы операций комплекса. Определяем, что $\tau_0 = 0$ и $\tau_1 = 3$.

2. Над промежутком (τ_0, τ_1) расположены операции (*1*, *2*), (*1*, *3*) и (*1*, *4*). Полные резервы операций (*1*, *2*) и (*1*, *3*) равны нулю ($R^п_{12} = 0$ и $R^п_{13} = 0$), а $R^п_{14} = 2$, так как разность между ожидаемым сроком свершения события (*4*) $t_4 = 9$ и сроком окончания операции (*1*, *4*) равна двум дням. Операции (*1*, *2*) и (*1*, *3*) имеют одинаковые полные резервы, но так как $r_{13} = 5 > r_{12} = 4$, то операции (*1*, *3*) присваиваем номер 1, операции (*1*, *2*) — номер 2 и операции (*1*, *4*) с наибольшим полным резервом — номер 3.

Так как интенсивность $r_{13} = 5 < R = 7$, то операцию (*1*, *3*) оставляем в первоначальном положении. Сумма интенсивностей операций (*1*, *3*) и (*1*, *2*) $r_{13} + r_{12} = 5 + 4 = 9 > R = 7$. Следовательно, операцию (*1*, *2*) сдвигаем вправо на величину промежутка (τ_0, τ_1). Сдвиг операции (*1*, *2*) влечет за собой сдвиг операций (*2*, *3*), (*2*, *4*) и (*3*, *4*). Результаты сдвига отражены на новой линейной диаграмме (рис. 8.23, *в*). Операцию (*1*, *4*) оставляем в первоначальном положении, так как $r_{13} + r_{14} = 7 = R$.

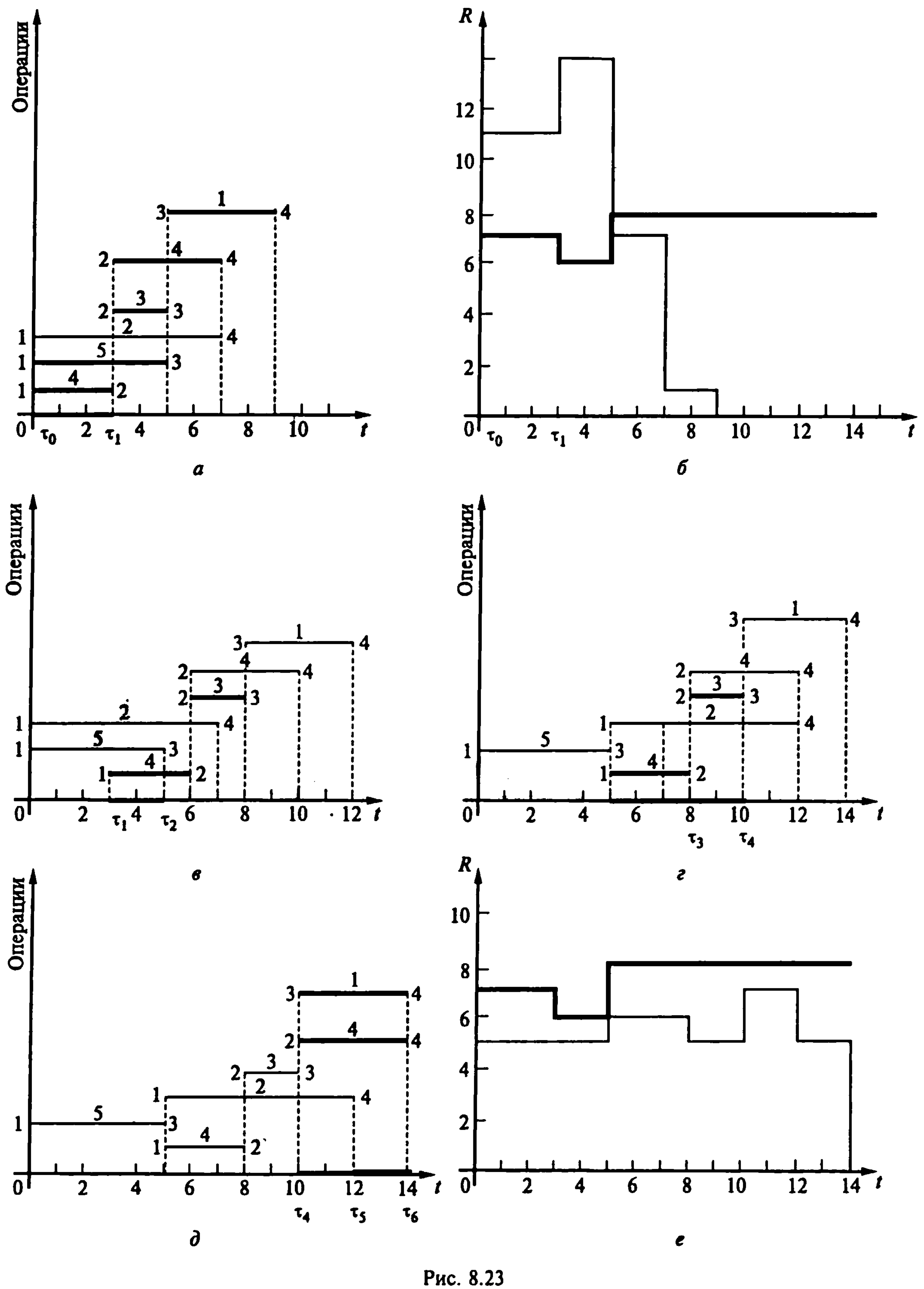


Рис. 8.23

Второй шаг.

1. Начало нового промежутка совпадает с $\tau_1 = 3$, а конец $\tau_2 = 5$ — с моментом окончания операции (*1, 3*).

2. Операции (*1, 3*) и (*1, 4*) начинаются левее момента τ_1, поэтому нумеруем их в первую очередь согласно возрастанию разностей $R_{13}^{п} - l_{13} = 3 - 5 = -2$ и $R_{14}^{п} - l_{14} = 5 - 5 = 0$. Таким образом, операция (*1, 3*) имеет номер 1, операция (*1, 4*) — номер 2 и операция (*1, 2*) — номер 3.

3. На промежутке (τ_1, τ_2) $R = 6$, поэтому, суммируя интенсивности операций и сравнивая с R, получаем, что сдвигу подлежат операции (*1, 2*) и (*1, 4*). В результате сдвига получаем новую линейную диаграмму (рис. 8.23, *г*). Время выполнения операции по сравнению с исходным вариантом увеличилось на 5 дней: $\tau_4 = 14$.

4. Решение не закончено, переходим к третьему шагу.

Третий шаг.

1. Новый промежуток (τ_2, τ_3). Момент $\tau_3 = 8$.

2. Критическая операция (*1, 2*) получает номер 1, операция (*1, 4*) с $R_{14}^{п} = 2$ — номер 2.

3. Сумма $r_{12} + r_{14} = 6 < R = 8$, следовательно, операции не сдвигаются.

4. Так как не все операции просмотрены, то переходим к следующему шагу.

Четвертый шаг.

1. На той же диаграмме (рис. 8.23, *г*) выделяем новый промежуток (τ_3, τ_4).

2. Операция (*1, 4*), начатая левее момента τ_3, получает номер 1, критическая операция (*2, 3*) — номер 2 и операция (*2, 4*) — номер 3, так как $R_{24}^{п} = 2$.

3. Сдвигу подлежит операция (*2, 4*), начало которой устанавливаем в момент τ_4 (рис. 8.23, *д*).

4. Переходим к выполнению пятого шага.

Пятый шаг.

1. Проекции нового промежутка приходятся на моменты $\tau_4 = 10$ и $\tau_5 = 12$.

2. Операция (*1, 4*) имеет номер 1, (*2, 4*) — номер 2, (*3, 4*) — номер 3.

3. Сумма интенсивностей операций $r_{14} + r_{24} + r_{34} = 7 < R = 8$, следовательно, оставляем их в первоначальном положении. Выполнив еще один шаг алгоритма, убедимся, что на оставшемся промежутке (τ_5, τ_6) достаточно ресурса для выполнения расположенных над ним операций.

Таким образом, линейная диаграмма (рис. 8.23, *д*) является решением задачи, время окончания комплекса операции равно 14. Из эпюры потребления русурса (рис. 8.23, *е*) видно, что на всем протяжении выполнения комплекса операций количество используемых ресурсов не превосходит имеющихся в распоряжении.

Пример 8.11. Для выполнения комплекса операций, представленного сетевым графиком (рис. 8.24), выделено 10 единиц возобновляемых ресурсов ($R = 10$). Каждой дуге графика приписаны два числа: первое — время выполнения операции в днях; второе — требуемое количество ресурсов. Необходимо определить сроки выполнения операций таким образом, чтобы завершить весь комплекс за минимальное время. Операции не допускают перерыва в выполнении.

Предварительный шаг.

Составляем линейную диаграмму (график Ганта) комплекса операций (рис. 8.25, *а*). Построим эпюру потребления ресурса без учета его ограниченности (рис. 8.25, *б*). Из эпюры видно, что в первые четыре дня потребность ресурсов превышает наличное количество на 2 единицы, в 5-й и 6-й день имеется в избытке 3 единицы ресурса, в 7-й и 8-й день снова превышается потребность на 2 единицы, в 9-й день спрос равен 10 единицам, а в последующее время имеется в избытке 8 единиц ресурса.

Найдем на диаграмме критический путь: операция (*3, 5*) заканчивается позже всех операций в момент времени $t_5 = 12$. Следовательно, она критическая и $t_{кр} = 12$. Так как

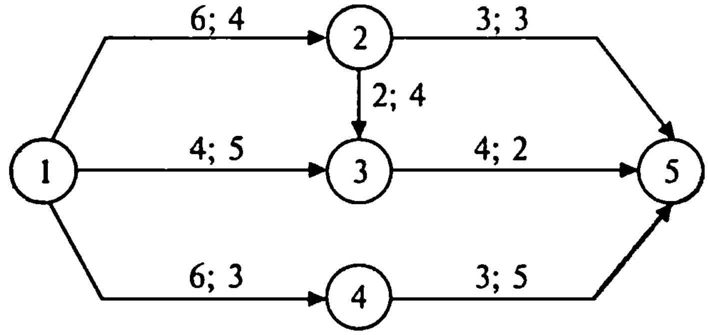


Рис. 8.24

операция (*3, 5*) начинается во время $t_3 = 8$, то найдем операцию с конечным событием (3), которая заканчивается в это же время. Такой операцией является операция (*2, 3*). Следовательно, (*2, 3*) также критическая. Операции (*2, 3*) непосредственно предшествует критическая операция (*1, 2*). Таким образом, $\mu_{кр} = (1 - 2 - 3 - 5)$.

Первый шаг.

1. Проецируем на ось времени начала и концы операций комплекса. Ближайшая проекция к началу координат $\tau_1 = 4$. Рассматриваем промежуток (τ_0, τ_1), где $\tau_0 = 0$.

2. Над промежутком (τ_0, τ_1) расположены операции (*1, 2*), (*1, 3*) и (*1, 4*). Полные резервы этих операций равны: $R_{12}^{п} = 0$, $R_{13}^{п} = 4$, $R_{14}^{п} = 3$. Нумеруем эти операции по возрастанию полных резервов времени. Операция (*1, 2*) имеет номер 1, (*1, 4*) — номер 2, и операция (*1, 3*) с наибольшим резервом — номер 3.

3. Суммируем последовательно величины интенсивности операций, расположенных над промежутком (τ_0, τ_1) в порядке возрастания их номеров, и сравниваем полученные суммы с заданной величиной ресурса R. Так как интенсивность $r_{12} = 4 < R = 10$, то операцию (*1, 2*) оставляем на месте. Суммируя величины интенсивности операций (*1, 2*) и (*1, 4*), имеем $r_{12} + r_{14} = 4 + 3 = 7 < 10$. Следовательно, операция (*1, 4*) тоже остается на месте. Добавив к сумме величину интенсивности операции (*1, 3*), имеем $r_{12} + r_{14} + r_{13} = 4 + 3 + 5 = 12 > 10$. Так как для выполнения операции (*1, 3*) на промежутке (τ_0, τ_1) не хватает 2 единиц ресурса, то операцию (*1, 3*) сдвигаем вправо на величину отрезка (τ_0, τ_1), т.е. начало операции (*1, 3*) устанавливаем в момент $\tau_1 = 4$. Результаты сдвига отражены на новой линейной диаграмме (рис. 8.25, *в*).

4. Так как не все операции комплекса просмотрены, то переходим ко второму шагу.

Второй шаг.

1. Начало нового промежутка совпадает с $\tau_1 = 4$, а конец $\tau_2 = 6$ — с моментом окончания операций (*1, 2*) и (*1, 4*).

2. Операции (*1, 2*) и (*1, 4*) начинаются левее момента τ_1, поэтому нумеруем их в первую очередь согласно возрастанию разностей $R_{12}^{п} - l_{12} = 0 - 6 = -6$ и $R_{14}^{п} - l_{14} = 3 - 6 = -3$. Таким образом, операция (*1, 2*) имеет номер 1, операция (*1, 4*) — номер 2 и операция (*1, 3*) — номер 3.

3. Суммируя величины интенсивности операций согласно их нумерации и сравнивая с R, получаем, что сдвигу вправо на 2 единицы подлежит операция (*1, 3*). В результате сдвига получаем новую линейную диаграмму (рис. 8.25, *г*). Время выполнения операций по сравнению с исходным вариантом увеличилось на 2 дня: $t_5 = 14$.

Решение не закончено, переходим к третьему шагу.

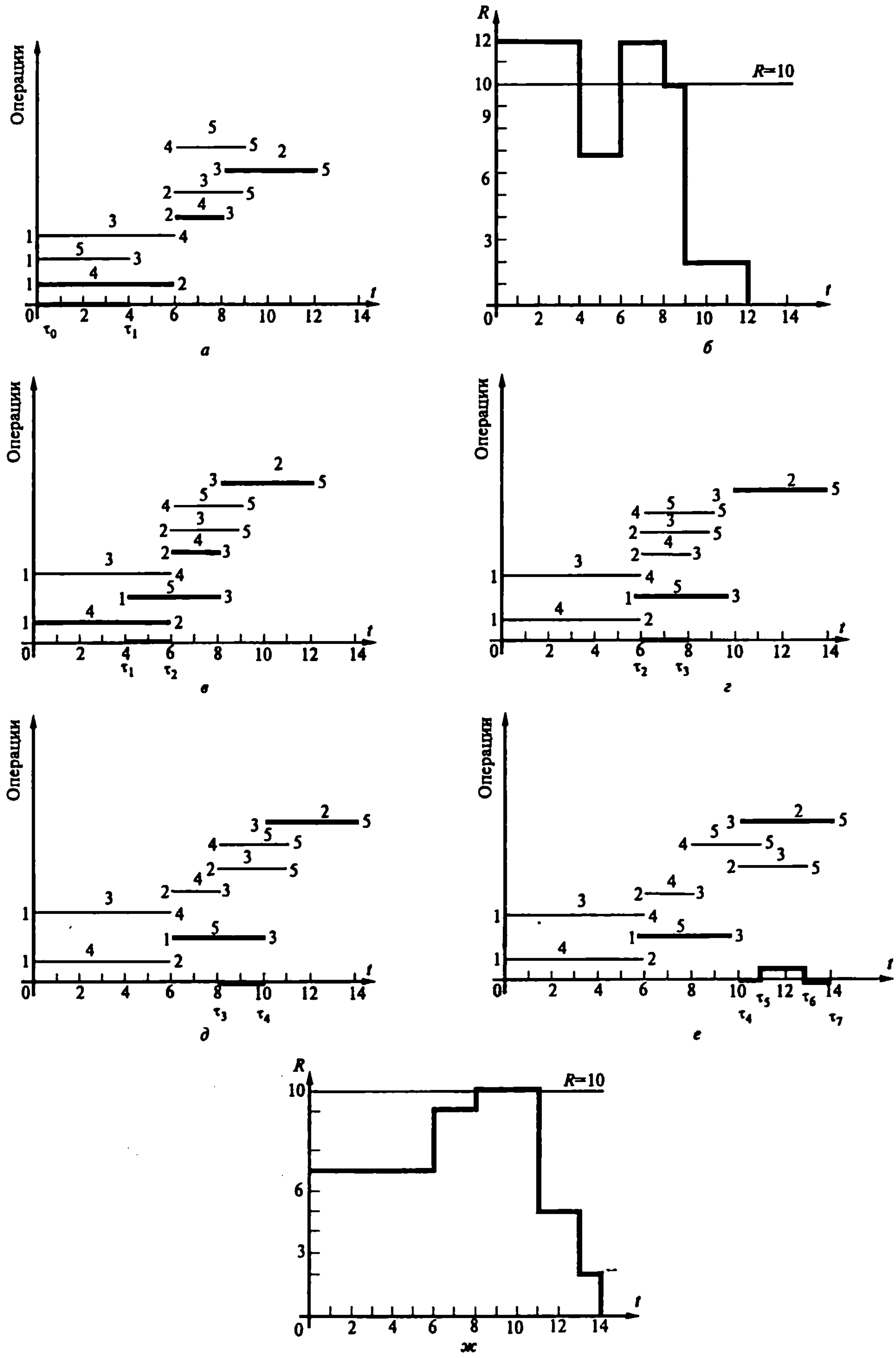


Рис. 8.25

Третий шаг.

1. Новый промежуток (τ_2, τ_3). Момент $\tau_3 = 8$.

2. Над промежутком (τ_2, τ_3) операций, начатых левее момента τ_2, нет, следовательно, нумеруем операции, лежащие над промежутком по возрастанию полных резервов: (*1, 3*) — номер 1, так как $R^{п}_{13} = 0$; (*2, 3*) — номер 2, так как $R^{п}_{23} = 2$; (*4, 5*) — номер 3, (*2, 5*) — номер 4, так как $R^{п}_{45} = R^{п}_{25} = 5$, $r_{45} = 5 > r_{25} = 3$. (Нумерация операций (*2, 5*) и (*4, 5*) произведена по убыванию их интенсивностей.)

3. Так как $r_{13} = 5 < 10$ и $r_{13} + r_{23} = 5 + 4 = 9 < 10$, то эти операции не сдвигаются. Операции (*4, 5*) и (*2, 5*) сдвигаем вправо на 2 единицы, потому что добавление величины интенсивности приводит к превышению $R = 10$. Новая диаграмма приведена на рис. 8.25, *д*.

4. Переходим к четвертому шагу.

Четвертый шаг.

1. Момент $\tau_4 = 10$.

2. Операция (*1, 3*) имеет номер 1, как начатая левее момента $\tau_3 = 8$. Операции (*4, 5*) приписываем номер 2, операции (*2, 5*) — номер 3, так как $R^{п}_{45} = R^{п}_{25} = 3$, а $r_{45} = 5 > r_{25} = 3$.

3. Операции (*1, 3*) и (*4, 5*) не сдвигаются, так как $r_{13} = 5 < 10$ и $r_{13} + r_{45} = 10 = R$, а операция (*2, 5*) сдвигается вправо на 2 единицы. Новая диаграмма изображена на рис. 8.25, *е*.

4. Переходим к пятому шагу.

Пятый шаг.

1. Новый промежуток (τ_4, τ_5), $\tau_5 = 11$.

2. Номера операций: (*4, 5*) — номер 1, как начатая левее, (*3, 5*) — номер 2, так как $R^{п}_{35} = 0$; (*2, 5*) — номер 3, так как $R^{п}_{25} = 1$.

3. Все операции, лежащие над промежутком (τ_4, τ_5), остаются на месте, потому что $r_{45} + r_{35} + r_{25} = 5 + 2 + 3 = 10 = R$.

4. Так как конец рассмотренного промежутка $\tau_5 = 11$ меньше $t_5 = 14$, то переходим к следующему шагу.

Шестой и седьмой шаг.

Выполнив последовательно все действия этих шагов, убедимся, что количество требуемых ресурсов на промежутках (τ_5, τ_6) и (τ_6, τ_7) не превосходит имеющихся в распоряжении, таким образом, линейная диаграмма (рис. 8.25, *е*) является решением задачи, время окончания выполнения комплекса операций равно 14. Из эпюры потребления ресурса (рис. 8.25, *ж*) видно, что на всем протяжении выполнения комплекса операций количество используемых ресурсов не превосходит имеющихся в распоряжении.

Пример 8.12. Оптимизировать сетевой график по ресурсам из примера 8.11 при условии, что операции допускают разрыв в их выполнении.

Первый шаг.

Выполняется так же, как и в предыдущем примере (рис. 8.25, *а*; рис. 8.25, *б*).

Второй шаг.

1. Начало нового промежутка совпадает с $\tau_1 = 4$, а конец — с $\tau_2 = 6$ (рис. 8.25, *в*).

2. Над промежутком (τ_1, τ_2) лежат операции (1, 2), (1, 3) и (1, 4). Полные резервы этих операций равны: $R^{п}_{12} = 0$, $R^{п}_{13} = 0$, $R^{п}_{14} = 3$.

На данном и последующих шагах решения задачи в такой постановке нумерация операций производится в порядке возрастания их полных резервов, а с одинаковыми полными резервами — в порядке убывания интенсивностей, независимо от того, когда начато выполнение этих операций. Операция (*1, 3*) имеет номер 1, (*1, 2*) — номер 2, так как $r_{13} = 5 > r_{12} = 4$, и операция (*1, 4*) — номер 3.

3. Суммируя величины интенсивности операций согласно их нумерации и сравнивая с R, получаем, что сдвигу подлежит операция (*1, 4*). Учитывая, что операции допускают разрыв в выполнении и выполнение операции (*1, 4*) начато левее момента τ_1, разделим операцию (*1, 4*) на части. Одну часть (*1, 4'*) от начала до момента τ_1 продолжительностью 4 дня оставим на месте, так как для ее выполнения достаточно ресурсов, а вторую часть (*4'; 4*), лежащую над отрезком (τ_1, τ_2), сдвигаем вправо на величину отрезка, т.е. установим начало ее выполнения в момент τ_2. Одновременно сдвигаем и срок выполнения операций, выполняемых за операцией (*1, 4*), в частности операции (*4, 5*). Новая линейная диаграмма изображена на рис. 8.26, *а*. В дальнейшем части операции (*1,4*)—(*1,4'*) и (*4', 4*) рассматриваем как самостоятельные операции.

4. Переходим к следующему шагу.

Третий шаг.

1. Проецируем концы и начала работ на ось времени и находим новый промежуток (τ_2, τ_3), где $\tau_3 = 8$.

2. $R^{п}_{13} = 0$, $R^{п}_{23} = 0$, $R^{п}_{4',4} = 1$, $R^{п}_{25} = 3$. Следовательно, (*1, 3*) имеет номер 1, (*2, 3*) — номер 2, так как $r_{13} > r_{23}$, (*4', 4*) — номер 3 и (*2, 5*) — номер 4.

3. Так как $r_{13} < 10$, $r_{13} + r_{23} = 9 < 10$, то операции (*1, 3*) и (*2, 3*) остаются на месте, а (*2, 5*) и (*4', 4*) сдвигаются вправо на величину отрезка. Новая линейная диаграмма изображена на рис. 8.26, *б*.

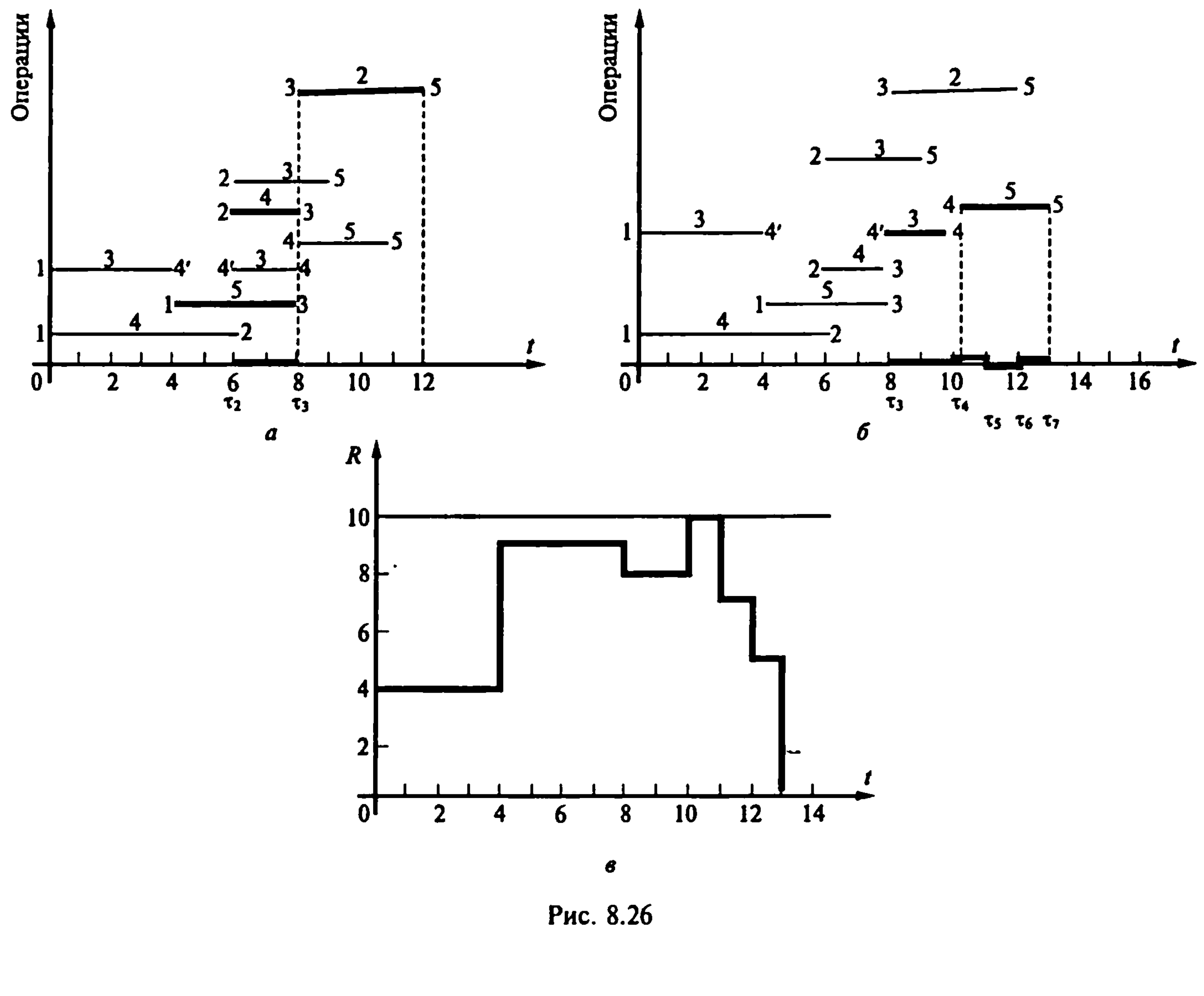


Рис. 8.26

4. Решение задачи не закончено, переходим к четвертому шагу.

Четвертый шаг.

1. Новый промежуток (τ_3, τ_4).

2. Операция (*4', 4*) имеет номер 1, (*3, 5*) — номер 2 и (*2, 5*) — номер 3, так как $R^{п}_{4'4} = 0, R^{п}_{25} = 2$ и $R^{п}_{35} = 1$.

3. $r_{4'4} + r_{35} + r_{25} = 3 + 2 + 3 = 8$, следовательно, все эти операции не сдвигаются.

Выполнив еще три шага алгоритма, убедимся, что на оставшемся промежутке (τ_4, τ_7) достаточно ресурса для завершения операций. Линейная диаграмма, изображенная на рис. 8.26, *в*, является решением задачи.

Упражнения

8.43. Произвести оптимизацию сетевого графика (рис. 8.27) по ресурсам. Наличный ресурс равен 10 единицам ($R = 10$). Первая цифра, приписанная дуге графика, означает время выполнения операции (работы), а вторая — требуемое количество ресурса для выполнения операции. Операции не допускают перерыва в их выполнении.

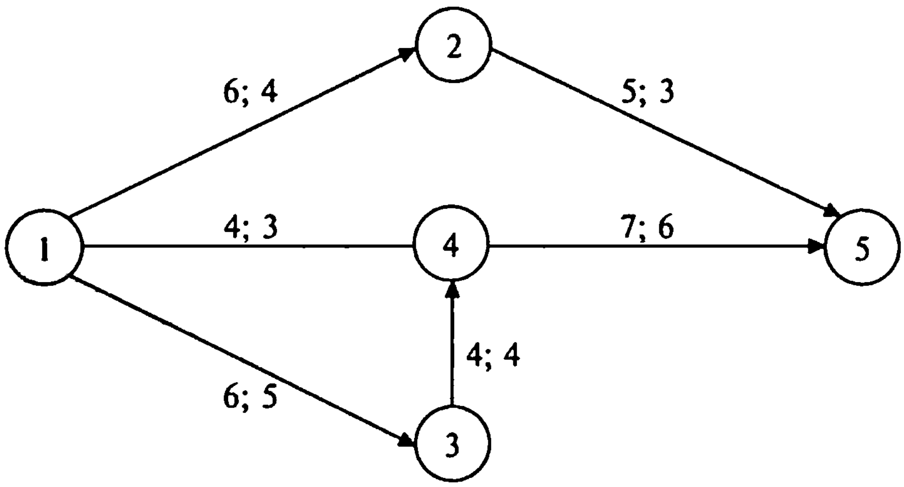


Рис. 8.27

8.44. Условие такое же, как и в задаче 8.43. Сетевая модель представлена на рис. 8.28.

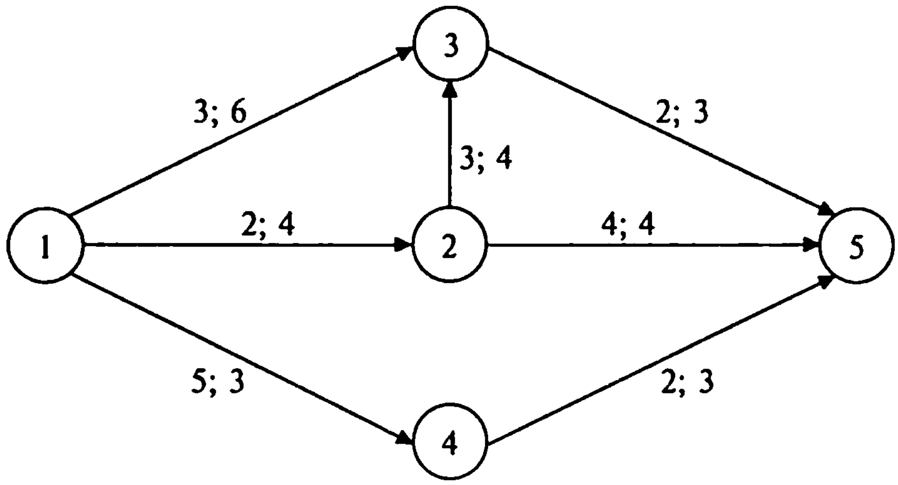


Рис. 8.28

8.45. Комплекс операций по внесению удобрений на поля района силами авиаотряда, состоящего из 18 самолетов, представлен сетевым графиком (рис. 8.29). Каждой дуге графика приписано два числа: первое — время выполнения операции (дней), второе — требуемое количество самолетов для выполнения операции за это время. Найти сроки начала и окончания операции комплекса таким образом, чтобы в любой момент планируемого периода было достаточно самолетов для выполнения операций. Операции не допускают перерыва в их выполнении.

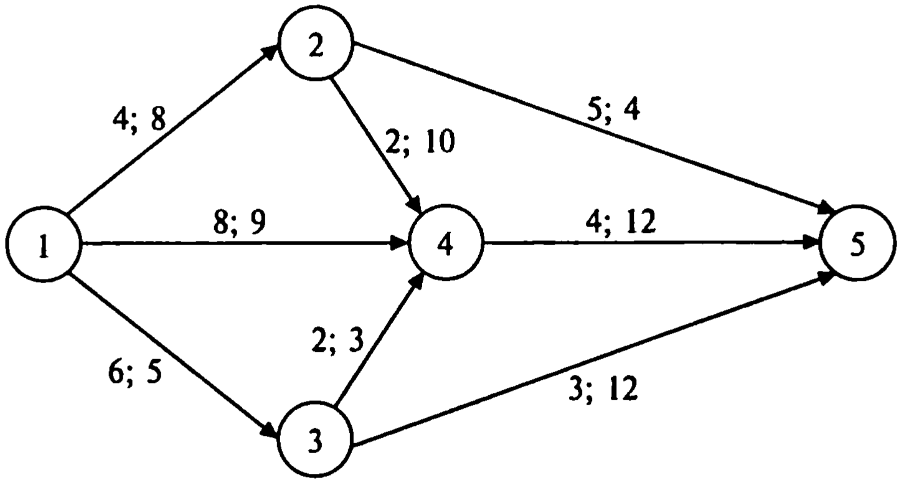


Рис. 8.29

В задачах **8.46–8.52** требуется оптимизировать сетевые графики (рис. 8.30–8.36 соответственно) по ресурсам. Как и в предыдущих задачах, первая цифра, приписанная дуге графика, означает время выполнения операции, вторая цифра — необходимое количество ресурсов для выполнения этой операции (интенсивность). Операции не допускают перерыва в их выполнении.

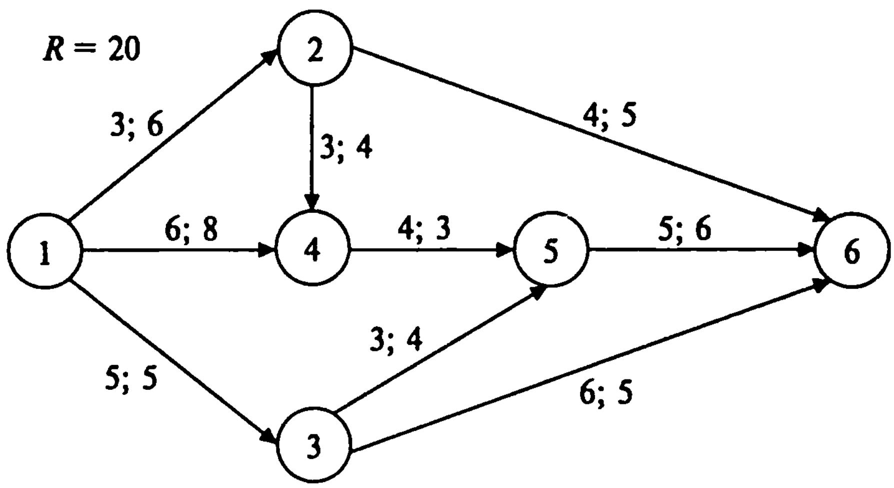


Рис. 8.30

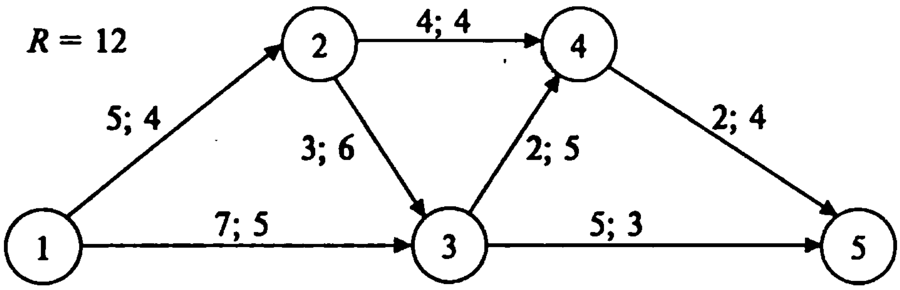


Рис. 8.31

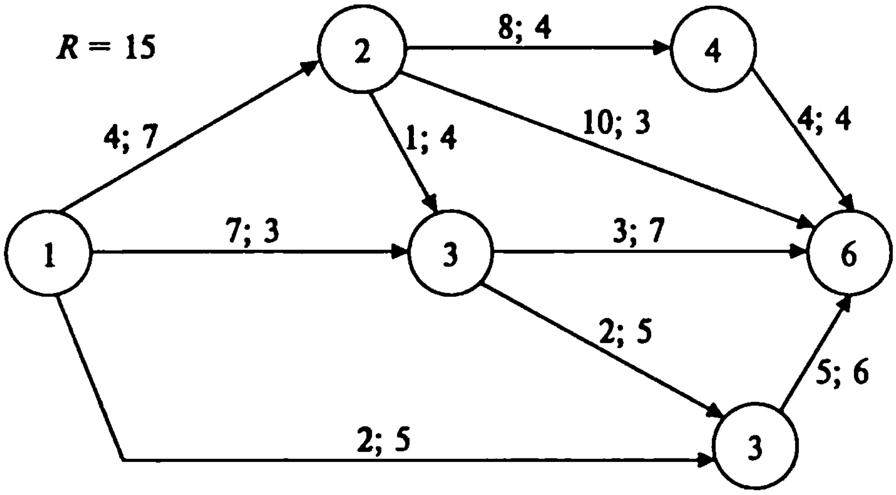


Рис. 8.32

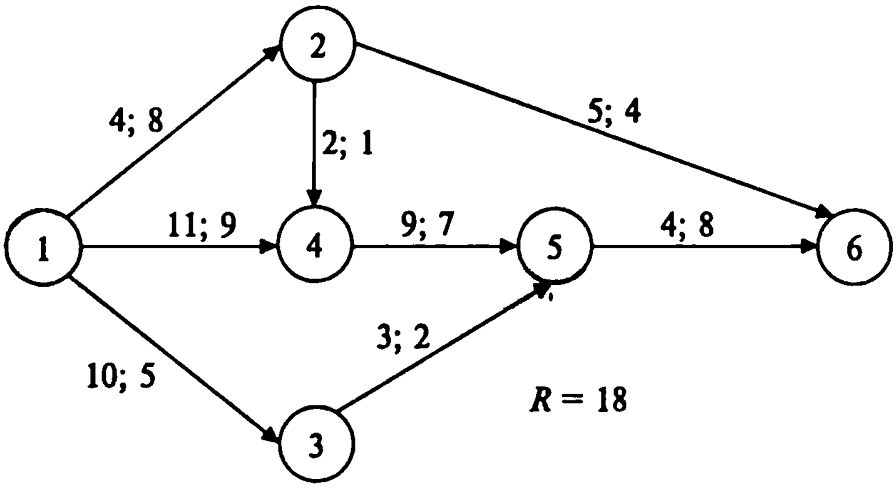


Рис. 8.33

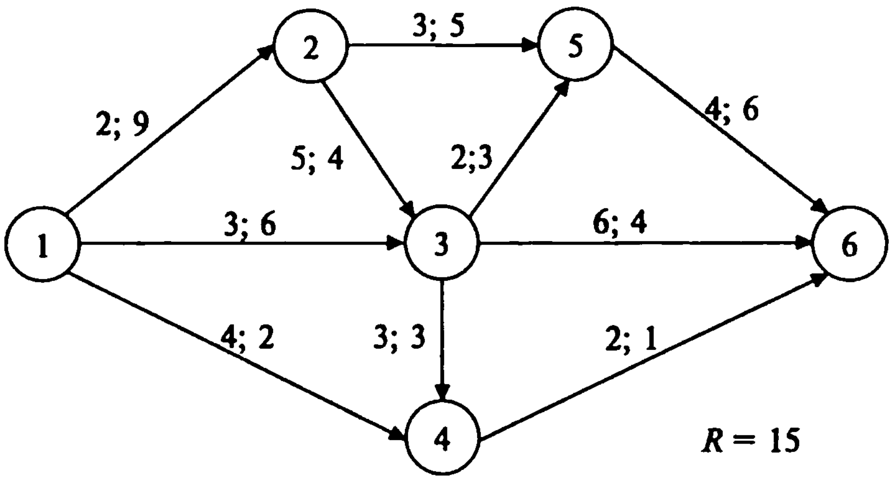


Рис. 8.34

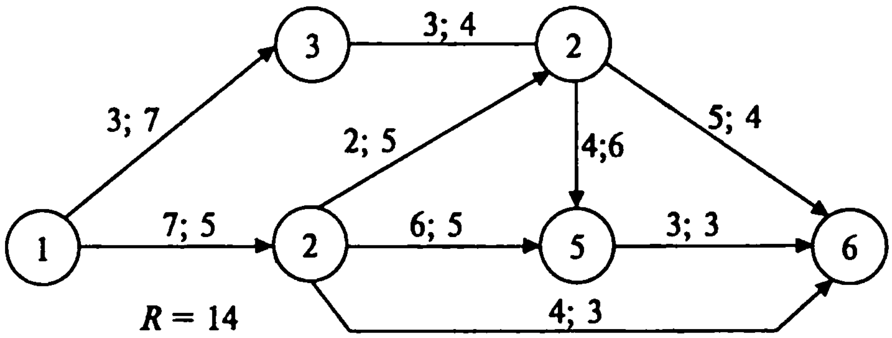


Рис. 8.35

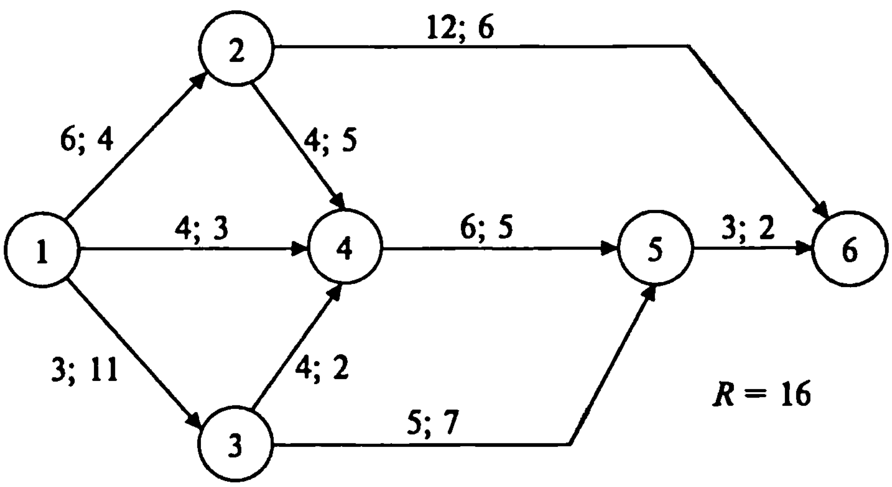


Рис. 8.36

Решить задачи **8.53–8.58**, условия которых совпадают соответственно с условиями упражнений 8.43–8.48, и задачу **8.59**, условие которой совпадает с условием упражнения 8.52. Однако в этих задачах необходимо оптимизировать сетевые графики по ресурсам в предположении, что операции допускают перерыв в их выполнении.

8.5. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ И ОПТИМИЗАЦИИ СЕТЕВЫХ ГРАФИКОВ

Для расчета параметров и оптимизации сетевых графиков используются информационные технологии пакета QSB. Применение этих технологий рассмотрим на примерах.

Информационная технология расчета проектов — PERT

Пример 8.13. Рассчитать временные параметры сетевого графика, представленного на рис. 8.37. Цифры, приписанные дугам, означают оптимистическое, наиболее вероятное, и пессимистическое время выполнения работ.

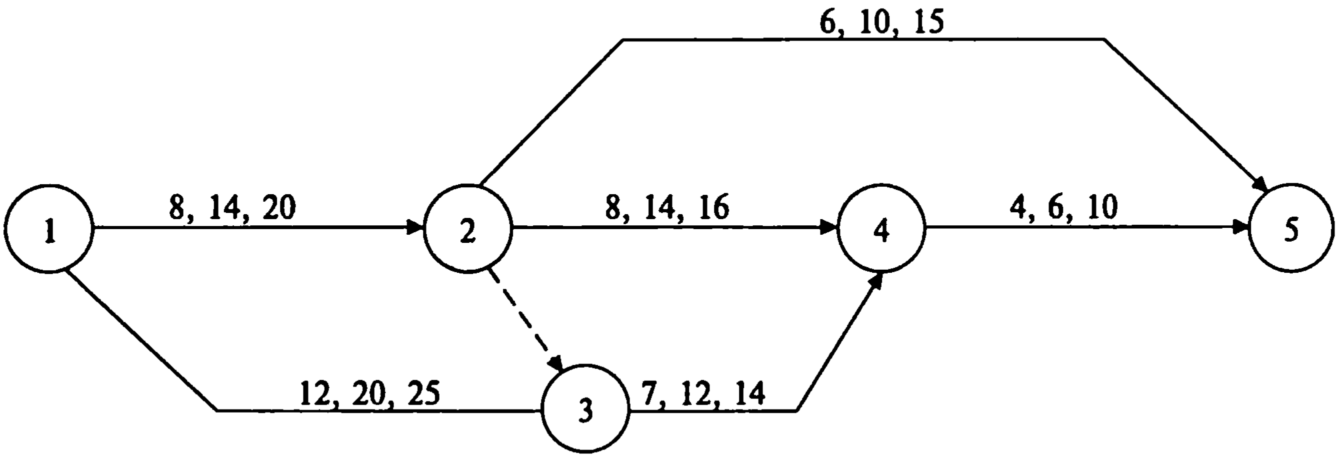


Рис. 8.37

Загрузим пакет QSB. В меню пакета выберем программу системы расчета проектов методами сетевого планирования — **PERT**. С помощью меню программы, выполняя последовательно необходимые действия, введем в ЭВМ информацию о сетевом графике под именем SET1 (табл. 8.19).

Таблица 8.19

Работа, номер	Работа, имя	Нач. соб.	Кон. соб.	Оптимистич. время	Наиболее вероятное время	Пессимистич. время
1	<A1>	<1>	<2>	<8.0000 >	<14.0000>	<20.0000 >
2	<A2>	<1>	<3>	<12.0000>	<20.0000>	<25.0000 >
3	<A3>	<2>	<3>	<0 >	<0 >	<0 >

Окончание табл. 8.19

Работа, номер	Работа, имя	Нач. соб.	Кон. соб.	Оптимистич. время	Наиболее вероятное время	Пессимистич. время
4	<A4>	<2>	<4>	<8.0000 >	<14.0000>	<16.0000 >
5	<A5>	<2>	<5>	<6.0000 >	<10.0000>	<15.0000 >
6	<A6>	<3>	<4>	<7.0000 >	<12.0000>	<14.0000 >
7	<A7>	<4	<5>	<4.0000 >	<6.0000 >	<10.0000 >

После ввода входных данных задачи подведем стрелками на клавиатуре прямоугольный курсор к опции **Решение задачи** и нажмем клавишу <Enter>. На экране — решение задачи, которое после просмотра можно вывести на печать. Результат решения представлен в табл. 8.20. При расчете параметров использовалось ожидаемое время выполнения работ. Под табл. 8.20 помещена информация о критическом пути. Резерв времени работ определен как разница между поздним и ранним их окончаниями. Работы, не имеющие резервов времени, лежат на критическом пути.

Таблица 8.20

Работа		Работа		Раннее начало	Позднее начало	Раннее оконч.	Позднее оконч.	Резерв LS–ES
№	Имя	Ожид. время	Дисп.					
1	A1	14.000	4.0000	0	3.6667	14.000	17.667	3.6667
2	A2	19.500	4.6944	0	0	19.500	19.5000	критич.
3	A3	0	0	14.000	19.500	14.000	19.500	5.5000
4	A4	13.333	1.7778	14.000	17.667	27.333	31.000	3.6667
5	A5	10.167	2.2500	14.000	27.167	24.167	37.333	13.167
6	A6	11.500	1.3611	19.500	19.500	31.000	31.000	критич.
7	A7	6.3333	1.0000	31.000	31.000	37.333	37.333	критич.
Ожидаемое время завершения — 37.33333								

Критический путь для SET 1 с временем = 37.33333 завершен.
CP # 1 : (с дисперсией = 7.055556)

A2 A6 A7

1 ======> 3 ======> 4 ======> 5

Информационные технологии системы анализа проектов — CPM

Рассмотрим систему анализа проектов по стоимости на примере 8 .7. Сетевой график представлен на рис. 8.14.

Как и в предыдущем примере, вызовем с диска пакет QSB. В меню пакета выберем программу **Сетевое планирование — CPM** и после ее активизации введем в память ЭВМ данные о задаче (с именем **OPTs 8.7**). Вид входных данных приведен в табл. 8.21.

Таблица 8.21

Работа, номер	Работа, имя	Нач. соб.	Кон. соб.	Норм. длительн.	Предел длительн.	Норм. стоим.	Предел стоим.
1	<A1>	<1>	<2>	<14.000>	<8.0000 >	<160.00>	<190.00>
2	<A2>	<1>	<3>	<20.000>	<12.0000>	<120.00>	<176.00>
3	<A3>	<2>	<3>	<0 >	<0 >	<0 >	<0 >
4	<A4>	<2>	<4>	<14.000>	<8.0000 >	<35.000>	<95.000>
5	<A5>	<2>	<5>	<10.000>	<6.0000 >	<60.000>	<84.000>
6	<A6>	<3>	<4>	<12.000>	<7.0000 >	<72.000>	<112.00>
7	<A7>	<4>	<5>	<6.000 >	<4.0000 >	<110.00>	<144.00>

Результаты решения задачи представлены в табл. 8.22. Они получены посредством выполнения предельного анализа последовательного уменьшения продолжительности критического пути на единицу до минимально возможного значения. В нашем примере минимальное значение критического пути равно 23.

Таблица 8.22

Работа, номер	Работа, имя	Раннее нач.	Позднее нач.	Раннее оконч.	Поздн. оконч.	Резерв LS−ES
1	A1	0	1.0000	8.0000	9.0000	1.0000
2	A2	0	0	12.000	12.000	критич.
3	A3	8.0000	12.000	8.0000	12.000	4.0000
4	A4	8.0000	9.0000	18.000	19.000	1.0000
5	A5	8.0000	13.000	18.000	23.000	5.0000
6	A6	12.000	12.000	19.000	19.000	критич.
7	A7	19.000	19.000	23.000	23.000	критич.
Время завершения = 23			Сум. стоимость = 757			

Критический путь для Opts8.7 с временем завершения = 23 . Суммарная стоимость = 757.

CP # 1 :

A2 A6 A7

1 ======> 3 ======> 4 ======> 5

9. ПОТОКИ В СЕТЯХ

9.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ

Пусть задана сеть, состоящая из множества вершин E и множества дуг, соединяющих некоторые упорядоченные пары вершин, взятых из E. Будем предполагать, что она является симметрическим графом, т.е. если дуга (E_i, E_j) входит в сеть, то в нее входит и симметричная дуга (E_j, E_i), хотя реально такой дуги может и не быть. Для определенности присвоим вершинам сети следующие номера: E_0, E_1, E_2, ..., E_n. Каждая вершина E_i характеризуется интенсивностью $d(E_i)$. Вершины, для которых $d(E_i) > 0$, назовем *источниками*, вершины, для которых $d(E_i) < 0$, — *стоками*, а остальные — *промежуточными*. По путям сети направляется однородное вещество (газ, жидкость, транспорт и т.д.) из источников в стоки. Каждой дуге (E_i, E_j) сети поставлено в соответствие число b_{ij}, называемое *пропускной способностью дуги*. Под пропускной способностью дуги понимается максимальное количество вещества, которое она может пропустить за единицу времени.

Пусть $d(E_0) > 0$, $d(E_n) < 0$ и $d(E_i) = 0\,(i = \overline{1, n-1})$ для остальных вершин, тогда E_0 – единственный источник, E_n— единственный сток, а E_1, E_2, ..., E_{n-1} — промежуточные вершины сети. Ставится задача определить для заданной сети максимальную величину потока из источника E_0 в сток E_n. Под потоком в сети из источника в сток будем понимать совокупность потоков $\{x_{ij}\}$ по всем дугам сети, где x_{ij} — поток по дуге (E_i, E_j), $(i, j = \overline{0, n}; i \neq j)$, равный количеству вещества, перемещаемого по ней в единицу времени. Заметим, что если пропускные способности симметричных дуг равны между собой, то эти дуги могут быть заменены ребрами. В силу сказанного постановка задачи справедлива для смешанных и неориентированных графов. Будем обозначать сеть $G(E, e)$, где e — множество дуг или ребер или и дуг, и ребер.

Математически задача о максимальном потоке формулируется следующим образом: найти неотрицательные значения x_{ij} (для всех $(E_i, E_j) \in e$), максимизирующие

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_{0j} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{in} \tag{9.1}$$

при ограничениях

$$0 \le x_{ij} \le b_{ij},\ i,\ j = \overline{0, n}, i \neq j; \tag{9.2}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 0;\ k = \overline{1, n-1}. \tag{9.3}$$

Условие (9.1) отражает величину максимального потока, который равен количеству вещества, вытекающего из источника, или количеству вещества, притекающего в сток. Условия (9.2) означают, что поток по каждой дуге должен быть неотрицательным и не превышать ее пропускной способности; из условия (9.3) следует, что количество вещества, притекающего в любую промежуточную вершину, равно количеству вещества, вытекающего из нее.

Важную роль в обосновании алгоритма решения задачи о максимальном потоке играет понятие разреза.

Разобьем множество всех вершин сети на два непересекающихся подмножества R и $\overline{R}$ ($R \cup \overline{R} = E$) так, чтобы $E_0 \in R$, а $E_n \in \overline{R}$. Если выделить все дуги, начальные вершины которых принадлежат подмножеству R, а конечные — $\overline{R}$, то эти дуги будут образовывать разрез $(R, \overline{R})$, отделяющий источник E_0 от стока E_n. Таким образом, *разрезом,* отделяющим E_0 от E_n, называется совокупность всех дуг (E_i, E_j), которые исходят из вершин $E_i \in R$ и заканчиваются в вершинах $E_j \in \overline{R}$.

Каждый разрез характеризуется пропускной способностью $b(R, \overline{R})$, которая численно равна сумме пропускных способностей дуг, его образующих:

$$b(R,\overline{R}) = \sum_{\substack{E_i \in R \\ E_j \in \overline{R}}} b_{ij}.$$

Очевидно, что любой путь из источника в сток содержит хотя бы одну дугу разреза $(R, \overline{R})$. Поэтому если удалить все дуги какого-нибудь разреза, то все пути из источника в сток будут блокированы. Поскольку пропускная способность пути равна наименьшей из пропускных способностей дуг, входящих в этот путь, то величина потока v, перемещаемого по всем возможным путям, соединяющим E_0 с E_n, не может превышать пропускной способности любого разреза сети, т.е. $v \le b(R,\overline{R})$. Следовательно, если удастся построить такой поток, что его величина v^* окажется равной пропускной способности некоторого разреза $(R^*, \overline{R}^*)$, т.е. $v^* = b(R^*, \overline{R}^*)$, то этот поток и будет максимальным, а $(R^*, \overline{R}^*)$ — разрезом с минимальной пропускной способностью.

9.2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ

9.2.1. Теорема Форда–Фалкерсона

Сущность алгоритма основана на теореме Форда–Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе. Прежде чем перейти к формулировке и доказательству теоремы, введем понятие прямой и обратной дуги цепи. Под *цепью* в данном случае будем понимать последовательность сцепленных дуг сети без учета их ориентации. Дугу, принадлежащую некоторой цепи, называют *прямой,* если ее направление совпадает с направлением обхода вершин этой цепи, и *обратной* — в противном случае. Например, цепь $\mu = (E_3 - E_5 - E_4 - E_7 - E_6 - E_8)$ на рис. 9.1, связывающая вершину E_3 с вершиной E_8, содержит три прямые дуги — (E_3, E_5), (E_4, E_7), (E_6, E_8) и две обратные — (E_4, E_5), (E_6, E_7).

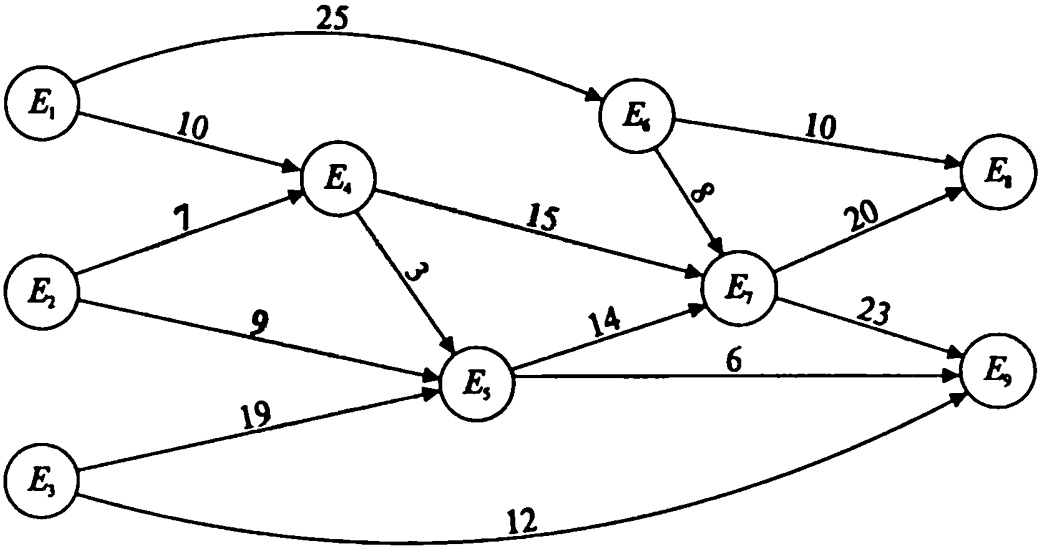


Рис. 9.1

Теорема. *В любой сети максимальная величина потока из источника E_0 в сток E_n равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего E_0 от E_n.*

Пусть имеется максимальный поток в сети. Если $x_{ij}=b_{ij}$, то будем говорить, что дуга (E_i, E_j) *насыщена* потоком.

Предположим, что v — величина максимального потока в сети $G(E,e)$. Необходимо доказать, что найдется такой разрез $(R,\overline{R})$ на этой сети, пропускная способность которого равна v, т.е. $b(R,\overline{R})=v$.

Разрез можно построить, если в подмножество R включить все вершины, которые достигаются по некоторой цепи из E_0, а в подмножество $\overline{R}$ — все остальные вершины.

Вершины, составляющие подмножество R, определяются последовательно, начиная с источника E_0, по следующему правилу:

$$E_0 \in R;$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } E_i \in R \text{ и } x_{ij} < b_{ij}, \text{ то } E_j \in R \\ \text{если } E_i \in R \text{ и } x_{ji} > 0, \text{ то } E_j \in R \end{array}\right\} \tag{9.4}$$

Покажем, что применение правила (9.4) приводит к построению разреза. Очевидно, разрез будет построен в том случае, если сток $E_n \in \overline{R}$.

Предположим, что $E_n \in R$. Тогда из правила (9.4) следует, что существует цепь из E_0 в E_n с пропускной способностью больше нуля, $\mu = (E_{i_1} - E_{i_2} - E_{i_3} - \ldots$ $\ldots - E_{i_m})$, где $E_{i_1} = E_0$; $E_{i_m} = E_n$, так как все прямые дуги, входящие в цепь, ненасыщенные ($x_{i_s i_{s+1}} < b_{i_s i_{s+1}}$), а для всех обратных дуг ($E_{i_{s+1}}$, E_{i_s}) величина потока больше нуля ($x_{i_{s+1} i_s} > 0$).

Обозначим через δ_1 наименьшую разность между пропускной способностью и величиной потока, взятую по всем прямым дугам цепи μ, а через δ_2 —

наименьшую величину потока, взятую по всем обратным дугам этой цепи. Определим величину $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Увеличим поток на δ по всем прямым дугам цепи и уменьшим на эту же величину по всем ее обратным дугам. Таким образом, величина нового потока равна $v + \delta$, что противоречит предположению о максимальности v. Следовательно, $E_n \in \overline{R}$ и множество дуг $(R, \overline{R})$ есть разрез, отделяющий источник от стока.

Докажем теперь, что пропускная способность построенного разреза равна максимальному потоку: $b(R,\overline{R}) = v$. Из правила (9.4) нахождения подмножества вершин R следует, что если $E_i \in R$, $E_j \in \overline{R}$, то $x_{ij} = b_{ij}$; в противном случае вершина E_j входила бы в R. Таким образом,

$$\sum_{\substack{i \in R \\ j \in \overline{R}}} x_{ij} = \sum_{\substack{i \in R \\ j \in \overline{R}}} b_{ij} = b(R, \overline{R}) = v.$$

Теорема доказана.

9.2.2. Алгоритм Форда нахождения максимального потока

Рассмотрим табличный алгоритм Форда нахождения максимального потока в сети, который состоит из ряда шагов.

Предварительный шаг. Записываем пропускные способности дуг сети в таблицу размерности $(n + 1) \times (n + 1)$, где $n+1$ — количество вершин сети $G(E, e)$. Если пропускная способность дуги (E_i, E_j) больше нуля, а симметричной ей дуги (E_j, E_i) равна нулю, то в клетку (i, j) заносим элемент b_{ij}, а в клетку (j,i) — нуль; если же $b_{ij} = b_{ji} = 0$, то клетки (i, j) и (j,i) не заполняем.

Общий шаг.

1. Находим по таблице путь из E_0 в E_n с пропускной способностью больше нуля. Для этого столбец, соответствующий вершине E_0, помечаем знаком *. Отыскиваем в E_0-й строке элементы $b_{0j} > 0$ и столбцы, в которых они находятся, помечаем сверху номером просматриваемой строки (цифрой 0). В результате окажутся выделенными все дуги (E_0, E_j) с положительной пропускной способностью. Эти дуги могут служить первыми дугами пути из E_0 в E_n.

Далее просматриваем те строки, номера которых совпадают с номерами помеченных столбцов. В каждой такой строке, например E_i-й, отыскиваем элементы $b_{ij} > 0$, находящиеся в непомеченных столбцах, и помечаем эти столбцы номером просматриваемой строки. Таким образом, окажутся выделенными дуги, которые могут служить вторыми дугами путей из E_0 в E_n.

Продолжаем аналогичный просмотр строк, номера которых совпадают с номерами помеченных столбцов, до тех пор, пока:

а) либо не будет помечен столбец E_n (сток). Это означает, что удалось выделить путь с пропускной способностью больше нуля из E_0 в E_n;

б) либо нельзя будет пометить новые столбцы (в просматриваемых строках не окажется положительных элементов, расположенных в непомеченных столбцах). В этом случае отсутствует путь из E_0 в E_n, проходящий по дугам с положительной пропускной способностью.

В случае а) искомый путь μ из E_0 в E_n находим, используя пометки столбцов. Пусть последняя вершина пути E_n помечена номером k. По этой пометке находим предшествующую вершину E_k (при просмотре строки E_k был помечен столбец E_n, и дуга (E_k, E_n) — последняя в искомом пути). Элемент $b_{kn} > 0$, стоящий на пересечении E_k-й строки и E_n-го столбца, отмечаем знаком минус (получим b_{kn}^-), а симметричный ему элемент b_{nk}, находящийся на пересечении E_n-й строки и E_k-го столбца, — знаком плюс (получим b_{nk}^+). Так как просматривалась E_k-я строка, то перед этим был помечен, например, номером r, E_k-й столбец. Поэтому двигаемся от элемента b_{nk}^+ по E_k-му столбцу до r-й строки (дуга (E_r, E_k) предшествует дуге (E_k, E_n)) и отмечаем b_{rk} знаком минус, а b_{kr} — знаком плюс. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не придем к E_0-й строке и не отметим знаком минус элемент этой строки и знаком плюс — симметричный ему элемент. Переходим к п. 2.

В случае б) столбец E_n, соответствующий стоку, пометить невозможно. Следовательно, не существует больше пути с пропускной способностью больше нуля из E_0 в E_n, и общий повторяющийся шаг закончен. Вершины, находящиеся в помеченных столбцах таблицы, образуют подмножество R (эти вершины достижимы по некоторому пути из источника E_0), остальные вершины входят в подмножество $\overline{R}$. Дуги, исходящие из вершин $E_i \in R$ и входящие в вершины $E_j \in \overline{R}$, образуют разрез с минимальной пропускной способностью

$$b(R, \overline{R}) = v = \sum_{\substack{i \in R \\ j \in \overline{R}}} b_{ij},$$

где b_{ij} — пропускные способности дуг исходной сети. Переходим к заключительному шагу алгоритма.

2. Находим пропускную способность θ найденного пути μ, т.е. максимальное количество вещества, которое можно переместить из E_0 в E_n по пути μ в единицу времени. Пропускная способность пути равна наименьшей из пропускных способностей дуг, входящих в этот путь, т.е.

$$\theta = \min_{(i,j) \in \mu} \{\overline{b_{ij}}\}.$$

3. Определяем остаточные пропускные способности дуг найденного пути и симметричных к ним. Для этого из элементов таблицы b_{ij}^- вычитаем θ, а к элементам b_{ij}^+ прибавляем θ. В результате выполнения этого действия получим новую таблицу, аналогичную исходной, но с измененными пропускными способностями.

После получения новой таблицы возвращаемся к п. 1 общего шага, который применяем до тех пор, пока не получим окончательную таблицу, в которой нет ни одного пути из E_0 в E_n с пропускной способностью больше нуля.

Заключительный шаг. Из элементов исходной таблицы вычитаем соответствующие элементы таблицы, полученной на последнем шаге. В результате получим таблицу, положительные элементы которой равны величинам потоков x_{ij} по соответствующим дугам (E_i, E_j), а максимальный поток в сети — сумме элементов E_0-й строки или E_n-го столбца, т.е.

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_{0j} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{in}.$$

Пример 9.1. Для сети, изображенной на рис. 9.2, найти максимальный поток из вершины E_0 в вершину E_4. Числа, приписанные дугам и ребрам, означают пропускные способности.

Предварительный шаг. Формируем матрицу пропускных способностей дуг сети (табл. 9.1).

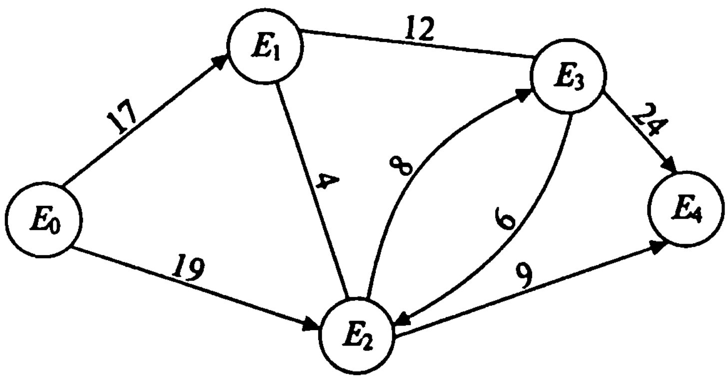


Рис. 9.2

Первый шаг.

1. Находим по табл. 9.1 какой-либо путь с положительной пропускной способностью из вершины E_0 в вершину E_4. Для этого столбец E_0 помечаем знаком *. В строке E_0 положительные элементы расположены в столбцах E_1 и E_2. Следовательно, эти столбцы помечаем сверху цифрой 0 (номером рассматриваемой строки). Далее просматриваем элементы строк, номера которых совпадают с номерами помеченных столбцов. Просматривая строку E_1, помечаем номером 1 столбец E_3 и, просматривая очередную строку E_2, помечаем номером 2 столбец E_4. Так как вершина E_4 — сток, то процесс пометок закончен, и искомый путь из источника в сток существует. Последней дугой этого пути является дуга (E_2, E_4). Отмечаем элемент $b_{24}=9$ знаком минус, а симметричный ему элемент $b_{42}=0$ — знаком плюс. Поскольку столбец E_2 помечен номером 0, то элемент $b_{02}=19$ отмечаем знаком минус, а элемент $b_{20}=0$ — знаком плюс. В результате получим путь $\mu = (E_0 - E_2 - E_4)$.

2. Определяем пропускную способность найденного пути

$$\theta_1 = \min\{b_{02}^-, b_{24}^-\} = \min\{19; 9\} = 9.$$

3. Пропускные способности дуг найденного пути уменьшим на $\theta_1 = 9$, а симметричных к ним дуг — увеличим на ту же величину. Получим табл. 9.2.

Таблица 9.1

$E_i \backslash E_j$	(*) E_0	(0) E_1	(0) E_2	(1) E_3	(2) E_4
E_0		17	19^-		
E_1	0		4	12	
E_2	0^+	4		8	9^-
E_3		12	6		24
E_4			0^+	0	

Таблица 9.2

$E_i \backslash E_j$	(*) E_0	(0) E_1	(0) E_2	(1) E_3	(3) E_4
E_0		17^-	10		
E_1	0^+		4	12^-	
E_2	9	4		8	0
E_3		12^+	6		24^-
E_4			9	0^+	

Второй шаг.

1. Пометив столбцы табл. 9.2 и расставив знаки, находим путь $\mu_2 = (E_0-E_1-E_3-E_4)$. При этом элементы b_{01}, b_{13}, b_{34} окажутся помеченными знаком минус, а симметричные им элементы b_{10}, b_{31}, b_{43}– знаком плюс.

2. Пропускная способность пути μ_2

$$\theta_1 = \min\{b_{01}^-, b_{13}^-, b_{34}^-\} = \min\{17, 12, 24\} = 12$$

3. Изменив пропускные способности дуг на θ_2, получим табл. 9.3.

Третий шаг.

1. Пометив столбцы, находим $\mu_3 = (E_0-E_2-E_3-E_4)$.
2. Величина потока по пути μ_3 $\theta_3 = \min\{10, 8, 12\} = 8$.
3. Вычислив новые пропускные способности дуг, приходим к табл. 9.4.

Четвертый шаг.

1. Столбец E_0 помечаем знаком *. Просматривая E_0-ю строку, помечаем номером 0 столбцы E_1 и E_2. Продолжая просмотр строк, убеждаемся, что столбцы E_3 и E_4 пометить невозможно. Следовательно, больше не существует ни одного пути с положительной

Таблица 9.3

E_i \ E_i	(*) E_0	(0) E_1	(0) E_2	(2) E_3	(3) E_4
E_0		5	10		
E_1	12		4	0	
E_2	9^+	4		8^-	0
E_3		24	6^+		12^-
E_4			9	12^+	

Таблица 9.4

E_i \ E_j	(*) E_0	(0) E_1	(0) E_2	E_3	E_4
E_0		5	2		
E_1	12		4	0	
E_2	17	4		0	0
E_3		24	14		4
E_4			9	20	

пропускной способностью из вершины E_0 в вершину E_4. Подмножество R образуют помеченные вершины E_0, E_1, E_2 (табл. 9.4), подмножество $\bar{R}$ — непомеченные вершины E_3 и E_4. Разрез с минимальной пропускной способностью образуют дуги, начальные вершины которых принадлежат подмножеству R, а конечные — $\bar{R}$. Таким образом, разрез с минимальной пропускной способностью $(R^*, \bar{R}^*) = \{(E_1, E_3), (E_2, E_3), (E_2, E_4)\}$. Действительно, удалив дуги разреза, мы блокируем все пути из источника в сток. Пропускная способность разреза $b(R^*, \bar{R}^*) = b_{13} + b_{23} + b_{24} = 12+8+9=29$.

Заключительный шаг. Вычитая из элементов табл. 9.1 соответствующие элементы табл. 9.4, получим табл. 9.5.

Положительные элементы табл. 9.5 характеризуют величины дуговых потоков. Следовательно, $x_{01}=12$, $x_{02}=17$, $x_{13}=12$, $x_{23}=8$, $x_{24}=9$, $x_{34}=20$, а по всем остальным дугам потоки равны нулю. Величина максимального потока равна сумме элементов E_0-й строки табл. 9.5 или сумме элементов E_4-го столбца:

$$v = \sum_{j=1}^{4} x_{0j} = 12 + 17 = \sum_{i=0}^{3} x_{i4} = 9 + 20 = 29.$$

Как видно, $v^* = b(R^*, \bar{R}^*)$. Дуги разреза $(R^*, \bar{R}^*)$ насыщены потоком ($x_{13}=b_{13}=12$; $x_{23}=b_{23}=8$; $x_{24}=b_{24}=9$).

Таблица 9.5

E_{ji} \ E_i	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0		12	17		
E_1	−12		0	12	
E_2	−17	0		8	9
E_3		−12	−8	.	20
E_4			−9	−20	

9.2.3. Сведение задачи с несколькими источниками и стоками к задаче с одним источником и одним стоком

Рассмотрим сеть $G = (E, e)$, состоящую из множества источников $s = \{E_1, ..., ... E_l\}$, множества промежуточных вершин (узлов) $N=\{E_{l+1}, \ldots, E_m\}$ и множества стоков $t = \{E_{m+1}, \ldots, E_n\}$. Под потоком в сети из s в t будем понимать действительную функцию v, определенную на множестве дуг e и удовлетворяющую ограничениям вида (9.2), (9.3). Величина потока находится из выражения

$$v = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=l+1}^{m} x_{ij} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=l+1}^{m} \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij}. \qquad (9.5)$$

Расширим сеть $G = (E, e)$ до сети $G' = (E', e')$, добавив две фиктивные вершины E_0 и E_{n+1} (E_0 — источник; E_{n+1} — сток) и фиктивные дуги $(E_0, E_j), j = \overline{1,l}$, и $(E_i, E_{n+1}), i = \overline{m+1, n}$. Пропускные способности фиктивных дуг $b_{0j} = d(E_j), j = \overline{1,l}$ и $b_{i,n+1} = |d(E_i)|, i = \overline{m+1, n}$.

Очевидно, что величину потока как в исходной сети $G = (E, e)$, так и в расширенной сети $G' = (E', e')$ определяют пропускные способности дуг исходной сети. Таким образом, задача о максимальном потоке из множества источников s во множество стоков t сети $G = (E,e)$ равносильна задаче о максимальном потоке из единственного источника E_0 в единственный сток E_{n+1} сети $G' = (E', e')$.

Пример 9.2. Места добычи нефти расположены в географических пунктах E_1, E_2, E_3. Из мест добычи нефть транспортируется на нефтеперерабатывающие заводы E_8 и E_9 через некоторые промежуточные пункты E_4, E_5, E_6, E_7. Совокупность пунктов с соединяющими их транспортными магистралями изобразим в виде сети (рис. 9.1), дуги соответствуют транспортным магистралям, а вершины — отдельным пунктам (местам добычи, заводам, станциям перекачки или железнодорожным станциям). Пропускные способности транспортных магистралей приписаны дугам сети. Чтобы определить, какое максимальное количество нефти можно транспортировать из мест добычи на нефтеперерабатывающие заводы, необходимо расширить сеть и к расширенной сети (рис. 9.3) применить алгоритм нахождения максимального потока. (Фиктивные дуги на рис. 9.3 нанесены штриховыми линиями.)

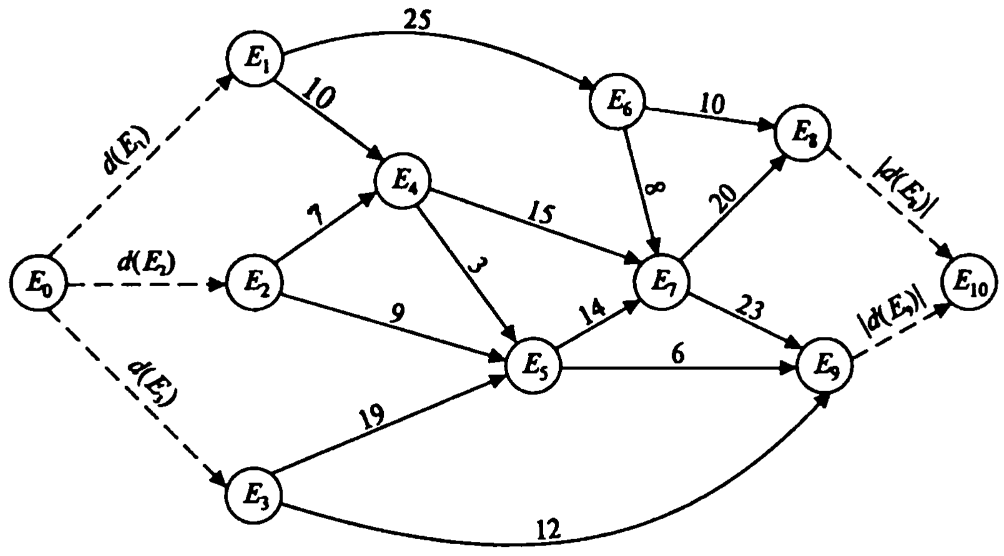


Рис. 9.3

9.3. ЗАДАЧА О ПОТОКЕ МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ

9.3.1. Постановка задачи

Задана сеть $G=(E,e)$ с одним источником E_0, одним стоком E_n и промежуточными вершинами E_1, E_2, ..., E_{n-1}. Каждой дуге (E_i, E_j) (ребру $(\overline{E_i, E_j})$) сети поставлены в соответствие две величины: пропускная способность дуги (ребра) b_{ij}; дуговая стоимость c_{ij} (стоимость доставки единицы потока по дуге (E_i, E_j) или ребру $(\overline{E_i, E_j})$, одинаковая в обоих направлениях). Необходимо найти поток из источника в сток заданной величины B, обладающий минимальной стоимостью. Под стоимостью потока будем понимать стоимость доставки того или другого количества вещества из источника в сток. При этом предполагается, что заданная величина потока не превышает величины максимального потока из E_0 в E_n. Формальная запись задачи имеет вид

$$f = \sum_{(i,j)\in e} c_{ij} x_{ij} \to \min; \tag{9.6}$$

$$0 \le x_{ij} \le b_{ij},\ i,\ j = \overline{0,n};\ i \ne j; \tag{9.7}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 0, k = \overline{1, n-1}; \tag{9.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0j} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{in} = B. \tag{9.9}$$

Если бы не было ограничений на пропускные способности дуг (ребер), то для решения задачи достаточно было бы найти самый экономичный путь (путь минимальной стоимости) из E_0 в E_n и пропустить по нему весь поток.

Путь минимальной стоимости — это путь, у которого сумма стоимостей, приписанных дугам, является минимальной. При наличии ограничений на пропускные способности дуг (ребер) можно последовательно находить различные пути минимальной стоимости и пропускать потоки по ним до тех пор, пока суммарная величина потока по всем путям не будет равна заданной величине потока. Ниже мы рассмотрим алгоритм нахождения потока минимальной стоимости, основанный на этом подходе.

9.3.2. Задача о кратчайшем маршруте

Рассмотрим задачу определения кратчайшего пути между двумя вершинами сети. Эта задача является частным случаем задачи об оптимальном потоке, а алгоритм ее решения может быть использован как составная часть алгоритма решения задачи (9.6)–(9.9). Кроме того, эта задача охватывает широкий круг важных приложений моделей исследования операций (замена оборудования, календарное планирование и др.).

Пусть задана сеть $G(E, e)$, каждой дуге (ребру) которой соответствует некоторое расстояние l_{ij}. Требуется найти кратчайший маршрут из источника E_0 в сток E_n.

Математическая постановка задачи имеет вид: минимизировать

$$\sum_{(i,j)\in e} l_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{(k,j)\in e} x_{kj} - \sum_{(i,k)\in e} x_{ik} = \begin{cases} 1, \text{если } E_k = E_0; \\ 0, \text{если } E_k \neq E_0, E_n (k = \overline{1, n-1}); \\ -1, \text{если } E_k = E_n; \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если дуга } (E_i, E_j) \text{ входит в путь;} \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

Двойственная задача сводится к максимизации $-\varepsilon_n + \varepsilon_0$ при ограничениях

$$\varepsilon_j - \varepsilon_i \le l_{ij} \text{ для всех } (E_i, E_j) \in e,$$

где все двойственные переменные не ограничены по знаку. Значение ε_k, $k = \overline{0, n}$, равно наименьшему расстоянию из узла E_0 в узел E_k.

Рассмотрим алгоритм отыскания значений двойственных переменных. Обозначим через R подмножество помеченных вершин сети, тогда $\overline{R}$ — подмножество непомеченных вершин, а $R \cup \overline{R} = E$.

Решение задачи с учетом обозначений сводится к следующему.

Предварительный шаг. Помечаем источник E_0 числом $\varepsilon_0 = 0$ и переходим к общему шагу (после выполнения этого шага вершина $E_0 \in R$).

Общий шаг.

1. Находим дуги, начальные вершины (E_i) которых принадлежат подмножеству R, а конечные (E_j) — $\overline{R}$. Для каждой из этих дуг $(E_i, E_j) \in (R, \overline{R})$ определяем величину $h_{ij}=\varepsilon_i+l_{ij}$, где ε_i — числа (пометки), приписанные вершинам $E_i \in R$.

Находим значение $\varepsilon_j = \min\limits_{(E_i,E_j)\in(R,\overline{R})} h_{ij}$ и выделяем дуги, на которых достигается этот минимум. Вершинам $E_i \in \overline{R}$, являющимся конечными вершинами выделенных дуг, припишем значение ε_j.

2. Проверяем, выполняется ли условие $\varepsilon_i + l_{ij} \geq \varepsilon_j$ для всех дуг сети, оба конца которых принадлежат R. Если это условие для какой-то дуги не выполняется, т.е. $\varepsilon_j > \varepsilon_i + l_{ij}$, то соответствующее значение ε_j заменяем на $\varepsilon_i + l_{ij}$, выделяем дугу (E_i, E_j) и переходим к п. 1. Пометку вершин продолжаем до тех пор, пока не будет помечен сток E_n. Длину кратчайшего маршрута от E_0 до E_n указывает значение ε_n.

Заключительный шаг. Определяем оптимальный маршрут или оптимальные маршруты (если их несколько), двигаясь по выделенным дугам от стока E_n к источнику E_0 в направлении, обратном их ориентации. При этом в маршрут включаются те дуги (E_i, E_j), для которых $\varepsilon_j - l_{ij} = \varepsilon_i$.

Алгоритм сходится за конечное число шагов при условии, что сумма длин дуг любого контура, содержащегося в сети, неотрицательна.

Пример 9.3. Найти кратчайший маршрут на сети (рис. 9.4), из E_0 в E_5. Значения l_{ij} приписаны дугам и ребрам.

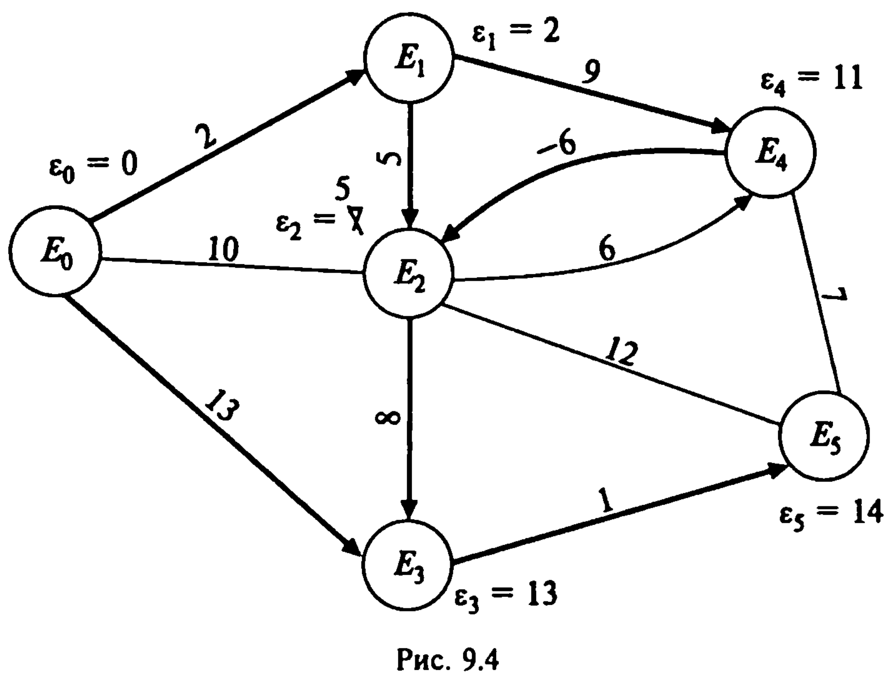


Рис. 9.4

Предварительный шаг. Источнику приписываем пометку $\varepsilon_0 = 0$ ($E_0 \in R$).

Первый шаг.

1. Множество $(R, \overline{R}) = \{(E_0, E_1), (E_0, E_2), (E_0, E_3)\}$. Находим $h_{01} = \varepsilon_0 + l_{01} = 0+2 = 2$, $h_{02} = \varepsilon_0 + l_{02} = 0+10 = 10$ и $h_{03} = \varepsilon_0 + l_{03} = 0+13 = 13$. Среди величин h_{ij} минимальной является h_{01}, поэтому вершине E_1 приписываем пометку $\varepsilon_1 = 2$ и выделяем дугу (E_0, E_1) жирной линией.

2. Для дуги (E_0, E_1) условие $\varepsilon_i + l_{ij} \geq \varepsilon_j$ выполняется.

Второй шаг.

1. Подмножество $R = \{E_0, E_1\}$, а множество $(R, \overline{R}) = \{(E_0, E_2), (E_0, E_3), (E_1, E_2), (E_1, E_4)\}$. Вычисляем $h_{02} = \varepsilon_0 + l_{02} = 10$, $h_{03} = \varepsilon_0 + l_{03} = 13$, $h_{12} = \varepsilon_1 + l_{12} = 7$ и $h_{14} = \varepsilon_1 + l_{14} = 11$; $\min\limits_{(E_i, E_j) \in (R, \overline{R})} \{h_{ij}\} = 7$ достигается по дуге (E_1, E_2). Вершине E_2 приписываем пометку $\varepsilon_2 = 7$ и выделяем дугу (E_1, E_2).

2. Для дуг, оба конца которых принадлежат подмножеству R, условие $\varepsilon_i + l_{ij} \geq \varepsilon_j$ выполняется.

Третий шаг.

1. Подмножество $R = \{E_0, E_1, E_2\}$. Наименьшим среди значений h_{ij} является $h_{14} = 11$, следовательно, $\varepsilon_4 = 11$.

2. Так как $\varepsilon_4 + l_{42} = 11 + (-6) = 5 < \varepsilon_2 = 7$, то заменяем $\varepsilon_2 = 7$ на $\varepsilon_4 + l_{42} = 5$ и выделяем дугу (E_4, E_2).

Продолжая процесс, на четвертом шаге вершине E_3 припишем значение $\varepsilon_3 = 13$ и выделим дуги (E_0, E_3) и (E_2, E_3). На пятом шаге находим $\varepsilon_5 = 14$ и выделим дугу (E_3, E_5).

Заключительный шаг. Находим оптимальный маршрут. При этом в него включаем те дуги (E_i, E_j), для которых выполняется условие $\varepsilon_j - l_{ij} = \varepsilon_i$. Так как $\varepsilon_5 - l_{35} = 13 = \varepsilon_3$, то (E_3, E_5) — последняя дуга искомого маршрута. Продолжая, находим два кратчайших маршрута: $\mu_1 = (E_0 - E_3 - E_5)$ и $\mu_2 = (E_0 - E_1 - E_4 - E_2 - E_3 - E_5)$.

9.3.3. Алгоритм Басакера-Гоуэна нахождения оптимального потока

Алгоритм нахождения оптимального потока на сети, предложенный Басакером и Гоуэном, состоит из ряда шагов.

Первый шаг. В исходной сети все дуговые потоки и величину потока из E_0 в E_n полагаем равными нулю.

Второй шаг. Находим путь μ минимальной стоимости из E_0 в E_n, используя стоимости, приписанные дугам на первой итерации, и модифицированные стоимости на последующих итерациях.

Третий шаг. Определяем пропускную способность θ пути μ:

$$\theta = \min_{(E_i, E_j) \in \mu} (b_{ij}).$$

Добавляем к старой величине потока $v_{\text{стар}}$ величину $\theta' = \min(\theta, B - v_{\text{стар}})$ и сравниваем с заданной величиной потока B. Если величина суммарного потока равна заданной величине B, то задача решена, переходим к шестому шагу. В противном случае переходим к четвертому шагу.

Четвертый шаг. Находим величину потока по каждой дуге, принадлежащей пути μ, для чего к старым величинам дуговых потоков пути μ добавляем величину θ'. Пропускные способности дуг, симметричных дугам пути μ, полагаем равными величинам соответствующих дуговых потоков, т.е. $b_{ji}=x_{ij}$.

Пятый шаг. Определяем модифицированные дуговые стоимости c_{ij} по формуле

$$c_{ij}^{\bullet}=\begin{cases} c_{ij}, \text{ если } 0 \le x_{ij} < b_{ij}; \\ \infty, \text{ если } x_{ij}=b_{ij}. \end{cases}$$

Если для какой-то дуги $x_{ij} > 0$, то модифицированная стоимость симметричной ей дуги (j, i) равна величине c_{ij}, взятой с обратным знаком. Переходим к выполнению второго шага.

Шестой шаг. Минимальную стоимость потока заданной величины определяем по формуле (9.6).

Пример 9.4. Найти поток из E_0 в E_5 величины $B = 3$ на сети, представленной на рис. 9.5, обладающий минимальной стоимостью. Первое число, приписанное каждому ребру, означает пропускную способность, второе — стоимость доставки единицы потока по ребру из одной вершины в другую. Доставка потока по ребру может осуществляться в любом направлении.

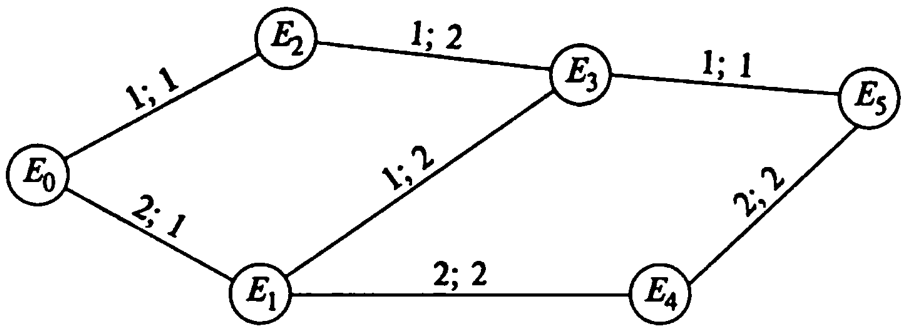


Рис. 9.5

Итерация 1.

Первый шаг.

Полагаем величину потока по каждому ребру сети равной нулю ($x_{ij} = 0$).

Второй шаг.

Применяя алгоритм нахождения кратчайшего маршрута, определяем, что минимальная стоимость доставки единицы потока из E_0 в E_5, равная $\varepsilon_5=4$, достигается по путям $\mu_1=(E_0-E_1-E_3-E_5)$ и $\mu_2 = (E_0-E_2-E_3-E_5)$, изображенным на рис. 9.6 жирными линиями.

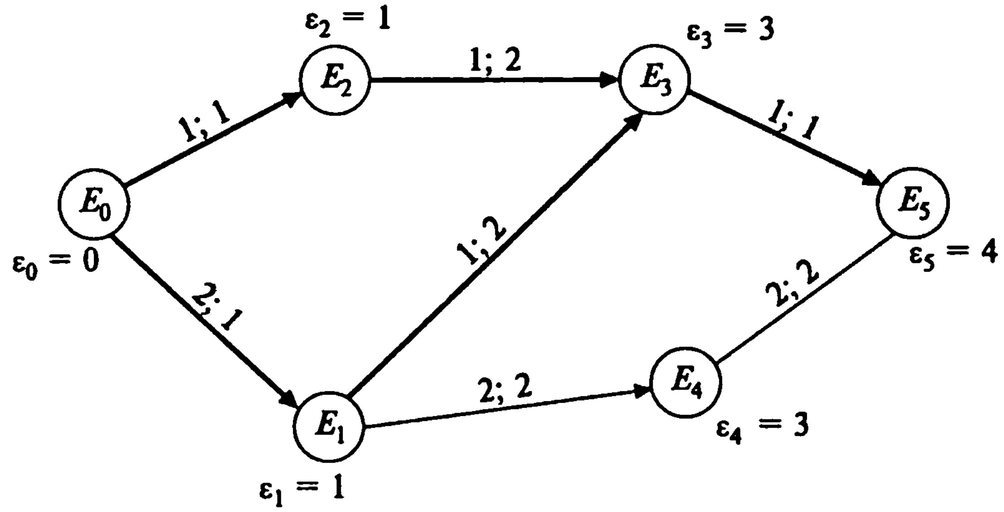


Рис. 9.6

Третий шаг. Определяем пропускные способности выделенных путей μ_1 и μ_2:

$$\theta_1 = \min_{(E_i, E_j) \in \mu_1} (b_{ij}) = \min (2, 1, 1) = 1;$$

$$\theta_2 = \min_{(E_i, E_j) \in \mu_2} (b_{ij}) = \min (1, 1, 1) = 1.$$

Так как дуга (E_3, E_5) с пропускной способностью $b_{35} = 1$ не позволяет использовать два пути, то выберем первый путь. Учитывая, что $\theta_1 = 1 < B = 3$, переходим к четвертому шагу.

Четвертый шаг. Величины потоков по дугам пути μ_1 равны: $x_{01} = x_{13} = x_{35} = 0+1=1$. Эти значения приписаны дугам сети в скобках (рис. 9.7). Пропускные способности дуг, симметричных дугам пути, равны: $b_{10} = x_{01} = 1$; $b_{31} = x_{13} = 1$; $b_{53} = x_{35} = 1$.

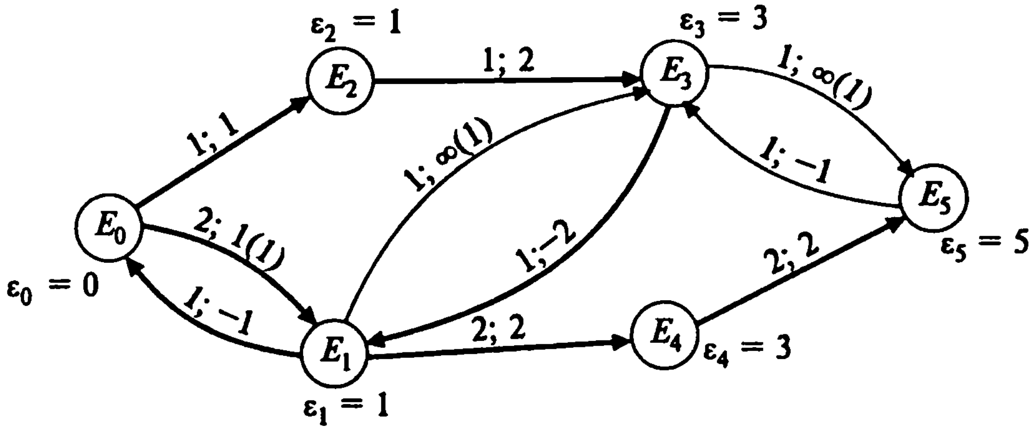


Рис. 9.7

Пятый шаг. Определяем модифицированные стоимости: $c^*_{01} = 1$, так как $x_{01} = 1 < b_{01} = 2$ и $c^*_{10} = -1$; $c^*_{13} = \infty$, так как $x_{13} = b_{13} = 1$ и $c^*_{31} = -2$; $c^*_{35} = \infty$, так как $x_{35} = b_{35} = 1$ и $c^*_{53} = -1$. Все остальные $c^*_{ij} = c_{ij}$, так как для них $x_{ij} = 0 < b_{ij} \neq 0$.

Итерация 2.

Второй шаг. Находим пути минимальной стоимости $\mu_3 = (E_0 - E_1 - E_4 - E_5)$ и $\mu_4 = (E_0 - E_2 - E_3 - E_1 - E_4 - E_5)$.

Третий шаг. Пропускные способности третьего пути $\theta_3 = \min(1, 2, 2) = 1$, четвертого пути $\theta_4=\min(1, 1, 1, 2, 2)=1$. В этом случае поток пропускаем сразу по обоим путям, так как пропускные способности общих дуг (E_1, E_4) и (E_4, E_5) равны 2 единицам. Сумма $\theta_1+\theta_3+\theta_4=3$ и равна заданной величине потока. Следовательно, задача решена.

Шестой шаг. Оптимальная стоимость потока

$$f = \sum_{(i,j)\in e} c_{ij}x_{ij} = c_{01}x_{01}+c_{02}x_{02}+c_{14}x_{14}+c_{23}x_{23}+c_{35}x_{35}+c_{45}x_{45} = 14.$$

Фактическое движение потока изображено на рис. 9.8, где числа у дуг равны дуговым потокам ($x_{01}=2$, $x_{02}=1$, $x_{14}=2$, $x_{23}=1$, $x_{35}=1$, $x_{45}=2$, все остальные неизвестные равны нулю). Поток по дугам (E_1,E_3) и (E_3,E_1) «погасился».

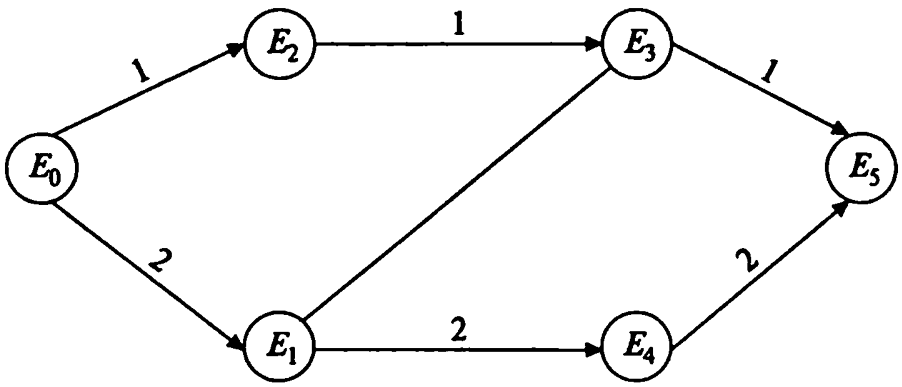


Рис. 9.8

9.4. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ СЕТЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Эффективным средством решения потоковых задач является пакет **net.exe** сетевой оптимизации (Network Optimization). Применение информационных технологий названного пакета рассмотрим на примерах.

Пример 9.5. Найти максимальный поток на сети (рис. 9.9) из источника E_1 в сток E_5. Числа, приписанные дугам, означают их пропускные способности.

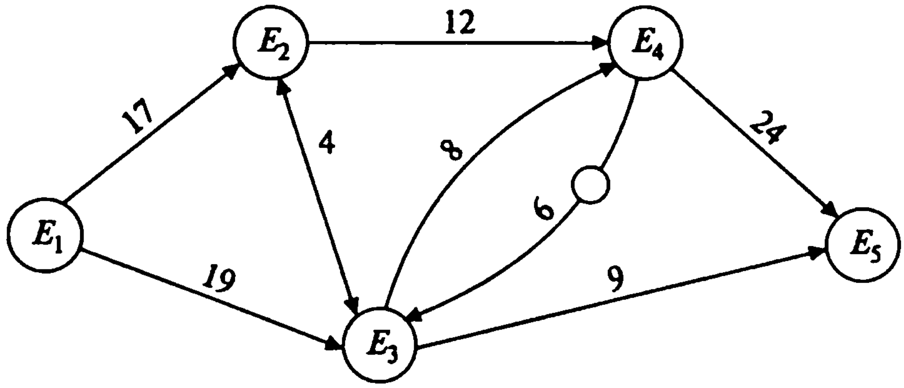


Рис. 9.9

Вызовем программу **net.exe** и в ее меню выполним **M1** по команде **Problem**. В открывшемся подменю выполним **M1** по **Choose Ctr + C**. На экране — диалоговое окно **Problem Dialog** . Отметим в этом окне проблему **Network Flows** (сетевые потоки), выделим цель — **max Flow** и выполним **M1** по **OK**. Активизируем команду **Window** и в открывшемся диалоговом окне выполним **M1** по команде **Graphic** (график) и **OK**. В поле открывшегося окна курсор имеет вид ⊗. Последовательным осуществлением **M1** изобразим вершины сети. С помощью **МП** курсор преобразуется в символы: ✠, ? , +. Символ ✠ — служит для построения дуг, посредством перемещения его от вершины к вершине при помощи **M1**; **?** — для внесения информации; + — для удаления дуг, вершин и числовой информации. В поле окна **net1** занесем вершины графика. Далее, преобразовав курсор в знак вопроса **?**, выполним **M1** по левой вершине сети. На экране — диалоговое окно **Vertex Dialog**. Так как вершина E_1 является источником, сделаем пометку флажком в диалоговом окне, что она терминальная, щелкнув **M1** по **Terminal**, занесем имя вершины E_1 в строку **Name**, в строку **Demand** — число −100 (предложение источника, намного превышающее пропускную способность дуг) и выполним **M1** по **OK**. Аналогично занесем имя E_5 и 100 в правую вершину сети (сток). В остальные вершины занесем их номера и, действуя аналогично, припишем дугам их пропускные способности. Так как дуги (E_3−E_4) и (E_4−E_3) имеют разные пропускные способности, то, чтобы изобразить дугу (E_4−E_3), нанесем на график еще одну вершину без номера и припишем одной из дуг, соединяющих E_4 с E_3 через эту промежуточную вершину, пропускную способность дуги (E_4−E_3) , равную 6.

После ввода данных активизируем команду ключ из меню **net** и кнопку со стрелкой вниз, справа от ключа. На экране — заставка **net** со словами **Succeesfull termination!** (успешное завершение) и кнопкой **OK**. Щелкнув по **OK**, получим на экране графическую сеть с приписанными величинами дуговых потоков рядом с пропускными способностями дуг (рис. 9.10).

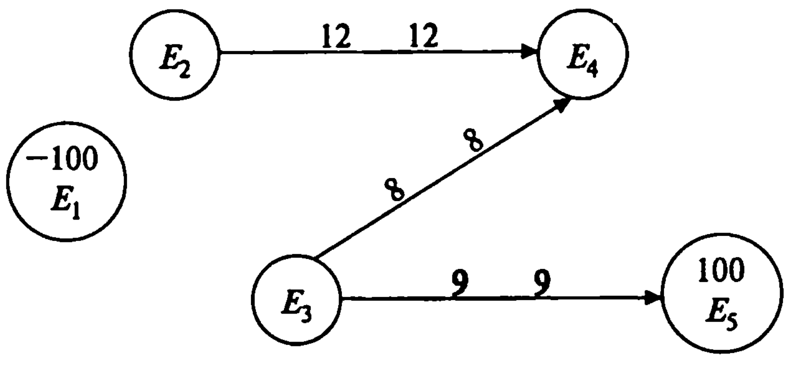


Рис. 9.10

Дуги, принадлежащие разрезу с минимальной пропускной способностью, насыщены потоком полностью: $x_{24} = b_{24} = 12$, $x_{34} = b_{34} = 8$, $x_{35} = b_{35} = 9$. Максимальный поток $v = x_{24} + x_{34} + x_{35} = 12 + 8 + 9 = 29$.

Пример 9.4. Найти поток на сети (рис. 9.11) минимальной стоимости заданной величины $B = 3$ из источника E_1 в сток E_6. Первая цифра, приписанная каждой дуге, означает пропускную способность, а вторая — стоимость доставки единицы потока.

Как и в предыдущем примере, выберем проблему **Network Flows** и в ней выделим цель **Transhipment Problem**. Изобразим на экране ПЭВМ сеть и введем числовую информацию, при этом терминальным вершинам источника E_1 припишем предложение, а стоку E_6 — спрос.

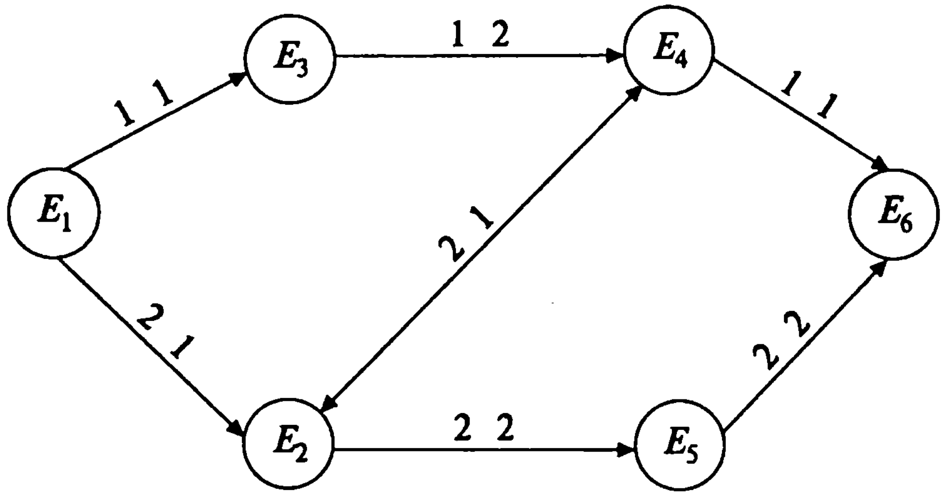


Рис. 9.11

Для занесения информации, приписанной дугам, установим знак ? на дугу и щелкнем **M1**. В открывшемся диалоговом окне **Edit Edge** занесем величину **Capacity** (пропускная способность) и **Cost** (стоимость), удалив при необходимости соответствующие величины, используемые по умолчанию.

Запустив программу на выполнение, получим сеть (рис. 9.12) с приписанной каждой дуге величиной потока x_{ij} (третья цифра) $x_{12} = 2; x_{13} = 1; x_{25} = 2; x_{34} = 1; x_{46} = 1; x_{56} = 2; F_{\min} = 14$.

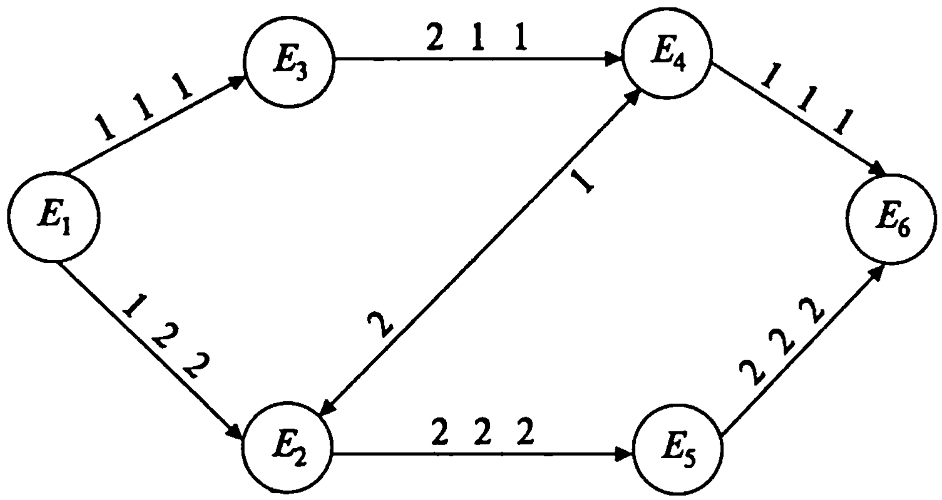


Рис. 9.12

Пример 9.5. Найти кратчайший маршрут на сети (рис. 9.13) из города E_1 в город E_6. Цифры, приписанные дугам, означают расстояние между городами.

В пакете **net.exe** выберем проблему **Shortest Paths** (кратчайший путь) и выделим цель **General case** . Изобразим на экране ПЭВМ сеть и занесем исходную информацию, при этом терминальной вершине E_1 припишем нуль.

После выполнения расчетов (программа находит кратчайшие маршруты до всех вершин сети) получим сеть, в которой возле имени каждой вершины указано расстояние до ее вершины от вершины E_1 (рис. 9.14).

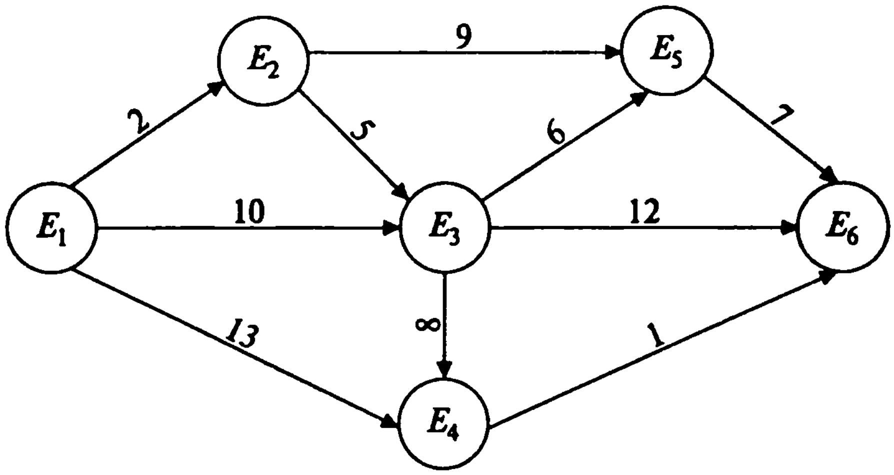


Рис. 9.13

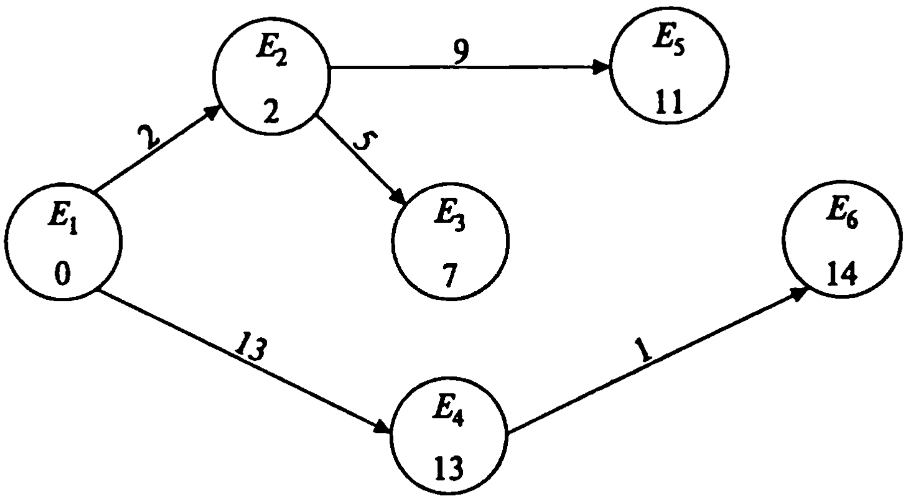


Рис. 9.14.

Пакет **net** позволяет решать задачи с табличным представлением исходной информации. Для этого после выбора проблемы и цели необходимо активизировать команду **Windows** и применить команду **List** вместо команды **Craphic**.

Упражнения

9.1. По условию примера 9.2 найти максимальный поток на сети, представленной на рис. 9.3.

9.2. Найти кратчайшие маршруты на сети (рис. 9.1) из E_1 в E_9 и из E_2 в E_8.

9.3. Найти поток на сети (рис. 9.5) минимальной стоимости из источника E_0 в сток E_5, равный 2 единицам. Стоимости доставки единицы потока (ден. ед.) следующие:

$$c_{01}=15,\ c_{02}=8,\ c_{13}=6,\ c_{14}=14,\ c_{23}=19,\ c_{35}=12,\ c_{45}=7.$$

РАЗДЕЛ IV

Игровые методы в информационных технологиях оптимальных решений

10. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

10.1. ПРЕДМЕТ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

Во многих областях человеческой деятельности (экономической, военной и т.д.) часто встречается проблема принятия управленческих решений в условиях неопределенности. При этом неопределенность может быть связана как с сознательными действиями конкурента, противника и т.п., так и с другими факторами, влияющими на эффективность решения. Ситуации, в которых эффективность принимаемого одной стороной решения зависит от действий другой стороны, называются *конфликтными*. Конфликт не обязательно предполагает наличие антагонистических противоречий сторон, но всегда связан с определенного рода разногласиями.

Конфликтная ситуация будет *антагонистической*, если увеличение выигрыша одной из сторон на некоторую величину приведет к уменьшению выигрыша другой стороны на такую же величину, и наоборот.

Выработкой рекомендаций по рациональному образу действий участников конфликта занимается математическая теория конфликтных ситуаций — *теория игр*. Возникновение теории игр относится к 1944 г., когда вышла в свет монография Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение».

В настоящее время теория игр бурно развивается. В последние годы, помимо теории антагонистических, неантагонистических (кооперативных), конечных, бесконечных, позиционных и дифференциальных игр, начала развиваться теория рефлексивных игр. *Рефлексивные игры* изучают ситуации с учетом мысленного воспроизведения возможного образа действий и поведения противника. *Дифференциальные игры* изучают задачи преследования управляемого объекта другим управляемым объектом с учетом динамики их поведения; поведение объектов описывается дифференциальными уравнениями.

Игра представляет математическую модель реальной конфликтной ситуации, анализ которой ведется по определенным правилам.

В общем случае правилами игры устанавливаются последовательность ходов, объем информации, которой располагает каждая сторона, о поведении другой стороны и результат (исход) игры. Правила определяют также конец игры, когда некоторая возможная последовательность выборов уже сделана и больше ходов делать не разрешается.

В зависимости от числа участников игры подразделяются на парные и множественные. В *парной* игре число участников равно двум, в *множественной* — более двух. Участники множественной игры могут образовывать коалиции (игры в этом случае называются *коалиционными*). Множественная игра обращается в парную, если ее участники образуют две постоянные коалиции.

В данном пособии излагаются основные понятия теории игр и методы их решения на примере конечной парной антагонистической игры, как наиболее простой и теоретически разработанной.

Стороны, участвующие в игре (конфликте), называются *игроками.* В спортивной игре ими могут быть отдельные лица или команды; в военном конфликте — воюющие стороны; в хозяйственной жизни — предприятия, фирмы. Иногда под игроком понимается природа, формирующая условия, в которых необходимо принимать решения.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе игрока в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

В сложных (многоходовых) задачах теории игр понятия «стратегия» и «вариант возможных действий» существенно отличаются друг от друга. В простых (одноходовых) игровых задачах, когда в каждой партии игры игрок может сделать по одному ходу, эти понятия совпадают, а следовательно, совокупность стратегий игрока охватывает все возможные его действия, которые он может предпринять в любой возможной ситуации и при любой возможной фактической информации.

Игра называется *конечной*, если число стратегий игроков конечно, и *бесконечной*, если хотя бы у одного из игроков число стратегий является бесконечным.

Стратегия игрока называется *оптимальной*, если она обеспечивает данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от поведения противника (могут быть использованы и другие показатели оптимальности).

Выбор одной из предусмотренных правилами игры стратегий и ее осуществление называется *ходом.*

Ходы бывают личные и случайные. Ход называется *личным*, если игрок сознательно выбирает один из возможных вариантов действий и осуществляет его (любой ход в шахматной или шашечной игре). Ход называется *случайным*, если выбор производится не игроком, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросание игральной кости или монеты).

Существуют два способа описания игр: позиционный и нормальный. *Позиционный* способ связан с развернутой формой игры и сводится к графу последовательных шагов (дереву игры). *Нормальный* способ заключается в явном представлении совокупности стратегий игроков и платежной функции. *Платежная функция* в игре определяет для каждой совокупности выбранных игроками стратегий выигрыш каждой из сторон. Если в парной игре выигрыш одного игрока равен проигрышу второго, то такую игру принято называть *игрой с нулевой суммой.* В играх с ненулевой суммой выигрыши игроков отличны от нуля.

Парную игру с нулевой суммой удобно исследовать, если она описана в виде так называемой *платежной матрицы* (табл. 10.1). Такую игру называют *матричной.*

В парной игре с ненулевой суммой выигрыш каждого игрока задается своей платежной матрицей. Поэтому такие игры называют *биматричными.*

Рассмотрим конечную игру двух лиц (I и II) с нулевой суммой. Предположим, что игрок I имеет m стратегий (обозначим их 1, 2,...,m), а игрок II (противник) — n стратегий (1, 2,..., n). Такая игра называется *матричной игрой размерности* $m \times n$.

Пусть игрок I выбрал одну из своих возможных стратегий $i(i=\overline{1,m})$, а игрок II, не зная результата выбора игрока I, выбрал стратегию $j(j=\overline{1,n})$. Выигрыш $W_1(i,j)$ игрока I и выигрыш $W_2(i,j)$ игрока II в результате выбора стратегий удовлетворяют соотношению $W_1(i,j)+W_2(i,j)=0$. Отсюда, если положить $W_1(i,j)=a_{ij}$, имеем $W_2(i,j)=-a_{ij}$.

Предположим, что значения a_{ij} нам известны при каждой паре стратегий. Запишем эти значения в виде платежной матрицы (табл. 10.1), строки которой соответствуют стратегиям игрока I, а столбцы — стратегиям игрока II. Каждый положительный элемент a_{ij} матрицы определяет величину выигрыша игрока I и проигрыша игрока II при применении ими соответствующих стратегий. Цель игрока I — максимизировать свой выигрыш, а игрока II — минимизировать свой проигрыш.

Таблица 10.1

I \ II	1	2	...	n
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Пример 10.1. В игре принимают участие игроки I и II. Каждый из игроков может записать, независимо от другого, цифру 1, 2 или 3. Если разность между цифрами, записанными игроками I и II, положительна, то игрок I выигрывает количество очков, равное разности между числами, и наоборот, если разность отрицательна, то выигрывает игрок II. Если же разность между числами равна нулю, то игра заканчивается вничью. Найти платежную матрицу игры.

Игра состоит из трех личных ходов игроков. У игрока I три стратегии: 1-я — записать цифру 1; 2-я — записать цифру 2; 3-я — записать цифру 3. У игрока II (противника) также три стратегии: 1-я — записать цифру 1; 2-я — записать цифру 2; 3-я — записать цифру 3. Выигрыш игроков при применении ими соответствующих стратегий запишем в виде платежной матрицы (табл. 10.2). Покажем, как получены элементы матрицы. Если игрок I применяет 1-ю стратегию, а игрок II — 3-ю стратегию, то игрок I проигрывает два очка. В платежной матрице этот проигрыш записан в клетку (1; 3), находящуюся на пересечении первой строки и третьего столбца. Если игрок I применяет 2-ю стратегию, а противник — 1-ю стратегию, то игрок I выигрывает одно очко. В платежной матрице этот выигрыш записан в клетку (2; 1) с положительным знаком. Аналогично получены остальные элементы таблицы.

Таблица 10.2

I \ II	1	2	3
1	0	−1	−2
2	1	0	−1
3	2	1	0

10.2. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

10.2.1. Принцип минимакса и максимина

Рассмотрим матричную игру размерности $m \times n$ с платежной матрицей, представленной в табл. 10.3. Следует определить: а) наилучшую стратегию игрока I среди стратегий $i(i = \overline{1,m})$; б) наилучшую стратегию игрока II среди стратегий $j(j = \overline{1,n})$.

Таблица 10.3

I \ II	1	...	j	...	n
1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...	...
i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

При определении наилучших стратегий игроков основой рассуждений является принцип, который предполагает, что *противники, участвующие в игре, одинаково разумны, и каждый из них делает все для того, чтобы добиться своей цели*. Используя этот принцип, найдем наилучшую стратегию игрока I, для чего проанализируем последовательно все его стратегии. Выбирая i-ю стратегию игрока I, мы должны рассчитывать, что игрок II ответит на нее той из своих j-х стратегий, для которой выигрыш игрока I будет минимальным. Найдем минимальное число a_{ij} в каждой строке матрицы и, обозначив его $\alpha_i (i = \overline{1,m})$, запишем рядом с платежной матрицей (табл. 10.4) в добавочный столбец:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}, \ i = \overline{1,m}. \qquad (10.1)$$

Зная числа α_i (свои выигрыши при применении i-х стратегий и разумном ответе игрока II), игрок I должен предпочесть другим стратегиям ту, для которой α_i максимально. Обозначим это максимальное значение через α, тогда $\alpha = \max\limits_i \alpha_i$. Подставив вместо α_i правую часть выражения (10.1), получим

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}. \qquad (10.2)$$

Таблица 10.4

I \ II	1	2	...	n	α_i
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	α_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	α_2
...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	...	β_n	

Величина α — гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе игрок I, называется *нижней ценой игры (максимином)*. Стратегия, обеспечивающая получение нижней цены игры α, называется *максиминной стратегией*. Если игрок I будет придерживаться своей максиминной (перестраховочной) стратегии, то ему гарантирован выигрыш не меньший α при любом поведении игрока II.

Игрок II заинтересован уменьшить свой проигрыш или, что то же самое, выигрыш игрока I обратить в минимум. Поэтому для выбора своей наилучшей стратегии он должен найти максимальное значение выигрыша игрока I в каждом из столбцов и среди этих значений выбрать наименьшее. Максимальный элемент в каждом столбце обозначим через β_j. Эти элементы будем записывать в дополнительной строке табл. 10.4.

Наименьшее значение среди β_j обозначим β — это *верхняя цена игры (минимакс)*, которая определяется по формуле

$$\beta = \min_j \max_i \alpha_{ij}. \qquad (10.3)$$

Стратегия игрока II, обеспечивающая «выигрыш» β, является его *минимаксной стратегией*. Если игрок II будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то он в любом случае проиграет не больше β.

Можно показать, что для нижней и верхней цены игры всегда справедливо неравенство

$$\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, \text{ т.е. } \alpha \le \beta.$$

Существуют игры, для которых нижняя цена равна верхней, т.е. $\alpha = \beta$. Такие игры называются *играми с седловой точкой*.

Общее значение нижней и верхней цены игры в играх с седловой точкой называется *чистой ценой игры* γ, а стратегии i^* и j^*, позволяющие достичь этого значения, — *оптимальными чистыми стратегиями*. Пара оптимальных чистых стратегий (i^*, j^*) называется седловой точкой матрицы, так как элемент $a_{i^*j^*} = \gamma$ является одновременно минимальным в i-й строке и максимальным в j-м столбце. Оптимальные стратегии и чистая цена являются решением игры. Оптимальные стратегии обладают важным свойством. Они определяют в игре «положение равновесия», которое заключается в том, что каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной стратегии, так как это ему невыгодно. Чистую цену игры γ в игре с седловой точкой при условии одинаковой разумности партнеров игрок I не может увеличить, а игрок II — уменьшить.

Если игра имеет седловую точку, то говорят, что она решается в *чистых стратегиях*. Вероятность применения чистой стратегии в игре с седловой точкой равна единице.

Пример 10.2. Найти решение игры, платежная матрица которой представлена в табл. 10.2.

Определим значения α_i и β_j и запишем их в табл. 10.5.

Нижняя цена игры: $\alpha = \max\limits_i \alpha_i = \max(-2, -1, 0) = 0$, $\alpha = \alpha_3$.

Верхняя цена игры: $\beta = \min\limits_j \beta_j = \min(2, 1, 0) = 0$, $\beta = \beta_3$.

Таблица 10.5

I \ II	1	2	3	α_i
1	0	−1	−2	−2
2	1	0	−1	−1
3	2	1	0	0
β_j	2	1	0	

Так как $\alpha = \beta = 0$, то матрица игры имеет седловую точку. Чистая цена игры $\gamma = 0$. Оптимальными чистыми стратегиями являются: 3-я стратегия игрока I и 3-я стратегия игрока II.

Легко заметить, что отклонение от оптимальной стратегии игрока I приводит к уменьшению его выигрыша, а одностороннее отклонение игрока II — к увеличению проигрыша.

Платежная матрица игры может иметь более одной седловой точки. Это видно из следующего примера.

Пример 10.3. Найти решение игры, платежная матрица которой представлена в табл. 10.6.

Определяем значения α_i и β_j и записываем результат в таблицу. Находим нижнюю цену игры $\alpha = \max\limits_i \alpha_i = \max(5, 2, 5) = 5$ $(\alpha = \alpha_1 = \alpha_3 = 5)$ и верхнюю цену игры $\beta = \min\limits_j \beta_j =$

$= \min(7,5,8,5) = 5$ ($\beta = \beta_2 = \beta_4 = 5$). Из значений α и β видно, что матрица игры имеет четыре седловые точки с соответствующими парами оптимальных стратегий: (1–2), (1–4), (3–2), (3–4). Чистая цена игры $\gamma = 5$.

Таблица 10.6

I \ II	1	2	3	4	α_i
1	6	5	8	5	5
2	7	3	2	3	2
3	6	5	7	5	5
β_j	7	5	8	5	

10.2.2. Решение игр без седловых точек

Если матрица игры содержит седловую точку, то ее решение находится по принципу минимакса. Возникает вопрос: как найти решение игры, платежная матрица которой не имеет седловой точки? Применение минимаксных стратегий каждым из игроков обеспечивает первому выигрыш не меньше α, а второму проигрыш не больше β. Учитывая, что $\alpha < \beta$, естественно для игрока I желание увеличить выигрыш, а для игрока II — уменьшить проигрыш. Поиск решения приводит к сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более чистых стратегий с определенными частотами. Такая сложная стратегия в теории игр называется *смешанной*. Смешанные стратегии игроков будем обозначать, соответственно, $p_{I} = (p_1, p_2, ..., p_m)$ и $q_{II} = (q_1, q_2, ..., q_n)$, где $p_i \geq 0$, $q_j \geq 0$ — вероятности применения чистых стратегий $i(i = \overline{1,m})$ и $j(j = \overline{1,n})$, при этом $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

В основной теореме теории игр утверждается, что любая конечная игра двух лиц с нулевой суммой имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в смешанных стратегиях. Таким образом, из основной теоремы следует, что каждая конечная игра имеет цену. Обозначим ее так же, как чистую цену игры, через γ. Цена игры γ — средний выигрыш, приходящийся на одну партию, — всегда удовлетворяет условию $\alpha \leq \gamma \leq \beta$, т.е. лежит между нижней ценой игры α и верхней ценой игры β. Следовательно, каждый игрок при многократном повторении игры, придерживаясь смешанных стратегий, получает более выгодный для себя результат. Оптимальное решение игры в смешанных стратегиях, так же как и решение в чистых стратегиях, обладает свойством, которое заключается в том, что каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной смешанной стратегии, если его противник применяет оптимальную смешанную стратегию, так как это ему невыгодно.

Стратегии игроков, входящие в их оптимальные смешанные стратегии, называются *активными*. Рассмотрим теорему об активных стратегиях, имеющую важное значение для решения игр.

Теорема. *Применение оптимальной смешанной стратегии обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш (или минимальный средний проигрыш), равный цене игры γ, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий.*

Предположим, что найдено оптимальное решение игры $m \times n$ в смешанных стратегиях, в котором первые r стратегий ($r \le m$) игрока I и первые s стратегий ($s \le n$) игрока II являются активными (это не нарушает общности, так как стратегии всегда можно перенумеровать таким образом, чтобы первыми были активные), т.е. $p_{\mathrm{I}}^{*} = (p_1, p_2, \ldots, p_r, 0, \ldots, 0)$, $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$; $q_{\mathrm{II}}^{*} = (q_1, q_2, \ldots, q_s, 0, \ldots, 0)$, $\sum_{i=1}^{s} q_j = 1$. Выигрыш, полученный в результате применения этих стратегий, равен цене игры γ. Выигрыш игрока I, если он пользуется оптимальной смешанной стратегией p_{I}^{*}, а игрок II — чистыми стратегиями 1, 2, ... , s, обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$. Из свойства оптимального решения игры следует, что отклонение игрока II от оптимальной стратегии q_{II}^{*} может лишь увеличить его проигрыш.

Следовательно, $\gamma_1 \ge \gamma$, $\gamma_2 \ge \gamma$, ..., $\gamma_s \ge \gamma$.

Выразим теперь цену игры γ при оптимальных смешанных стратегиях p_{I}^{*} и q_{II}^{*} через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$. Так как в оптимальной смешанной стратегии q_{II}^{*} чистые стратегии 1, 2, ..., s применяются с вероятностями $q_1, q_2, \ldots, q_s$, то $\gamma = \gamma_1 q_1 + \gamma_2 q_2 + \ldots$ $\ldots + \gamma_s q_s$, при этом $\sum_{j=1}^{s} q_j = 1$. Сумма $\gamma_1 q_1 + \gamma_2 q_2 + \gamma_s q_s$ есть средневзвешенное значение величин $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$. Но средневзвешенное значение было бы больше γ, если хотя бы один из выигрышей γ_j был больше γ. Следовательно, $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_s = \gamma$.

Перейдем к рассмотрению упрощения игр.

10.2.3. Упрощение игр

Если платежная матрица игры не содержит седловой точки, то задача определения оптимальной смешанной стратегии тем сложнее, чем больше размерность матрицы. Поэтому для игр с платежными матрицами большой размерности отыскание решения можно несколько упростить, если уменьшить их размерность путем вычеркивания дублирующих и заведомо невыгодных стратегий, а также замены некоторых групп чистых стратегий смешанными.

Если в матрице $H = (a_{ij})$ игры все элементы строки (столбца) равны соответствующим элементам другой строки (столбца), то соответствующие строкам (столбцам) стратегии называются дублирующими.

Если в матрице $H = (a_{ij})$ игры все элементы некоторой строки, определяющей i-ю стратегию игрока I, не больше (меньше или равны) соответствующих элементов другой строки, то i-я стратегия называется заведомо невыгодной.

Если в матрице $H = (a_{ij})$ игры все элементы некоторого столбца, определяющего j-ю стратегию игрока II, не меньше (больше или равны) соответствующих элементов другого столбца, то j-я стратегия называется заведомо невыгодной.

Пример 10.4. Найти решение игры, представленной платежной матрицей $H = (a_{ij})$ (табл. 10.7). Так как $\alpha = 3 \neq \beta = 5$, то платежная матрица не имеет седловой точки. Сравнивая почленно элементы 2-й и 3-й строк, видим, что все элементы 2-й строки меньше соответствующих элементов 3-й строки. Следовательно, 2-я стратегия для игрока I заведомо невыгодна, и ее можно исключить. Аналогично, сравнивая элементы 3-й и 4-й строк, исключаем 4-ю стратегию. В результате получаем матрицу (табл. 10.8), в которой 1-я, 2-я и 3-я стратегии игрока II заведомо невыгодны по сравнению с 5-й стратегией, поскольку игрок II стремится уменьшить выигрыш игрока I. Исключая эти стратегии, получаем матрицу 2×2, в которой нет дублирующих и заведомо невыгодных стратегий. Перенумеруем стратегии и запишем платежную матрицу в табл. 10.10.

Таблица 10.7

I / II	1	2	3	4	5
1	8	6	4	5	1
2	5	4	3	2	3
3	6	7	6	3	5
4	3	3	2	1	2

Таблица 10.8

I / II	1	2	3	4	5
1	8	6	4	5	1
3	6	7	6	3	5

Таблица 10.9

II / I	4	5
1	5	1
3	3	5

Таблица 10.10

II / I	1	2
1	5	1
2	3	5

Найдем решение игры. Так как эта игра не имеет седловой точки, то обе стратегии игроков являются активными. Поэтому, в соответствии с теоремой об активных стратегиях, запишем две системы уравнений для нахождения вероятностей применения стратегий игроками:

Для игрока I

$$\begin{cases} 5p_1 + 3p_2 = \gamma, \\ p_1 + 5p_2 = \gamma, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Для игрока II

$$\begin{cases} 5q_1 + q_2 = \gamma, \\ 3q_1 + 5q_2 = \gamma, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases}$$

Решив системы уравнений, имеем: $p_I^*=(1/3;\ 2/3)$, $q_{II}^* = (2/3;\ 1/3)$, $\gamma = 11/3$.

Из приведенного примера видно, что решение игры 2×2 для каждого игрока осуществляется элементарно и сводится к решению системы уравнений. На практике же размерность игр, как правило, больше. Перейдем к рассмотрению общего решения игр $m \times n$, где $m > 2$ и $n > 2$.

10.2.4. Сведение матричной игры к задаче линейной оптимизации

Рассмотрим матричную игру, заданную платежной матрицей размерности $m \times n$ (табл. 10.11).

Таблица 10.11

I \ II	1	2	...	j	...	n
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Будем считать, что все элементы платежной матрицы неотрицательны (если это не так, то можно ко всем элементам матрицы добавить некоторое достаточно большое число L, переводящее платежи в область неотрицательных значений). При этом цена игры увеличится на L, а решение задачи не изменится. Поэтому можно принять, что $\gamma > 0$.

Пусть платежная матрица игры не содержит седловой точки, следовательно, игра решается в смешанных стратегиях:

$$p_{\mathrm{I}}^{*} = (p_1, p_2, \ldots, p_m); \; q_{\mathrm{II}}^{*} = (q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Применение игроком I оптимальной смешанной стратегии $p_{\mathrm{I}}^{*} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ гарантирует ему, независимо от поведения игрока II, выигрыш, не меньший цены игры γ.

Предположим, что игрок II применяет свою активную чистую j-ю стратегию, а игрок I — свою оптимальную стратегию p_{I}^{*}. Тогда средний выигрыш игрока I будет равен $\gamma_j = a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + \ldots + a_{ij} p_i + \ldots + a_{mj} p_m$, $j = \overline{1, n}$.

Учитывая, что γ_j $(j = \overline{1, n})$ не может быть меньше γ, запишем условия:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{i1}p_i + \ldots + a_{m1}p_m \geq \gamma; \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{i2}p_i + \ldots + a_{m2}p_m \geq \gamma; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \ldots + a_{ij}p_i + \ldots + a_{mj}p_m \geq \gamma; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{in}p_i + \ldots + a_{mn}p_m \geq \gamma. \end{cases} \tag{10.4}$$

Разделив левую и правую части каждого из неравенств (10.4) на цену игры $\gamma > 0$, получим

$$a_{1j}\frac{p_1}{\gamma} + a_{2j}\frac{p_2}{\gamma} + \ldots + a_{ij}\frac{p_i}{\gamma} + \ldots + a_{mj}\frac{p_m}{\gamma} \geq 1, j = \overline{1, n}. \tag{10.5}$$

Введем новые обозначения:

$$\frac{p_i}{\gamma} = x_i, i = \overline{1, m}. \tag{10.6}$$

Тогда неравенства (10.5) запишутся в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{i1}x_i + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{i2}x_i + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{ij}x_i + \ldots + a_{mj}x_m \geq 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{1n}x_i + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1. \end{cases} \tag{10.7}$$

где все $x_i \geq 0$, так как $p_i \geq 0, \gamma > 0$.

Из равенства $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$ и в силу выражения (10.6) следует, что переменные x_i удовлетворяют условию

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_i + \ldots + x_m = \frac{1}{\gamma}.$$

Учитывая, что игрок I стремится максимизировать γ, получаем линейную функцию

$$f(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_i + \ldots + x_m \to \min. \qquad (10.8)$$

Следовательно, задача решения игры свелась к следующей задаче линейной оптимизации: найти неотрицательные значения переменных $x_i, i = \overline{1,m}$, минимизирующие линейную функцию (10.8) и удовлетворяющие ограничениям (10.7).

Из решения задачи линейной оптимизации находим цену игры γ и оптимальную стратегию $p_{\text{I}}^* = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ игрока I по формулам

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}; \quad p_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Оптимальную стратегию $q_{\text{II}}^* = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ игрока II находим из выражения

$$q_j = \frac{u_j}{\sum_{j=1}^{n} u_j}, j = \overline{1,n},$$

где u_j — неотрицательные переменные задачи линейной оптимизации:

$$f(u) = u_1 + u_2 + \ldots + u_j + \ldots + u_n \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1j}u_j + a_{1n}u_n \le 1; \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2j}u_j + a_{2n}u_n \le 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mj}u_j + a_{mn}u_n \le 1, \end{cases}$$

которая является двойственной по отношению к задаче, представленной условиями (10.7) и (10.8). Здесь $u_j = \frac{q_j}{\gamma}, \ j = \overline{1,n}.$

Таким образом, оптимальные стратегии $p_I^* = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ и $q_{II}^* = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ игры с платежной матрицей $(a_{ij})_{m \times n}$ могут быть найдены путем решения симметричной пары двойственных задач линейной оптимизации:

Исходная задача	Двойственная задача
$f(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min;$	$f(u) = \sum_{j=1}^{n} u_j \to \max;$
$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1, j = \overline{1,n};$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \leq 1, i = \overline{1,m};$
$x_i \geq 0, i = \overline{1,m}.$	$u_j \geq 0, j = \overline{1,n}.$

При этом

$$\gamma = \frac{1}{f(x)_{\min}} = \frac{1}{f(u)_{\max}};$$

$$p_i = \gamma x_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad q_j = \gamma u_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Пример 10.5. Найти решение и цену игры, платежная матрица которой представлена в табл. 10.12.

Таблица 10.12

I \ II	1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	1
3	1	3	1

Математические модели пары двойственных задач линейной оптимизации выглядят следующим образом:

Исходная задача	Двойственная задача
Найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, минимизирующие функцию	Найти неотрицательные значения u_1, u_2, u_3, максимизирующие функцию
$f(x) = x_1 + x_2 + x_3$	$f(u) = u_1 + u_2 + u_3$
при условиях:	при условиях:
$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1;$	$u_1 + 2u_2 + 3u_3 \leq 1;$
$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 1;$	$3u_1 + u_2 + u_3 \leq 1;$
$3x_1 + x_2 + x_3 \geq 1.$	$u_1 + 3u_2 + u_3 \leq 1.$

Решим вторую задачу симплекс-методом, для чего условия поместим в табл. 10.13 (Б.Н. — базисная неизвестная; Н.Н. — небазисная неизвестная). Проводя последовательные преобразования симплексных таблиц, на третьей итерации получим оптимальное решение (табл. 10.14).

Таблица 10.13

Б.Н. \ Н.Н.	$-u_1$	$-u_2$	$-u_3$	1
v_1	1	2	3	1
v_2	3	1	1	1
v_3	1	3	1	1
$f(u)$	−1	−1	−1	0

Таблица 10.14

Б.Н. \ Н.Н.	$-v_2$	$-v_3$	$-v_1$	1
u_3				1/9
u_1				2/9
u_2				2/9
$f(u)$	2/9	1/9	2/9	5/9

Оптимальное решение задачи линейной оптимизации следующее:

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0;\ u_1 = u_2 = \frac{2}{9};\ u_3 = \frac{1}{9};\ f(u) = \frac{5}{9}.$$

Находим оптимальную смешанную стратегию игрока II и цену игры γ:

$$\gamma = \frac{1}{f(u)} = \frac{1}{5/9} = \frac{9}{5};\ q_1 = \gamma u_1 = \frac{9}{5}\cdot\frac{2}{9} = \frac{2}{5};$$

$$q_2 = \gamma u_2 = \frac{9}{5}\cdot\frac{2}{9} = \frac{2}{5};\ q_3 = \gamma u_3 = \frac{9}{5}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{5}.$$

Итак, $q_{II}^{*} = (q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Оптимальное решение первой задачи найдем, используя двойственные оценки, находящиеся в строке функции $f(u)$ табл. 10.14:

$$x_1 = \frac{2}{9};\ x_2 = \frac{2}{9};\ x_3 = \frac{1}{9};\ f(x) = \frac{5}{9}.$$

Отсюда определяем вероятности применения стратегий игроком I:

$$p_1=\gamma x_1=\frac{9}{5}\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{5};\ p_2=\gamma x_2=\frac{9}{5}\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{5};\ p_3=\gamma x_3=\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{5}.$$

Таким образом, $p_1^*=(p_1, p_2, p_3)=\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$.

10.3. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР С ПРИМЕНЕНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

В параграфе 10.2.4 показано, что любая конечная игра двух лиц с нулевой суммой сводится к решению задачи линейной оптимизации. Используя значение функции и неизвестных взаимно двойственных задач линейной оптимизации, легко найти цену игры и вероятности применения стратегий каждым из игроков с помощью следующих выражений:

$$\gamma=\frac{1}{f(x)_{\min}}=\frac{1}{f(u)_{\max}};\ p_i=\gamma x_i, i=\overline{1,m};\ q_j=\gamma u_j, j=\overline{1,n},$$

где $f(x)_{\min}$ и $f(u)_{\max}$ — оптимальные значения функции в решениях пары двойственных задач, а $x_i\,(i=\overline{1,m})$ и $u_j\,(j=\overline{1,n})$ — значения неизвестных в этих задачах.

Применяя программу **Simplex** или **Линейное программирование** из пакета QSB, можно найти оптимальные решения пары двойственных задач, построенных по платежной матрице игры, и, используя эти решения, найти цену игры и вероятности применения стратегий игроками. Для целей обучения такой подход вполне оправдан, а для практического использования, безусловно, необходимо полностью автоматизировать процесс решения игры, т.е. программно обеспечить построение по матричной игре двойственных задач линейной оптимизации, нахождение цены игры и вероятностей применения стратегий игроками.

Решение матричной игры с применением информационных технологий рассмотрим на примере.

Пример 10.6. Найти решение игры двух лиц с нулевой суммой, представленной платежной матрицей 4×5 (табл. 10.15), где $i(i=\overline{1,4})$ — стратегии игрока I, а $j(j=\overline{1,5})$ — стратегии игрока II. Числа на пересечении строк и столбцов, обозначающих стратегии, — выигрыши игроков.

Проверим, имеет ли игра седловую точку, для чего по табл. 10.15 найдем $\alpha_i=\min\limits_j a_{ij}$ и $\beta_j=\max\limits_i a_{ij}$, т.е. $\alpha=\max(18;\ 19;\ 17;\ 14)=19$; $\beta=\min(23;\ 22;\ 24;\ 25;\ 24)=22$.

Так как $\alpha\neq\beta$ (седловой точки нет), то попытаемся упростить игру. Исключим 3-ю стратегию по отношению к 1-й игрока I, так как $a_{3j}\le a_{1j}$ $(j=\overline{1,5})$, и 5-ю по сравнению со 2-й игрока II, так как $a_{i5}\ge a_{i2}(i=\overline{1,4})$.

Таблица 10.15

I \ II	1	2	3	4	5	α_i
1	23	20	18	21	21	18
2	19	22	24	20	24	19
3	22	19	17	20	21	17
4	14	16	20	25	19	14
β_j	23	22	24	25	24	

В результате получена платежная матрица размером 3×4 (табл. 10.16), в которой номер 4-й стратегии заменен на номер исключенной 3-й стратегии.

Таблица 10.16

I \ II	1	2	3	4
1	23	20	18	21
2	19	22	24	20
3	14	16	20	25

Опуская подробности, сразу запишем пару двойственных задач линейной оптимизации для решения игры:

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 23x_1 + 19x_2 + 14x_3 \geq 1, \\ 20x_1 + 22x_2 + 16x_3 \geq 1, \\ 18x_1 + 24x_2 + 20x_3 \geq 1, \\ 21x_1 + 20x_2 + 25x_3 \geq 1. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 3}).$$

$$F = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 23u_1 + 20u_2 + 18u_3 + 21u_4 \leq 1, \\ 19u_1 + 22u_2 + 24u_3 + 20u_4 \leq 1, \\ 14u_1 + 16u_2 + 20u_3 + 25u_4 \leq 1. \end{cases}$$

$$u_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}).$$

Используя программу **Simplex**, находим решение задач с именем **si 10.** Протокол оптимального решения задач следующий:

```
si 10 ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ      ДАТА 06-09-1999       ВРЕМЯ 14:39:28
   МИНИМУМ В БАЗИС               БАЗИС X: 3            ПЕРЕМЕН.: 3
   ИТЕР. 4 ИЗ БАЗ.               БАЗИС Y: 0            ДОП.П.: 4
  П. ОБРАЩ. 0 ОНБП 0           КРИТ. 0.0482389       ОГРАНИЧЕНИЙ: 4
```

БАЗИС	X.3	X.1	X.2	S.3
ПРЯМАЯ	.0023	.0237	.0222.	0061
ДВ.	.0031	.0191	0	.026

si 10 РЕШЕНИЕ НА МИНИМУМ КРИТ. 0.0482389 ДАТА 06-09-1999
ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ВРЕМЯ 14:39:34

ПЕРЕМЕН.	ТИП	ЗНАЧ.	КРИТ. / К – Т	ВЛИЯНИЕ	ИЗМ. КРИТ.
X.1	БАЗИС	.0237366	1	1	0
X.2	БАЗИС	.0222052	1	1	0
X.3	БАЗИС	.0022971	1	1	0
Y.1	СВОБОДН.	0	0	-.0030628	.0030628
Y.2	СВОБОДН.	0	0	-.0191424	.0191424
Y.3	БАЗИС	.0061256	0	0	0
Y.4	СВОБОДН.	0	0	-.0260337	.0260337

si 10 РЕШЕНИЕ НА МИНИМУМ КРИТ. 0.0482389 ДАТА 06-09-1999
(Двойственная задача) ВРЕМЯ 14:39:35

СТРОКА	ТИП	ДВ. ОЦЕНКА	ПРЧ	РАСХ.	ОСТ.
U.1	ДЕФИЦИТ	.0030628	1	1	0
U.2	ДЕФИЦИТ	.0191424	1	1	0
U.3	ИЗБЫТОЧНЫЙ	0	1	1.006126	-.0061256
U.4	ДЕФИЦИТ	.02600337	1	1	0

Выпишем из протокола решения задач:
— исходной $Z_{\min} = 0{,}0482389$;

$$x_1^* = 0{,}0237; x_2^* = 0{,}0222; x_3^* = 0{,}0023;$$

— двойственной $F_{\max} = 0{,}0482389$;

$$u_1^* = 0{,}0031;\ u_2^* = 0{,}0191;\ u_3^* = 0;\ u_4^* = 0{,}026.$$

По решению двойственных задач найдем решение игры. Цена игры

$$\gamma = \frac{1}{Z_{\min}} = \frac{1}{F_{\max}} = \frac{1}{0{,}0482389} = 20{,}73.$$

Вероятность применения стратегий игроком I:

$$p_1^* = x_1^*\gamma = 0{,}0237 \cdot 20{,}73 = 0{,}49,$$
$$p_2^* = x_2^*\gamma = 0{,}0222 \cdot 20{,}73 = 0{,}46,$$
$$p_3^* = x_3^*\gamma = 0{,}0023 \cdot 20{,}73 = 0{,}05.$$

Вероятность применения стратегий игроком II:

$$q_1^* = u_1^*\gamma = 0{,}0031 \cdot 20{,}73 = 0{,}06,$$
$$q_2^* = u_2^*\gamma = 0{,}0191 \cdot 20{,}73 = 0{,}40,$$
$$q_3^* = u_3^*\gamma = 0 \cdot 20{,}73 = 0,$$
$$q_4^* = u_4^*\gamma = 0{,}026 \cdot 20{,}73 = 0{,}54.$$

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока I:

$$p_{\rm I}^* = (p_1^*; p_2^*; p_3^*) = (0{,}49;\ 0{,}46;\ 0{,}05),$$

и игрока II:

$$q_{\rm II}^* = (q_1^*; q_2^*; q_3^*; q_4^*) = (0{,}06; 0{,}40; 0; 0{,}54)$$

Понимать это решение следует так: если разыгрывается 100 партий игры, то в соответствии с вероятностями применения стратегий игрок I, случайным образом чередуя применение стратегий, должен применить 1-ю стратегию 49 раз, 2-ю — 46 раз, 3-ю — 5 раз. Второй игрок также должен случайным образом чередовать применение своих стратегий и применить 1-ю стратегию 6 раз, 2-ю — 40 раз, 3-ю — 0 раз, 4-ю — 54 раза. В этом случае игрок I за 100 партий игры выиграет 2073 единицы, а игрок II эту величину проиграет.

Упражнения

10.1. Для платежных матриц, представленных ниже, определить наличие седловых точек. При наличии седловых точек найти оптимальное решение.

I \ II	1	2	3	4	5
1	2	3	6	5	7
2	1	2	4	3	4
3	5	4	8	6	9
4	0	3	2	5	1

I \ II	1	2	3	4
1	3	5	6	1
2	5	4	7	6
3	2	6	3	4

10.2. Упростить платежные матрицы игр, представленные в таблицах:

I \ II	1	2	3	4
1	6	1	2	8
2	7	3	4	9
3	4	6	7	10
4	5	2	5	6

I \ II	1	2	3	4
1	5	7	2	6
2	7	4	5	5
3	4	8	4	9
4	2	3	3	4
5	6	9	6	9

10.3. Найти решения игр, представленных платежными матрицами:

I \ II	1	2	3	4
1	4	7	9	5
2	8	4	1	5
3	8	5	3	6

I \ II	1	2	3	4
1	6	4	1	3
2	3	5	9	7
3	6	4	1	3
4	2	3	7	1

10.4. Игроки, независимо друг от друга, записывают целые числа от 3 до 6 включительно. Если первый игрок записал число x, а второй — y, то первый получает xy единиц выигрыша, если $\frac{x}{y} > 1$, и платит $x + y$ единиц, если $\frac{x}{y} < 1$. Если же $\frac{x}{y} = 1$, то игра заканчивается вничью. Необходимо построить платежную матрицу и найти решение игры.

10.5. Предприятие производит два вида скоропортящейся продукции А и Б, которая должна реализовываться в день выпуска. Если же произведенная продукция в день выпуска не реализуется, то она продается на следующий день в два раза дешевле из-за снижения качества. Предыдущий опыт показал, что объемы реализации продукции зависят от состояния погоды. В хорошую погоду реализуется 500 единиц продукции А и 3000 — Б, а в плохую — 2000 единиц продукции А и 600 — Б. Себестоимость и отпускная цена продукции А составляет 0,4 ден. ед. и 0,6 ден. ед. соответственно, а продукции Б — 0,25 ден. ед. и 0,4 ден. ед. Расходы на реализацию всей произведенной за день продукции составляют 100 ден. ед.

Требуется найти оптимальное сочетание производства продукции, т.е. определить ежедневный объем производства продукции каждого вида с целью получения наибольшей прибыли.

Учитывая, что предприятие не располагает данными прогноза погоды и должно определять объемы производства продукции с учетом погодных условий, природу следует рассматривать как противника.

10.6. Две конкурирующие компании участвуют в реконструкции четырех объектов. Прибыль компаний зависит от объема капитальных вложений в объекты и условий инвестирования. Считается, что прибыль (ден. ед.) первой компании равна величине убытка второй и представлена матрицей:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 & 6 \\ -5 & 4 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & -5 \\ 6 & -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Требуется найти оптимальные стратегии компаний, максимизирующие прибыль.

10.7. Сельскохозяйственное предприятие — поставщик скоропортящейся продукции на рынок — имеет три возможных варианта ее реализации: 1-й — подвергать переработке для длительного хранения и последующей реализации; 2-й — отправить до реализации на временное хранение в холодильник; 3-й — сразу реализовать потребителю. Потребитель со своей стороны может: 1) затребовать продукцию в переработанном виде; 2) приобрести ее через некоторый небольшой промежуток времени; 3) приобрести всю продукцию сразу в свежем виде.

Требуется найти оптимальное соотношение поставки продукции потребителю в свежем виде, после непродолжительного времени хранения в холодильнике и после переработки по критерию максимизации прибыли. Прибыль от реализации продукции в зависимости от поведения потребителя представлена в таблице:

Стратегии сельхозпредприятия	Стратегии потребителя		
	1	2	3
1	12	14	16
2	14	10	11
3	12	9	6

11. ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

11.1. ПОНЯТИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

В обычной стратегической игре принимают участие «разумные» и «антагонистические» противники (противоборствующие стороны). В таких играх каждая из сторон предпринимает именно те действия, которые наиболее выгодны ей и менее выгодны противнику. Однако очень часто неопределенность, сопровождающая некоторую операцию, не связана с сознательным противодействием противника, а зависит от некой неизвестной игроку I объективной действительности (природы). Такого рода ситуации принято называть *играми с природой.* Игрок II — природа — в теории игр не является разумным игроком, так как рассматривается как некая незаинтересованная инстанция, которая не выбирает для себя оптимальных стратегий. Возможные состояния природы (ее стратегии) реализуются случайным образом.

Рассмотрим игровую постановку задачи принятия решения в условиях неопределенности. Пусть игроку I необходимо выполнить операцию в недостаточно известной обстановке, относительно состояний которой можно сделать n предположений. Эти предположения $П_1, П_2, \ldots, П_n$ будем рассматривать как стратегии природы. Игрок I в своем распоряжении имеет m возможных стратегий — A_1, $A_2, \ldots, A_m$. Выигрыши a_{ij} игрока I при каждой паре стратегий A_i и $П_j$ предполагаются известными и заданы платежной матрицей (матрицей выигрышей) $A = \| a_{ij} \|$. Задача заключается в определении такой стратегии (чистой или смешанной), которая при ее применении обеспечила бы игроку I наибольший выигрыш.

Рассмотрим пример, который можно интерпретировать и решить в терминах игр с природой.

Пример 11.1. Сельскохозяйственное предприятие имеет три участка земли: влажный A_1, средней влажности A_2 и сухой A_3. Один из этих участков предполагается использовать для выращивания картофеля, а остальные — для посева зеленой массы. Известно, что для получения хорошего урожая картофеля требуется определенное количество влаги в почве в период вегетации. При излишней влажности посаженный картофель на некоторых участках может гнить, а при недостаточном количестве осадков будет плохо развиваться, что приведет к снижению урожайности. Требуется определить, на каком участке сеять картофель, чтобы получить хороший урожай, если известна средняя урожайность картофеля на каждом участке в зависимости от погодных условий. На участке A_1 урожайность составляет 200, 100 и 250 ц с 1 га соответственно при выпадении нормального количества осадков, больше и меньше нормы. Аналогично, на участке A_2 — 230, 120 и 200 ц, а на участке A_3 — 240, 260 и 100 ц.

На данном этапе решения ограничимся построением платежной матрицы. Обозначим через $П_1$, $П_2$, $П_3$ стратегии игрока II — природы, соответствующие количеству осадков меньше нормы, норме и больше нормы. У сельскохозяйственного предприятия (игрока I) также три стратегии: A_1 — сеять картофель на влажном участке; A_2 — сеять на участке средней влажности и A_3 — сеять на сухом участке. Выигрыш сельскохозяйственного предприятия при каждой паре стратегий A_i и $П_j$, $i, j = \overline{1,3}$, задается урожайностью картофеля с 1 га (табл. 11.1).

Таблица 11.1

I \ II	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	250	200	100
A_2	200	230	120
A_3	100	240	260

11.2. АНАЛИЗ МАТРИЦЫ ВЫИГРЫШЕЙ ИГРЫ С ПРИРОДОЙ И ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ РИСКОВ

Анализ матрицы выигрышей игры с природой начинается с выявления и отбрасывания дублирующих и заведомо невыгодных стратегий лица, играющего с природой, по правилам, рассмотренным в подглаве 10.2. Что касается стратегий природы, то ни одну из них отбросить нельзя, так как каждое из состояний природы может наступить случайным образом, независимо от действий игрока I. Ввиду того что природа не противодействует игроку I, может показаться, что игра с природой проще стратегической игры. На самом деле это не так. Противоположность интересов игроков в стратегической игре в некотором смысле как бы снимает неопределенность, чего нельзя сказать об игре с природой. Оперирующей стороне в игре с природой легче в том отношении, что она, скорее всего, выиграет больше, чем в игре против сознательного противника. Однако ей труднее принять обоснованное решение, так как в игре с природой неопределенность ситуации сказывается в гораздо более сильной степени.

После упрощения платежной матрицы игры с природой целесообразно не только оценить выигрыш при той или иной игровой ситуации, но и определить разность между максимально возможным выигрышем при данном состоянии природы и выигрышем, который будет получен при применении стратегии A_i в тех же условиях. Эта разность в теории игр называется *риском.*

Как и ранее, максимальный выигрыш в j-м столбце матрицы выигрышей обозначим через β_j, т.е. $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$ (величина β_j характеризует благоприятность состояния природы). Риск игрока при применении им стратегии A_i в условиях $П_j$ обозначим через r_{ij}. Тогда $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, где $r_{ij} \geq 0$.

Матрица рисков $R = (r_{ij})_{m \times n}$ во многих случаях позволяет более глубоко понять неопределенную ситуацию, чем матрица выигрышей.

Пример 11.2. Произвести пересчет матрицы выигрышей (табл. 11.1) в матрицу рисков. Для удобства матрицу выигрышей перепишем в виде табл. 11.2. Находим значения β_j ($j = \overline{1,3}$):

$$\beta_1 = \max(250, 200, 100) = 250;$$

$$\beta_2 = \max(200, 230, 240) = 240;$$

$$\beta_3 = \max(100, 120, 260) = 260.$$

Рассчитаем элементы матрицы рисков:

$$r_{11}=\beta_1-a_{11}=250-250=0;\quad r_{12}=\beta_2-a_{12}=240-200=40;$$

$$r_{13}=\beta_3-a_{11}=260-100=160;\quad r_{21}=\beta_1-a_{21}=250-200=50 \text{ и т.д.}$$

Окончательно получим матрицу рисков в табл. 11.3.

Таблица 11.2

I \ II	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	250	200	100
A_2	200	230	120
A_3	100	240	260

Таблица 11.3

I \ II	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	0	40	160
A_2	50	10	140
A_3	150	0	0

Элементы матрицы рисков, соответствующие стратегиям A_i в условиях $П_j$, характеризуют общую благоприятность или неблагоприятность для игрока I отдельных состояний природы.

11.3. КРИТЕРИИ ДЛЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ИГРАХ С ПРИРОДОЙ БЕЗ ЭКСПЕРИМЕНТА

Критерий, основанный на известных вероятностях стратегий природы. Иногда неопределенность ситуации удается в некоторой степени ослабить. Это достигается нахождением вероятностей состояний на основе данных статистических наблюдений.

Предположим, что вероятности состояний природы известны:

$$P(П_1)=q_1;\ P(П_2)=q_2\ldots,\ P(П_n)=q_n, \text{ где } \sum_{j=1}^{n} q_j=1.$$

Тогда, обозначив α_i среднее значение (математическое ожидание) выигрыша, которое игрок I стремится максимизировать, имеем

$$\alpha_i=a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+\ldots+a_{in}q_n,\ i=\overline{1,m}.$$

В качестве оптимальной стратегии выбирается та из стратегий $A_i, i=\overline{1,m}$, которая соответствует максимальному среднему значению выигрыша:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right\}. \qquad (11.1)$$

Оптимальную стратегию при известных вероятностях состояний природы можно найти, используя показатель риска. Для этого необходимо определить среднее значение риска:

$$r_i = r_{i1} q_1 + r_{i2} q_2 + \ldots + r_{in} q_n,\; i=\overline{1,m}.$$

В качестве оптимальной стратегии в данном случае выбирается та, которая обеспечивает минимальное среднее значение риска:

$$r = \min_i r_i = \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j \right\}.$$

Покажем, что применение критериев среднего выигрыша и среднего риска для одних и тех же исходных данных приводит к одному и тому же результату. Вычислим показатели α_i и r_i и сложим их:

$$\alpha_i + r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j\;.$$

Учитывая, что $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, получим $\alpha_i + r_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j q_j$. Полученная сумма для данной матрицы есть величина постоянная. Обозначим ее через C:

$$\alpha_i + r_i = C. \qquad (11.2)$$

Из выражения (11.2) видно, что если α_i обращается в максимум, то r_i принимает минимальное значение. Следовательно, оптимальная стратегия, полученная при применении критерия максимизации среднего выигрыша, будет совпадать с оптимальной стратегией, полученной по критерию минимизации среднего риска.

Отметим еще одно важное положение: когда известны вероятности состояний природы $q_1, q_2, \ldots, q_n$, игроку I нет смысла пользоваться смешанными стратегиями. Действительно, если игрок I применит смешанную стратегию $p_A = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, то его средний выигрыш, осредненный по условиям природы и по его стратегиям, будет равен

$$\alpha' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i.$$

Но α' не может быть больше максимальной из осредняемых величин, т.е. $\alpha' \le \max_i \alpha_i$. Отсюда следует, что применение в игре с природой любой смешанной стратегии p_A не может быть выгоднее для игрока I, чем применение оптимальной чистой стратегии.

Пример 11.3. На основе данных примера 11.1 (табл. 11.1) определить оптимальную стратегию, если известны вероятностные характеристики погодных условий: вероятность выпадения осадков меньше нормы $q_1=0,3$; вероятность выпадения осадков в норме $q_2=0,4$; вероятность выпадения осадков больше нормы $q_3=0,3$.

Средние значения выигрышей для каждой из стратегий игрока I: $\alpha_1 = 185$; $\alpha_2 = 188$; $\alpha_3 = 204$. Максимальное среднее значение выигрыша $\alpha = \max_i \alpha_i = \max(185, 188, 204) = 204$. Следовательно, оптимальной стратегией, согласно решению задачи, является стратегия A_3 (сеять картофель на сухом участке).

Читателю предлагается найти решение этой же задачи по критерию риска.

Мы рассмотрели решение игр с природой на основе объективно вычисленных вероятностей состояний природы. Если объективные оценки состояний получить невозможно, то вероятности состояний природы могут быть оценены субъективно на основе:

1) принципа недостаточного основания Лапласа

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = \frac{1}{n}, \tag{11.3}$$

который применяется тогда, когда ни одно состояние природы нельзя предпочесть другому;

2) убывающей арифметической прогрессии

$$q_1 : q_2 : \ldots : q_n = n : (n-1) : \ldots : 1,$$

где

$$q_j = \frac{2(n-j+1)}{n(n+1)}, \quad j = \overline{1,n}; \tag{11.4}$$

этот прием применяется, если можно расположить состояния природы в порядке убывания их правдоподобности (вероятности свершения);

3) получения средних значений вероятностей состояний $q_1, q_2, \ldots, q_n$ с помощью оценок экспертов.

Кроме рассмотренных подходов к решению задач игр с природой, основанных на применении объективно вычисленных или субъективно назначенных вероятностей состояний природы, существуют и иные подходы к нахождению оптимального решения в условиях полной неопределенности, основанные на применении других критериев.

Максиминный критерий Вальда. Это критерий крайнего пессимизма. В соответствии с этим критерием в качестве оптимальной рекомендуется выбирать ту стратегию, которая гарантирует в наихудших условиях максимальный выигрыш, т.е. максиминную стратегию: $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$.

Критерий Сэвиджа (минимаксного риска). Этот критерий, так же как и критерий Вальда, является критерием крайнего пессимизма. Согласно этому критерию, рекомендуется выбирать ту стратегию, при которой в наихудших условиях величина риска принимает наименьшее значение:

$$r = \min_i \max_j r_{ij}. \tag{11.5}$$

Критерий Гурвица. Этот критерий называют *критерием обобщенного максимума* или *пессимизма-оптимизма*. Он имеет вид

$$S = \max_i \{\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij}\}, \text{ где } 0 \le \lambda \le 1.$$

Очевидно, что при $\lambda = 1$ критерий Гурвица превращается в пессимистический критерий Вальда, а при $\lambda = 0$ — в критерий крайнего оптимизма. Коэффициент λ выбирается на основании субъективных соображений (опыта, здравого смысла и т.д.).

Пример 11.4. Найти решение игры, используя принцип недостаточного основания Лапласа. Ожидаемая прибыль (тыс. руб.) при различных стратегиях игрока I (A_i) и состояниях природы (Π_j) задана матрицей выигрышей (табл. 11.4).

Таблица 11.4

I \ II	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
A_1	1	3	1	4
A_2	4	1	3	2
A_3	3	1	3	1
A_4	3	0	2	3

На основании выражения (11.3) имеем $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0{,}25$. Тогда

$$\alpha_1 = (1+3+1+4)\cdot 0{,}25 = 2{,}25;$$

$$\alpha_2 = (4+1+3+2)\cdot 0{,}25 = 2{,}5;$$

$$\alpha_3 = (3+1+3+1)\cdot 0{,}25 = 2;$$

$$\alpha_4 = (3+0+2+3)\cdot 0{,}25 = 2.$$

Максимальное среднее значение выигрыша

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max(2{,}25;\ 2{,}5;\ 2;\ 2) = 2{,}5 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Оптимальной является стратегия A_2, которая при равновероятных состояниях природы обеспечивает получение средней прибыли 2,5 тыс. руб.

Пример 11.5. Найти решение игры с природой, представленной матрицей выигрыша из примера 11.4, если известно, что стратегии природы в порядке убывания их правдоподобности образуют последовательность $П_3$, $П_1$, $П_2$, $П_4$.

Стратегиям $П_3$, $П_1$, $П_2$, $П_4$ поставим в соответствие стратегии $П'_1$, $П'_2$, $П'_3$, $П'_4$ и перепишем матрицу выигрышей (табл. 11.5).

Таблица 11.5

I \ II	$П'_1$	$П'_2$	$П'_3$	$П'_4$	α
A_1	1	1	3	4	1,7
A_2	3	4	1	2	2,8
A_3	3	3	1	1	2,4
A_4	2	3	0	3	2,0

Используя выражение (11.4), при $n = 4$ находим $q_1 = \frac{2}{5}$; $q_2 = \frac{3}{10}$; $q_3 = \frac{1}{5}$; $q_4 = \frac{1}{10}$. Средние выигрыши α_i приведены в последнем столбце табл. 11.5. Из этого столбца видно, что оптимальной стратегией игрока I является стратегия A_2, обеспечивающая среднюю прибыль $\alpha_2 = 2{,}8$ тыс. руб.

Пример 11.6. Руководство универмага заказывает товар вида *А*. Известно, что спрос на данный вид товара лежит в пределах от 6 до 9 единиц. Если заказанного товара окажется недостаточно для удовлетворения спроса, то руководство может срочно заказать и завезти недостающее количество. Если же спрос будет меньше наличного количества товара, то нереализованный товар хранится на складе универмага.

Требуется определить такой объем заказа на товар, при котором дополнительные затраты, связанные с хранением и срочным завозом, были бы минимальными, если расходы на хранение единицы товара составляют 1 млн руб., а по срочному заказу и завозу — 2 млн руб.

В данном примере покупательский спрос выступает в качестве второго игрока, т.е. природы, стратегии которой определяются данными спроса, т.е. $П_1 = 6$ ед.; $П_2 = 7$ ед.; $П_3 = 8$ ед.; $П_4 = 9$ ед. Игроком I является руководство универмага, стратегии которого лежат в тех же пределах. Платежная матрица игры представлена в табл. 11.6.

При расчете элементов матрицы учтены только дополнительные затраты, связанные с хранением и срочным завозом товара. Например, при заказе 8 единиц товара и спросе, равном 7 единицам, расходы по хранению 1 единицы товара составляют 1 млн руб. Если спрос при этом же размере заказа равен 9 единицам, то затраты на срочную доставку 1 единицы товара составят 2 млн руб.

Найдем решение игры по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица при $\lambda = 0{,}2$.

1. *Критерий Вальда.* Вычислим элементы $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$, $i = \overline{1,4}$, и запишем их в дополнительный столбец табл. 11.6.

Таблица 11.6

I \ II	$П_1 = 6$	$П_2 = 7$	$П_3 = 8$	$П_4 = 9$	α_i
$A_1 = 6$	0	−2	−4	−6	−6
$A_2 = 7$	−1	0	−2	−4	−4
$A_3 = 8$	−2	−1	0	−2	−2
$A_4 = 9$	−3	−2	−1	0	−3

Максимальная из величин α_i совпадает с $\alpha_3 = -2$, следовательно, оптимальной является стратегия A_3, т.е. необходимо заказывать по 8 единиц товара.

2. *Критерий Сэвиджа.* Пересчитаем матрицу выигрышей в матрицу рисков и поместим в правом добавочном столбце значения максимального риска r_i (табл. 11.7).

Таблица 11.7

I \ II	$П_1 = 6$	$П_2 = 7$	$П_3 = 8$	$П_4 = 9$	r_i
$A_1 = 6$	0	2	4	6	6
$A_2 = 7$	1	0	2	4	4
$A_3 = 8$	2	1	0	2	2
$A_4 = 9$	3	2	1	0	3

В соответствии с выражением (11.5) находим минимальную из величин r_i, которая равна 2. Следовательно, по критерию Сэвиджа оптимальной является также стратегия A_3.

3. *Критерий Гурвица.* В добавочных столбцах матрицы (табл. 11.8) запишем оценки:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij};\quad w_i = \max_j a_{ij};\quad h_i = \lambda\alpha_i + (1-\lambda)w_i.$$

Таблица 11.8

I \ II	$П_1 = 6$	$П_2 = 7$	$П_3 = 8$	$П_4 = 9$	α_i	w_i	h_i
$A_1 = 6$	0	−2	−4	−6	−6	0	−1,2
$A_2 = 7$	−1	0	−2	−4	−4	0	−0,8
$A_3 = 8$	−2	−1	0	−2	−2	0	−0,4
$A_4 = 9$	−3	−2	−1	0	−3	0	−0,6

Наибольшим из всех значений h_i является $h_3 = -0{,}4$, соответствующее стратегии A_3. Следовательно, руководство универмага имеет все основания заказывать по 8 единиц товара, так как все три критерия говорят в пользу стратегии A_3.

Легко заметить, что по критерию Гурвица при любых значениях $0 < \lambda \le 1$ оптимальной является стратегия A_3. Лишь при $\lambda = 0$ (крайнем оптимизме) все стратегии равнозначны.

11.4. ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТЬ ЭКСПЕРИМЕНТА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Предположим, что для выяснения условий природы, в которых будет выполняться операция, можно провести эксперимент, однако это требует затрат средств. Следует определить: нужно проводить эксперимент или лучше от него воздержаться?

С экономической точки зрения эксперимент целесообразно проводить в том случае, если затраты на его проведение не превышают выигрыша, который можно получить при более точном знании стратегии природы. Рассмотрим решение проблемы, основанное на известных вероятностях состояний природы, которое гарантирует при многократном повторении игры в сходных условиях получение максимального в среднем выигрыша.

Пусть известны матрица выигрышей $\| a_{ij} \|$, $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ игры с природой и вероятности $q_1, q_2, \ldots, q_n$ различных состояний природы $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$. Известны также затраты на проведение эксперимента, которые составляют C руб.

Рассмотрим случай идеального эксперимента, проведение которого позволяет точно определить состояние природы Π_j.

Если эксперимент не проводится, то средний выигрыш игрока I определяется в соответствии с выражением (11.1):

$$\alpha = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right\}.$$

Полагаем теперь, что эксперимент проведен и выяснено действительное состояние природы. Если этим состоянием оказалось Π_1, то выигрыш первого игрока $\beta_1 = \max\limits_i a_{i1}$; если Π_2, то выигрыш $\beta_2 = \max\limits_i a_{i2}$ и т.д., наконец, при действительном состоянии природы Π_n выигрыш игрока $\beta_n = \max\limits_i a_{in}$. Однако на самом деле истинное состояние природы неизвестно, и требуется определить целесообразность проведения эксперимента. Поэтому гипотетический средний выигрыш β игрока I найдем из выражения $\beta = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j q_j$.

Эксперимент нужно проводить, если $c < \beta - \alpha$, т.е.

$$C < \sum_{j=1}^{n} \beta_j q_j - \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right\}. \qquad (11.6)$$

Так как уменьшаемое в соотношении (11.6) есть величина постоянная, то это соотношение можно записать в виде

$$C < \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j (\beta_j - a_{ij}) \right\}.$$

Учитывая, что $\beta_j - a_{ij} = r_{ij}$, окончательно имеем

$$C < \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij} \right\} = \min_i r_i. \qquad (11.7)$$

Таким образом, если затраты на осуществление эксперимента меньше минимального среднего риска, то его следует проводить. Если же условие (11.7) не выполняется, то эксперимент проводить нецелесообразно. В качестве оптимальной стратегии в этом случае следует выбирать ту, для которой средний риск минимален.

Пример 11.7. Матрица выигрышей игры с природой (в млрд руб.) приведена в табл. 11.9. Вероятности состояний природы $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ известны и равны соответственно: $q_1 = 0{,}2; q_2 = 0{,}1;$ $q_3 = 0{,}2;$ $q_4 = 0{,}5$. Стоимость намечаемого к выполнению эксперимента для выяснения условий, в которых будет осуществляться операция, составляет 1,5 млрд руб. Необходимо определить целесообразность проведения эксперимента в предположении, что он позволит точно определить состояние природы $П_j$, при котором будет осуществляться операция.

Таблица 11.9

I \ II	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	3	0	2	6
A_2	2	1	0	4
A_3	0	3	1	5

Расчеты целесообразности проведения эксперимента осуществляем исходя из среднего выигрыша (читателю предлагается произвести расчет исходя из среднего риска). В соответствии с выражением (11.1) находим средний выигрыш игрока I:

$$\alpha = \left\{ \max_i \sum_{j=1}^{4} \alpha_{ij} q_j \right\} = \max(4;\ 2{,}5;\ 3) = 4.$$

Гипотетический средний выигрыш

$$\beta = \sum_{j=1}^{4} \beta_j q_j = 3 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}5 = 4{,}3.$$

Так как условие (11.6) не выполняется: $C = 1{,}5$, $\beta - \alpha = 4{,}3 - 4{,}0 = 0{,}3$, то эксперимент проводить нецелесообразно.

11.5. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ EXCEL В ИГРАХ С ПРИРОДОЙ

Рассмотрим применение информационных технологий Excel для нахождения оптимальных стратегий в играх с природой на следующем примере.

Пример 11.8. Торговое предприятие планирует продажу сезонных товаров с учетом возможных вариантов поведения покупательского спроса ($П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$). Предприятием разработаны три хозяйственные стратегии продажи товаров (A_1, A_2, A_3). Требуется найти оптимальное поведение торгового предприятия, пользуясь критериями Сэвиджа и Гурвица при $\lambda = 0{,}6$, если товарооборот, зависящий от стратегий предприятия и покупательского спроса, представлен в виде платежной матрицы:

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	40	20	30	35
A_2	60	80	20	35
A_3	35	45	50	70

Начнем решение с критерия Гурвица, для чего разместим исходные данные примера в диапазоне ячеек A2:E6 (табл. 11.10 на рис. 11.1). Параметр $\lambda = 0{,}6$ занесем в ячейку A8, а $(1 - \lambda) = 0{,}4$ — в ячейку B8. Справа от исходных данных в ячейку F4 занесем формулу $\lambda \cdot \min_j(a_{1j})$, которая с учетом размещения исходных данных в электронной таблице имеет вид: =МИН(B4:E4)*A$8. Выделив содержимое этой ячейки и протянув курсор при нажатой кнопке M1, установленный на черном квадратике в правом нижнем углу ячейки, занесем аналогично формулу в ячейки F5 и F6. В ячейку G4 занесем формулу $(1 - \lambda)\max_j(a_{1j})$, которая в Excel имеет вид: = МАКС(B4:E4)*B$8, и тем же приемом занесем соответствующие формулы в ячейки G5 и G6·

В ячейках H4:H6 найдем суммы $S_i = \lambda \min_j a_{ij} + (1 - \lambda) \cdot \max_j a_{ij}$, а в ячейке H7 — наибольшую из этих сумм (max(H4:H6)), которая определяет выигрыш торгового предприятия и его оптимальную стратегию. Оптимальная стратегия A_i определяется логическим выражением, занесенным в ячейку H8.

Чтобы найти оптимальную стратегию по критерию Сэвиджа, рассчитаем элементы матрицы рисков, для чего найдем сначала максимальный элемент $\beta_j (j = \overline{1,4})$ в каждом столбце матрицы выигрышей (табл. 11.11 на рис. 11.1), а потом вычтем из этого элемента элементы соответствующего столбца той же матрицы и разместим разности в табл. 11.12 (в табл.11.12 занесены формулы, определяющие элементы матрицы рисков) (рис. 11.1).

Чтобы занести формулы во все ячейки табл. 11.12 (рис. 11.1), достаточно занести формулу =B$16-B13 в ячейку B22, выделить ее и, нажав над черным квадратиком M1, протянуть курсор до ячейки E22, а потом до ячейки E24. В ячейки F22:F24 занесем формулы для

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								Таблица 11.10
2	Стратегии торгового предприятия	Стратегии покупательского спроса				$\lambda \min\limits_j a_{ij}$	$(1-\lambda) \max\limits_j a_{ij}$	S_i
3		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$			
4	A_1	40	20	30	35	=МИН(B4:E4)*A$8	=МАКС(B4:E4)*B$8	=СУММ(F4:G4)
5	A_2	60	80	20	40	=МИН(B5:E5)*A$8	=МАКС(B5:E5)*B$8	=СУММ(F5:G5)
6	A_3	35	45	50	70	=МИН(B6:E6)*A$8	=МАКС(B6:E6)*B$8	=СУММ(F6:G6)
7						Выигрыш торгового предприятия —	=МАКС(H4:H6)	
8	0,6	0,4				Оптимальная стратегия —		=ЕСЛИ (И(H4>H5;H4>H6); A4;ЕСЛИ(И(H5>H4;H5>H6); A5;A6))
9								
10					Таблица 11.11			
11	Стратегии торг. предприятия	Стратегии покупательского спроса						
12		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$			
13	A_1	40	20	30	35			
14	A_2	60	80	20	40			
15	A_3	35	45	50	70			
16	β_j	=МАКС(B13:B15)	=МАКС(C13:C15)	=МАКС(D13:D15)	=МАКС(E13:E15)			
17								
18								
19						Таблица 11.12		
20	Стратегии торг. предприятия	Стратегии покупательского спроса				r_i		
21		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$			
22	A_1	=B$16-B13	=C$16-C13	=D$16-D13	=E$16-E13	=МАКС(B22:E22)		
23	A_2	=B$16-B14	=C$16-C14	=D$16-D14	=E$16-E14	=МАКС(B23:E23)		
24	A_3	=B$16-B15	=C$16-C15	=D$16-D15	=E$16-E15	=МАКС(B24:E24)		
25					Риск торгового предприятия r =	=МИН(F22:F24)		
26					Оптимальная стратегия —	=ЕСЛИ(И(F22<F23;F22<F24);A22; ЕСЛИ(И(F23<F22;F23<F24);A23;A24))		

Рис. 11.1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								Таблица 11.10
2	Стратегии торгового предприятия	Стратегии покупательского спроса				$\lambda \cdot \min\limits_j a_{ij}$	$(1-\lambda)\max\limits_j a_{ij}$	S_i
3		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$			
4	A_1	40	20	30	35	12	16	28
5	A_2	60	80	20	40	12	32	44
6	A_3	35	45	50	70	21	28	49
7						Выигрыш торгового предприятия —	=МАКС(H4:H6)	49
8	0,6	0,4				Оптимальная стратегия —		A3
9								
10					Таблица 11.11			
11	Стратегии торг. предприятия	Стратегии покупательского спроса						
12		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$			
13	A_1	40	20	30	35			
14	A_2	60	80	20	40			
15	A_3	35	45	50	70			
16	β_j	=МАКС(B13:B15)	=МАКС(C13:C15)	=МАКС(D13:D15)	=МАКС(E13:E15)			
17								
18								
19						Таблица 11.12		
20	Стратегии торг. предприятия	Стратегии покупательского спроса				r_i		
21		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$			
22	A_1	=B$16-B13	=C$16-C13	=D$16-D13	=E$16-E13	60		
23	A_2	=B$16-B14	=C$16-C14	=D$16-D14	=E$16-E14	30		
24	A_3	=B$16-B15	=C$16-C15	=D$16-D15	=E$16-E15	35		
25					Риск торгового предприятия r =	30		
26					Оптимальная стратегия —	A2		

Рис. 11.2

нахождения $r_i = \max_j r_{ij}$, а в ячейку F25 — формулу, определяющую минимальный риск $r = \min_i r_i$. В ячейку F26 помещено логическое выражение для определения оптимальной стратегии A_i.

Сняв флажок **Формулы** в диалоговом окне **Параметры**, вызываемом командой **Сервис** главного меню, в тех же таблицах (рис. 11.2) получим числовые значения искомых параметров: по критерию Гурвица — максимальный выигрыш торгового предприятия, равный 49, и оптимальную стратегию А3 (ячейки Н7 и Н8 табл. 11.10 на рис. 11.2); по критерию Сэвиджа — минимальный риск, равный 30, и оптимальную стратегию А2 (ячейки F25 и F26 табл. 11.12 на рис. 11.2).

Читателю предлагается найти оптимальную стратегию торгового предприятия по критерию Вальда.

Упражнения

11.1. Объединение «Станкоэкспорт» ведет переговоры с одной из зарубежных фирм о продаже станков. Объединение в ходе переговоров стремится повысить эффективность заключаемого соглашения и для достижения цели может воспользоваться четырьмя возможными стратегиями (A_1, A_2, A_3, A_4). Фирма имеет возможность применить три стратегии ($П_1$, $П_2$, $П_3$), позволяющие снизить эффективность соглашения для объединения. Прибыль объединения (тыс. ден. ед.) при возможных его стратегиях поведения $A_i (i = \overline{1,4})$ и стратегиях фирмы $П_j (j = \overline{1,3})$ представлена в таблице. Найти оптимальную стратегию объединения, пользуясь критериями Вальда и Сэвиджа.

I \ II	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	100	120	150
A_2	140	110	120
A_3	90	100	120
A_4	160	100	130

11.2. Сельскохозяйственное предприятие планирует выращивать капусту на одном из участков земли. На урожайность капусты влияют погодные условия и количество внесенных удобрений. Лето может быть сухое — $П_1$, нормальное (со средним количеством осадков) — $П_2$ и влажное — $П_3$. Сельскохозяйственное предприятие может внести на 1 га количество удобрений, соответствующее норме A_1, больше нормы — A_2 и меньше нормы — A_3. Требуется определить, какое количество удобрений внести на 1 га посева, чтобы получить наибольшую прибыль при самых неблагоприятных погодных условиях. Предприятие рассчитало прибыль в зависимости от погодных условий и возможных своих стратегий по внесению удобрений. Все данные расчетов (тыс. ден. ед.) приведены в таблице.

I \ II	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	45	50	30
A_2	25	52	43
A_3	32	40	27

11.3. Необходимо определить, какую электростанцию построить в одном из районов страны, чтобы эффективность использования капиталовложений была наибольшей при самых неблагоприятных условиях. Планирующий орган имеет три стратегии использования капиталовложений: A_1 — вложить средства в гидроэлектростанцию, A_2 — в тепловую, A_3 — в атомную. Случайные факторы, влияющие на экономическую эффективность применяемых плановым органом стратегий, можно рассматривать как состояния природы ($П_1$, $П_2$), где $П_1$ — благоприятное состояние, а $П_2$ — неблагоприятное. Экономический эффект (млн ден.ед.) трех стратегий планового органа оценен с учетом затрат на строительство и издержек в процессе эксплуатации, зависящих от состояний природы, и представлен в таблице.

I \ II	$П_1$	$П_2$
A_1	7,0	3,5
A_2	5,0	6,0
A_3	4,3	4,0

11.4. Оперирующей стороной принято решение о строительстве крупного завода по производству автомобилей по лицензии одной из зарубежных фирм. Предварительный анализ проектов показал, что наиболее предпочтительными для закупки лицензий являются три фирмы, поэтому стратегиями оперирующей стороны являются: A_1 — закупить лицензию первой фирмы, A_2 — второй и A_3 — третьей фирмы. Технико-экономические параметры автомобилей (грузоподъемность, комфортабельность, экономичность двигателя, скорость и др.) этих трех фирм существенно между собой не различаются, однако параметры соответствия выпускаемого автомобиля перспективному техническому уровню каждой из фирм значительно отличаются, что влияет на экономическую эффективность приобретения лицензии. Можно выделить два состояния: $П_1$ — выпуск автомобиля по купленной лицензии будет рентабельным и соответствовать техническому уровню через 10 лет, $П_2$ — через 15 лет. Значение экономического эффекта закупки лицензии в зависимости от состояний $П_1$ и $П_2$ приведено в таблице.

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$
A_1	45	54
A_2	39	50
A_3	34	42

Требуется выбрать такую лицензию, чтобы экономический эффект (млн ден.ед.) в худших условиях был максимальным. Решить задачу по критерию Вальда и Сэвиджа.

РАЗДЕЛ V

Методы нелинейной, стохастической и векторной оптимизации в информационных технологиях управления

12. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

12.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЕЕ РЕШЕНИЯ

При решении многих экономических и других задач наиболее полный и точный учет зависимостей между факторами и показателями, влияющими на критерий эффективности и ограничительные условия, приводит к построению нелинейных экономико-математических моделей. Например, при формировании оптимальной производственной программы предприятия по критерию затрат учитывается себестоимость единицы продукции, которая уменьшается при увеличении объема выпускаемой продукции и приводит к нелинейному критерию эффективности. Аналогично нелинейные зависимости между показателями и факторами получаются в ограничениях задачи при более точном учете норм расхода ресурсов на единицу производимой продукции.

Так, пусть предприятие может выпускать два вида продукции. На ее изготовление расходуются ресурсы i-го вида ($i = \overline{1,3}$). С учетом брака расход ресурсов на единицу производимой продукции j-го вида ($j = \overline{1,2}$) определяется выражением $a_{ij} + k_{ij} x_j$, а прибыль в зависимости от объемов производства равна $p_j + l_j x_j$, где x_j — искомый объем производства продукции j-го вида; a_{ij} — норма расхода i-го ресурса на производство единицы продукции j-го вида; k_{ij} — коэффициент изменения расхода соответствующего ресурса с учетом выпуска бракованных изделий; p_j — прибыль от единицы продукции j-го вида; l_j — коэффициент изменения прибыли, влияющий на объем производства продукции j-го вида. Требуется найти такие объемы производства продукции, при которых прибыль была бы максимальной.

Составим математическую модель задачи с учетом значений параметров, приведенных в табл. 12.1, по критерию максимума прибыли.

Таблица 12.1

Ресурс (i)	Запас ресурса	Норма расхода ресурсов (a_{ij}) на продукцию вида (j)		Коэффициент изменения норм расхода ресурсов (k_{ij}) на продукцию вида (j)	
		1	2	1	2
1	1350	15	18	0,1	0,05
2	1400	12	16	0,2	0,2
3	1580	17	14	0,1	0,15
Прибыль (ден. ед.)		100	120		
Коэффициент изменения прибыли		−0,08	−0,1		

Целевая функция имеет вид

$$f(x_1, x_2) = (100 - 0{,}08x_1)x_1 + (120 - 0{,}1x_2)x_2 \to \max,$$

или

$$f(x_1, x_2) = 100x_1 - 0{,}08x_1^2 + 120x_2 - 0{,}1x_2^2 \to \max.$$

Максимум этой функции находится при ограничениях

$$\begin{cases} (15 + 0{,}1x_1)x_1 + (18 + 0{,}05x_2)x_2 \le 1\,350, \\ (12 + 0{,}2x_1)x_1 + (16 + 0{,}2x_2)x_2 \le 1\,400, \\ (17 + 0{,}1x_1)x_1 + (14 + 0{,}15x_2)x_2 \le 1\,580, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 15x_1 + 0{,}1x_1^2 + 18x_2 + 0{,}05x_2^2 \le 1\,350, \\ 12x_1 + 0{,}2x_1^2 + 16x_2 + 0{,}2x_2^2 \le 1\,400, \\ 17x_1 + 0{,}1x_1^2 + 14x_2 + 0{,}15x_2^2 \le 1\,580, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

В рассмотренном примере и функция, и ограничения являются нелинейными, так как содержат неизвестные во второй степени.

Задача нелинейного программирования в общем виде состоит в отыскании такого вектора неизвестных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который обращал бы в максимум (минимум) функцию

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{12.1}$$

и удовлетворял системе ограничений

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i, \quad i = \overline{1, m_1}, \\ \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}. \end{cases} \tag{12.2}$$

На некоторые или все переменные налагается условие неотрицательности.

В отличие от задач линейной оптимизации, для задач нелинейного программирования общего метода, позволяющего решать любые оптимизационные задачи, нет. Это обусловлено тем, что в задачах нелинейного программирования область допустимых решений может быть невыпуклой, иметь бесконечное число крайних точек, состоять из нескольких частей, а целевая функция может достигать экстремума не только на границе, но и внутри области допустимых решений системы ограничений. Кроме того, нелинейная целевая функция может иметь несколько локальных экстремумов, среди которых необходимо найти глобальный. Вместе с тем некоторые типы задач нелинейного программирования достаточно хорошо изучены. К ним можно отнести классические задачи оптимизации, т.е. такие, у которых отсутствуют ограничения-неравенства, условия неотрицательности или дискретности неизвестных, целевая функция и функции в ограничениях задачи непрерывны, имеют частные производные по крайней мере второго порядка, и $m < n$.

Математическая модель классической задачи оптимизации имеет вид:

Найти максимум (минимум) функции

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{12.3}$$

при ограничениях

$$\varphi_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i, \ i = \overline{1,m}. \tag{12.4}$$

Классическая задача оптимизации решается методом множителей Лагранжа.

Функция Лагранжа для задачи (12.3)—(12.4) имеет вид

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{12.5}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — множители Лагранжа.

Функцию Лагранжа можно построить для любой задачи нелинейного программирования. Смысл множителей Лагранжа такой же, как и двойственных оценок в задачах линейной оптимизации, т.е. λ_i ($i = \overline{1,m}$) показывают, на сколько изменится значение функции в оптимальном решении при изменении правой части i-го ограничения на единицу.

Кроме классических задач оптимизации, как частный вид задачи выпуклого программирования рассматривается задача квадратичного программирования (постановка задачи выпуклого программирования представлена ниже).

Целевая функция задачи квадратичного программирования представляет собой сумму линейной и квадратичной функций и имеет вид

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + d_{11}x_1^2 + 2d_{12}x_1x_2 + \ldots + 2d_{1n}x_1x_n +$$

$$+ d_{22}x_2^2 + 2d_{23}x_2x_3 + \ldots + 2d_{2n}x_2x_n + d_{33}x_3^2 + \ldots + 2d_{3n}x_3x_n + \ldots + d_{nn}x_n^2.$$

Квадратичная функция n переменных называется квадратичной формой и может быть представлена в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j = X' DX,$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix}$.

Предполагается, что матрица D является симметричной. В этой матрице $d_{ij} = d_{ji}$.

В матричной форме задача квадратичного программирования запишется так:

$$f = CX + X' DX \to \min, \tag{12.6}$$

$$AX \le B,. X \ge 0. \tag{12.7}$$

Здесь $A = \| a_{ij} \|_{m \times n}$ — матрица из коэффициентов при неизвестных системы ограничений, $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ и $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ — известные параметры — коэффициенты при неизвестных в выражении функции и правые части системы ограничений.

Отметим, что ОДР линейной системы ограничений (12.7) является выпуклым множеством.

Функция (12.6) представляет собой сумму линейной функции CX (являющейся и выпуклой и вогнутой) и квадратичной формы $X'DX$. Если квадратичная форма $X'DX$ является выпуклой (вогнутой), то отыскание минимума (максимума) целевой функции может быть успешно осуществлено. В теории нелинейного программирования доказано: если ОДР является выпуклой, а целевая функция — вогнутой, то любой локальный максимум является глобальным. Если же целевая функция выпуклая, то любой локальный минимум — глобальный.

Напомним, что функция $f(x)$, заданная на выпуклом множестве, называется *выпуклой*, если для любых точек $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ из этого множества и любого $0 \le \lambda \le 1$ выполняется соотношение

$$f(\lambda X^{(1)} + (1 - \lambda) X^{(2)}) \le \lambda f(X^{(1)}) + (1 - \lambda) f(X^{(2)}). \tag{12.8}$$

Если же для тех же точек и $0 \le \lambda \le 1$ выполняется

$$f(\lambda X^{(1)} + (1 - \lambda) X^{(2)}) \ge \lambda f(X^{(1)}) + (1 - \lambda) f(X^{(2)}), \tag{12.9}$$

то $f(x)$ называется *вогнутой*.

Если в выражениях (12.8) и (12.9) при $0 < \lambda < 1$ и любых допустимых $X^{(1)}$ и $X^{(2)}, X^{(1)} \neq X^{(2)}$, имеет место строгое неравенство, то $f(x)$ будет соответственно *строго выпуклой* (*строго вогнутой*).

Например, для функции одной переменной выпуклость означает, что отрезок, соединяющий любые две точки графика функции, лежит над графиком, вогнутость — что такой отрезок лежит под графиком функции.

Выпуклость или вогнутость квадратичной формы зависит от того, является ли она положительно определенной, положительно полуопределенной, отрицательно определенной, отрицательно полуопределенной или неопределенной.

Квадратичная форма $X'DX$ называется *отрицательно определенной*, если $X'DX < 0$ для всех X, кроме $X = 0$.

Квадратичная форма $X'DX$ называется *отрицательно полуопределенной*, если $X'DX \leq 0$ для всех X и существует $X \neq 0$, для которого $X'\,DX = 0$.

Если квадратичная форма $-X'DX$ является отрицательно определенной (отрицательно полуопределенной), то квадратичная форма $X'\,DX$ является *положительно определенной* (*положительно полуопределенной*).

Если квадратичная форма $X'DX$ положительна для одних значений X и отрицательна для других значений X, то она называется *неопределенной.*

Известно, что квадратичная форма $X'DX$ положительно определенная тогда и только тогда, если все главные миноры матрицы D

$$|d_{11}|, \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nn} \end{vmatrix},$$

положительны.

Если знаки главных миноров чередуются, то квадратичная форма отрицательно определенная.

Если ранг матрицы D меньше числа неизвестных ($r < n$), то квадратичная форма будет положительно полуопределенной, если первые r миноров ее положительны, а остальные равны нулю — возможна перестановка одноименных строк и столбцов.

Если ранг матрицы D меньше числа неизвестных ($r < n$) и в первых r минорах знаки чередуются, а остальные миноры равны нулю, то квадратичная форма является отрицательно полуопределенной.

Если нет чередования знаков главных миноров, при этом среди них имеются отрицательные, то квадратичная форма является неопределенной.

Положительно (отрицательно) полуопределенная квадратичная форма является выпуклой (вогнутой), а положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма является строго выпуклой (вогнутой).

При рассмотрении методов решения задач квадратичного программирования будем предполагать, что матрица D является симметричной и положительно (отрицательно) полуопределенной, так как в этом случае функция (12.6) будет выпуклой (вогнутой). Для квадратичных форм с произвольной симметричной матрицей D пока не существует эффективного метода решения.

К задачам выпуклого программирования относятся задачи минимизации выпуклой функции

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{12.10}$$

при ограничениях (условиях)

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 0, \ i = \overline{1,m}, \tag{12.11}$$

где φ_i — выпуклые функции,

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n}. \tag{12.12}$$

Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = \overline{1,m}$, являются вогнутыми функциями, то имеем задачу максимизации функции

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

при ограничениях

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \ge 0, \ i = \overline{1,m}, \text{ и } \ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n}.$$

Важнейшее место в теории нелинейной оптимизации занимает теорема Куна—Такера, обобщающая метод множителей Лагранжа для классической задачи оптимизации на задачи нелинейного программирования, содержащие помимо ограничений-равенств и ограничения-неравенства.

Теорема Куна—Такера. *Вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ тогда и только тогда является оптимальным решением задачи (12.10)—(12.12), когда существует вектор $\overline{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$, что при $x^* \ge 0$, $\overline{\lambda}^* \ge 0$ для всех $x \ge 0$ и $\overline{\lambda} \ge 0$ имеет место неравенство*

$$L(x^*, \overline{\lambda}) \le L(x^*, \overline{\lambda}^*) \le L(x, \overline{\lambda}^*) \tag{12.13}$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \varphi_i(x^*) = 0. \tag{12.14}$$

Точка $(x^*, \overline{\lambda}^*)$ является седловой точкой функции Лагранжа (12.5) или, что то же самое, функции $L(x, \overline{\lambda}) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x)$, а теорему называют теоремой о седловой точке.

Теорема сформулирована в предположении, что выполняются условия регулярности (существует такой вектор $x \geq 0$, для которого ограничения $\varphi_i(x) < 0$, $i = \overline{1, m}$).

Первоначальное доказательство теоремы учитывало случай дифференцируемых функций $f(x)$ и $\varphi_i(x)$. Обобщение на случай выпуклых функций осуществлено Слейтером.

Докажем достаточность условий (12.13).

Пусть $x^* > 0, \overline{\lambda}^* > 0$ — седловая точка функции Лагранжа $L(x, \overline{\lambda})$. Подставив в (12.13) вместо $L(x, \overline{\lambda})$ ее значение (12.5), получим

$$f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x^*) \leq f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \varphi_i(x^*) \leq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \varphi_i(x)$$

при $x \geq 0, \overline{\lambda} \geq 0$.

Левое неравенство этого выражения, с учетом (12.14), справедливо при любом $\overline{\lambda} \geq 0$, поэтому $\varphi_i(x^*) \leq 0$.

Из правого неравенства имеем

$$f(x^*) \leq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \varphi_i(x) \leq f(x) \text{ при } x \geq 0,$$

так как $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \varphi_i(x) \leq 0$, то $f(x^*) \leq f(x)$.

Таким образом, точка x^* удовлетворяет ограничениям (12.11)—(12.12) и в этой точке функция принимает меньшее значение, чем в других точках ОДР.

Ввиду сложности доказательства необходимости оно не рассматривается. Отметим, что если $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ являются дифференцируемыми функциями, то условия (12.13) эквивалентны следующим локальным условиям Куна—Такера:

$$\begin{cases} \partial L(x^*, \overline{\lambda}^*) / \partial x \geq 0, \\ x^* \cdot \partial L(x^*, \overline{\lambda}^*) / \partial x = 0, \\ x^* \geq 0, \end{cases} \tag{12.15}$$

$$\begin{cases} \partial L(x^*, \overline{\lambda}^*) / \partial \overline{\lambda} \leq 0, \\ \overline{\lambda}^* \cdot \partial L(x^*, \overline{\lambda}^*) / \partial \overline{\lambda} = 0, \\ \overline{\lambda}^* \geq 0. \end{cases} \tag{12.16}$$

Выражения $\partial L(x^*, \overline{\lambda}^*) / \partial x$ и $\partial L(x^*, \overline{\lambda}^*) / \partial \overline{\lambda}$ означают, что значения частных производных функции Лагранжа берутся в точке $(x^*, \overline{\lambda}^*)$, где $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, $\overline{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*)$.

Условия Куна—Такера (12.15)—(12.16) будут использованы при рассмотрении метода решения задачи квадратичного программирования.

12.2. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Графическое решение задач нелинейного программирования рассмотрим на примерах.

Пример 12.1. Найти максимальное и минимальное значения функции

$$f(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 8)^2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ 2{,}5x_1 + 2x_2 \leq 20, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

ОДР является многоугольник $ABCD$ (рис. 12.1). Положив $f(x) = Q(Q > 0)$, имеем $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 8)^2 = Q$ — уравнение окружности с радиусом $\sqrt{Q}$ и центром в точке $E(5; 8)$.

Изменяя значение Q, будем получать окружности различных радиусов, а следовательно, и различные значения функции.

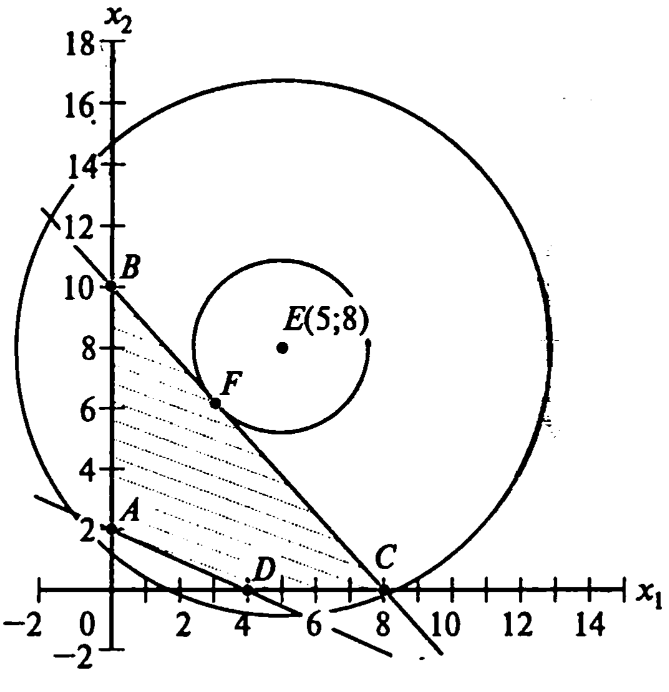


Рис. 12.1

Описав вокруг точки E окружности различных радиусов, нетрудно убедиться, что в точке $C(8; 0)$ функция достигает максимального значения $f(x)_{\max} = (8 - 5)^2 + (0 - 8)^2 = 73$, а минимального — в точке F. В этой точке окружность касается ОДР. Координаты точки F найдем, решая систему уравнений, соответствующих прямым EF и BC. Прямая EF перпендикулярна прямой BC, ее угловой коэффициент $k_{EF} = \frac{4}{5}$.

Уравнение прямой EF имеет вид: $(x_2 - 8) = \frac{4}{5} \cdot (x_1 - 5)$ или $-4x_1 + 5x_2 = 20$. Координаты точки F:(2,93; 6,34), $f_{\min} = (2{,}93 - 5)^2 + (6{,}34 - 8)^2 = 7{,}05$.

Пример 12.2. Предприятие может выпускать два вида продукции. Затраты на единицу продукции определяются выражением $c_j - l_j x_j$, где x_j — искомый объем производства продукции j-го вида (j = 1; 2); c_j — себестоимость продукции j-го вида; l_j — коэффициент снижения затрат. Требуется определить объем производства продукции, обеспечивающий минимум суммарных затрат при выполнении ограничений по ресурсам и суммарному объему выпуска продукции, который должен быть не меньше 40 единиц. Предприятие располагает ресурсами двух видов в количествах 160 единиц и 210 единиц соответственно. Нормы расхода 1-го ресурса на 1 единицу продукции каждого вида равны 2 единицам и 2,67 единицы, а 2-го ресурса — 3 единицам и 2 единицам соответственно.

Решить задачу при c_1 = 100 ден. ед., c_2 = 140 ден. ед., $l_1 = 1$, $l_2 = 1$.

Математическая модель задачи с учетом количественных данных экзогенных факторов имеет вид

$$f(x) = (100 - x_1)x_1 + (140 - x_2)x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 40, \\ 2x_1 + 2{,}67x_2 \leq 160, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 210, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

ОДР системы ограничений — многоугольник $ABCDE$ (рис. 12.2). Целевую функцию для построения концентрических окружностей приведем к виду

$$(x_1 - 50)^2 + (x_2 - 70)^2 = 7\,400 - f(x).$$

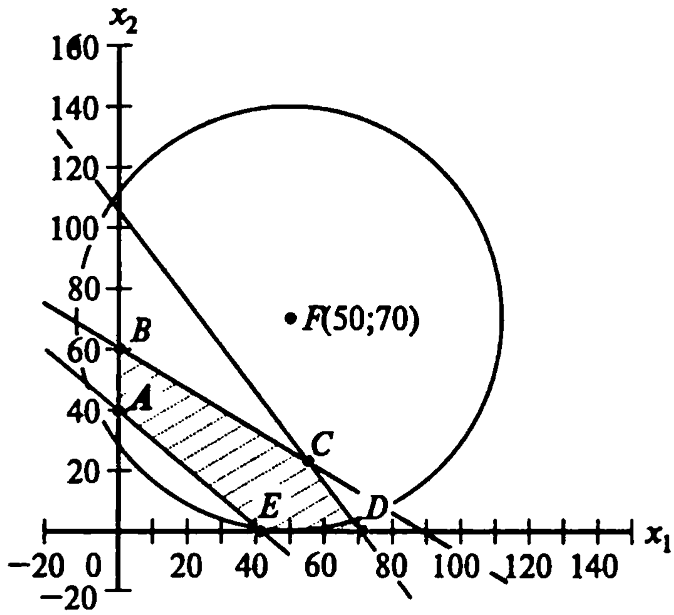


Рис. 12.2

Центр окружностей имеет координаты (50; 70). При $f(x)$ = 1000, 3 000, 5 000, 7 000 радиусы окружностей $r = \sqrt{7400 - f(x)}$ равны соответственно 80,0; 66,33; 48,989; 20. Чем меньше радиус окружности, тем больше значение функции.

Минимум функции $f(x)$ достигается в точке E, так как она наиболее удалена от центра окружностей. Координаты точки E равны (40; 0), т.е. необходимо производить 40 единиц продукции первого вида. При этом минимальные затраты $f(x)_{min} = 2400$.

Пример 12.3. Найти максимальное значение функции

$$f(x) = x_2 - x_1^2 + 4x_1$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 x_2 \ge 6, \\ x_1^2 + x_2^2 \le 49, \\ x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

На рис. 12.3 выделена ОДР (заштрихована).

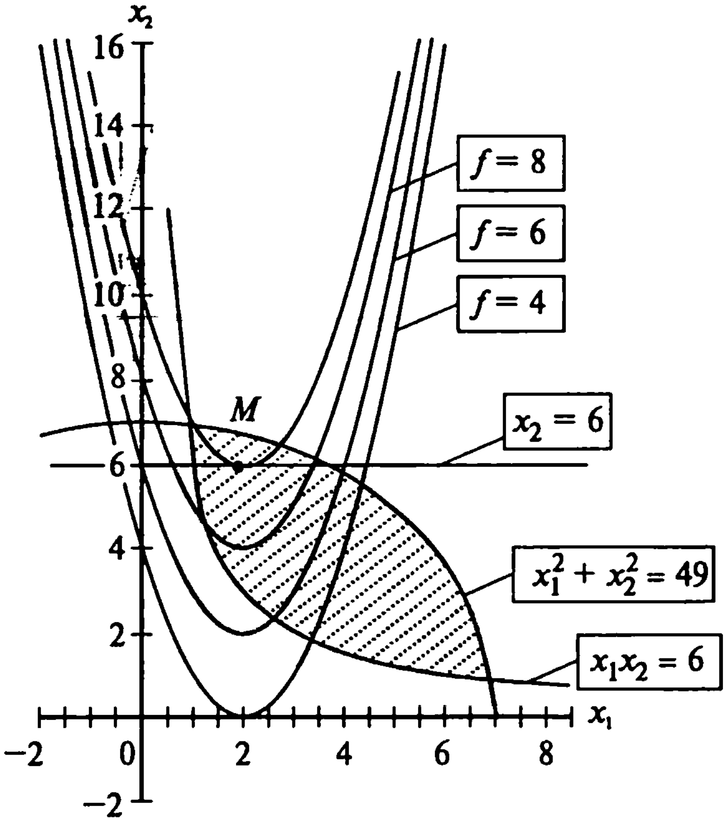


Рис. 12.3

Уравнение функции представляет собой семейство парабол. Из рис. 12.3 видно, что максимального значения функция достигает в точке $M(2; 6)$; $f(x)_{max} = 10$.

Таким образом координаты точки M : (2; 6,708), а $f(x)_{max} = 10{,}708$.

Пример 12.4. Найти максимальное и минимальное значения функции

$$f(x) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 \le 10, \\ x_2 \le 9, \\ x_1 + 1{,}5x_2 \ge 7{,}5, \\ x_1x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

В этой задаче ОДР состоит из двух частей и не является выпуклой (рис.12.4).

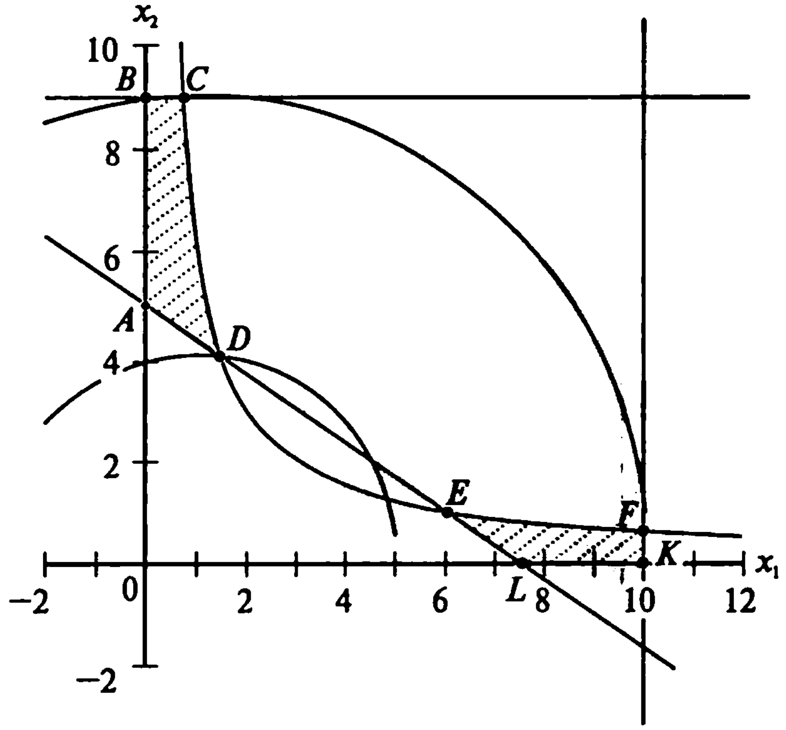


Рис. 12.4

Локальные максимумы достигаются в точках $B(0;\ 9)$, $f(x)_B = 81{,}0$, и $F(10;\ 0{,}6)$, $f(x)_F = 80{,}36$. При этом точка B является точкой глобального максимума. Минимальное значение функции достигается в точке $D(1{,}5;\ 4)$, $f(x)_D = 15{,}25$.

12.3. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

В подглаве 12.1 отмечалось, что методом множителей Лагранжа решаются классические задачи оптимизации.

Чтобы найти решение классической задачи оптимизации, необходимо:

1. Составить функцию Лагранжа (12.5).

2. Найти частные производные этой функции по неизвестным величинам $x_j\,(j=\overline{1,n})$, $\lambda_i\,(i=\overline{1,m})$ и приравнять их к нулю.

3. Решить полученную систему уравнений и тем самым определить стационарные точки функции Лагранжа.

4. Среди стационарных точек функции Лагранжа, взятых без координат $\lambda_i\,(i=\overline{1,m})$, выбрать точки, в которых достигается условный экстремум функции $f(x)$, вычислить значения функции в этих точках и выбрать среди них точку с максимальным (минимальным) значением функции.

Отметим, что необходимое условие экстремума сводится к существованию решения системы уравнений, образованной после выполнения пункта 2, а достаточные условия выводятся, если для функций $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $\varphi_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $i=\overline{1,m}$, существуют вторые частные производные и они непрерывны. Если функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ имеет в стационарной точке функции $L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$ условный минимум, то в этой точке второй дифференциал $d^2L>0$, если же функция имеет условный максимум, то $d^2L<0$.

Рассмотрим примеры применения метода.

Пример 12.5. Предприятие может изготовить 200 изделий по двум технологическим способам производства. При производстве одного изделия первым технологическим способом себестоимость его равна $6+x_1$, а вторым способом — $2+x_2$, где x_1 и x_2 — объемы производства продукции по соответствующему технологическому способу. Требуется найти, сколько изделий изготовить по каждому из способов производства, чтобы себестоимость произведенной продукции была минимальной.

С учетом обозначений минимальная суммарная себестоимость продукции выразится как $f(x)=(6+x_1)x_1+(2+x_2)x_2=6x_1+x_1^2+2x_2+x_2^2\to\min$, при ограничении-равенстве на объем производимых изделий

$$x_1+x_2=200,$$
$$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$$

Составим функцию Лагранжа $L(x_1,x_2,\lambda)=6x_1+x_1^2+2x_2+x_2^2+\lambda(200-x_1-x_2)$ и найдем минимальное значение функции $f(x)$ без учета условия неотрицательности неизвестных.

Вычислим частные производные функции Лагранжа и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}=6+2x_1-\lambda=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=2+2x_2-\lambda=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=200-x_1-x_2=0. \end{cases}$$

Решив систему линейных уравнений, получим стационарную точку с координатами $x_1=99$, $x_2=101$, $\lambda=204$.

Рассмотрим достаточные условия экстремума, для чего найдем $A=\dfrac{\partial^2L}{\partial x_1^2}=2$, $B=\dfrac{\partial^2L}{\partial x_1\partial x_2}=$ $=0$, $C=\dfrac{\partial^2L}{\partial x_2^2}=2$. Составим определитель второго порядка $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\end{vmatrix}=4>0$. Так как

$\Delta > 0$ и $A > 0$, то точка с координатами $x_1 = 99$, $x_2 = 101$ является точкой минимума и минимальная себестоимость $f(x)_{\min} = 20798$. Одновременно укажем, что если $\Delta > 0$, а $A < 0$, то функция достигает максимума. Если же $\Delta < 0$, то функция экстремума не имеет, а при $\Delta = 0$ требуются дополнительные исследования.

Пример 12.6. Найти экстремум функции

$$f = x_1 x_2 + x_2^2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ 2x_1 - x_2 = 5. \end{cases}$$

Функция Лагранжа имеет вид $L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 x_2 + x_2^2 + \lambda_1(4 - x_1 - x_2) + \lambda_2(5 - 2x_1 + x_2)$. Продифференцировав ее по переменным $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ и приравняв полученные выражения нулю, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 4 - x_1 - x_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 5 - 2x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Решение системы: $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $\lambda_1 = 3{,}667$; $\lambda_2 = -1{,}333$; $f(x) = 4$.

Найдем: $A = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 0$, $B = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 1$, $C = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2$ и $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 < 0$.

Следовательно функция не имеет экстремума.

12.4. КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Для решения задачи квадратичного программирования

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{sj} x_s x_j \to \min$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n},$$

где $\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{sj} x_s x_j$ является отрицательно (положительно) полуопределенной квадратичной формой, необходимо:

1. Составить функцию Лагранжа. Для рассматриваемой задачи она запишется в виде

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{sj} x_s x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j).$$

2. Взять частные производные функции Лагранжа и записать их в виде выражений (12.15)–(12.16) — локальных условий Куна–Такера (необходимых и достаточных условий существования седловой точки функции Лагранжа):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} \geq 0,\ j = \overline{1,n}, & \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} \leq 0, i = \overline{1,m}, \\ x_j \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1,n}, & \lambda_i \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, i = \overline{1,m}, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,n}, & \lambda_i \geq 0, i = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{12.17}$$

3. Преобразовать неравенства системы (12.17) в равенства, для чего добавить к левой части ограничений, если оно меньше или равно правой (вычесть из нее, если оно больше или равно правой части) дополнительные неизвестные $w_i, i = \overline{1,m}$ $(v_j, j = \overline{1,n})$. В результате система (12.17) запишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} - v_j = 0, j = \overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} + w_i = 0, i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{12.18}$$

$$\begin{cases} x_j v_j = 0, j = \overline{1,n}, \\ \lambda_i w_i = 0, i = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{12.19}$$

$$x_j \geq 0, v_j \geq 0, j = \overline{1,n};\ \lambda_i \geq 0, w_i \geq 0, i = \overline{1,m}. \tag{12.20}$$

4. Используя симплекс-метод (метод искусственного базиса), найти координаты седловой точки, решая систему (12.18) с учетом условий (12.19)–(12.20), либо убедиться, что ограничения задачи противоречивы.

Искусственные переменные y_i вводятся в те уравнения (12.18), где это необходимо.

П р и м е ч а н и е. Если все искусственные переменные будут выведены из базиса и удовлетворяются условия (12.19), то найденное базисное решение будет оптимальным. Если же условия (12.19) не выполнены, то следует искать другие базисные решения, которые бы удовлетворяли условиям (12.19).

5. Записать оптимальное решение исходной задачи и вычислить значение целевой функции.

Кроме рассмотренного подхода к решению задач квадратичного программирования, существует ряд других методов, таких как: метод Била, метод Баранкина–Дорфмана, метод М. Франка и Ф. Вулфа (изложен в следующей подглаве).

Пример 12.7. Найти максимальное значение функции

$$f = 2x_1 - x_1^2 + 2x_2 - x_2^2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ 3x_1 - x_2 \le 9, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Квадратичная форма $f_1 = -x_1^2 - x_2^2$ является отрицательно определенной, а следовательно, вогнутой.

Вторая часть функции $f_2 = 2x_1 + 2x_2$ является линейной и ее можно рассматривать как вогнутую. Система ограничений геометрически представляет собой выпуклое множество. Таким образом, воспользуемся теоремой Куна–Такера.

Составим функцию Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = 2x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + \lambda_1(8 - 2x_1 - x_2) + \lambda_2(9 - 3x_1 + x_2)$ и, взяв частные производные этой функции, запишем, с учетом направления оптимизации, необходимые и достаточные условия существования ее седловой точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2 - 2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 8 - 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 9 - 3x_1 + x_2 \ge 0, \end{cases} \tag{12.21}$$

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(2 - 2x_1 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2) = 0, \\ x_2 \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(2 - 2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2) = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(8 - 2x_1 - x_2) = 0, \\ \lambda_2 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(9 - 3x_1 + x_2) = 0. \end{cases} \tag{12.22}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad \lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 \ge 0.$$

Приведем к равенствам правые части ограничений (12.21) посредством ввода дополнительных неизвестных v_1, v_2, w_1, w_2:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - v_1 = 2, \\ 2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - v_2 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + w_1 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + w_2 = 9. \end{cases} \tag{12.23}$$

С учетом равенств (12.23) выражения (12.22) можно записать в виде

$$v_1 x_1 = 0,\ v_2 x_2 = 0,\ w_1\lambda_1 = 0,\ w_2\lambda_2 = 0. \tag{12.24}$$

Для нахождения базисного решения системы уравнений (12.23) воспользуемся методом искусственного базиса. Для этого добавим в уравнения системы (12.23) искусственные неизвестные (равные нулю) y_1 и y_2 и определим максимальное значение функции

$$F = F_1 - My_1 - My_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - v_1 + y_1 = 2, \\ 2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - v_2 + y_2 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + w_1 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + w_2 = 9 \end{cases}$$

и условии неотрицательности всех неизвестных.

Разрешив систему относительно базисных неизвестных, получим

$$\begin{cases} y_1 = -2x_1 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + v_1 + 2, \\ y_2 = -2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 + v_2 + 2, \\ w_1 = -2x_1 - x_2 + 8, \\ w_2 = -3x_1 + x_2 + 9. \end{cases}$$

Для записи функции F в таблицу подставим вместо игреков их правые части из последней системы уравнений и получим

$$F = F_1 - M(-2x_1 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + v_1 + 2) - M(-2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 + v_2 + 2) =$$

$$= F_1 - M(-2x_1 - 2x_2 - 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + v_1 + v_2 + 4)$$

или окончательно

$$F = F_1 + M(2x_1 + 2x_2 + 3\lambda_1 - 4\lambda_2 - v_1 - v_2 - 4) \to \max.$$

Разрешающий столбец выбираем по наименьшему отрицательному элементу последней строки (табл. 12.2), а строку — по наименьшему симплексному отношению. Разрешающий элемент (2) находится в первой строке и третьем столбце.

Таблица 12.2

Б.Н. \ Н.Н.		$-x_1$	$-x_2$ ↓	$-\lambda_1$	$-\lambda_2$	$-v_1$	$-v_2$	1	$t \geq 0$
$y_1 =$		2	0	2	−3	−1	0	2	1
$y_2 =$		0	$\boxed{2}$	1	−1	0	−1	2	2
$w_1 =$		2	1	0	0	0	0	8	8
$w_2 =$		3	−1	0	0	0	0	9	—
F	F_1	0	0	0	0	0	0	0	
	M	−2	−2	−3	4	+1	+1	−4	

Предпоследняя строка функции при любом разрешающем элементе будет равна нулю. Поэтому в последующих расчетных таблицах мы ее исключим, а оставим только M-строку.

Опуская расчет промежуточных таблиц, приводим в табл. 12.3 оптимальное решение. Столбцы таблиц, в которые переходили искусственные переменные y_1 и y_2, опущены, поэтому в табл. 12.3 нет искусственных переменных и в M-строке все элементы равны нулю.

Таблица 12.3

Б.Н. \ Н.Н.		$-\lambda_1$	$-\lambda_2$	$-v_1$	$-v_2$	1
$x_1 =$		1	$-3/2$	$-1/2$	0	1
$x_2 =$		$1/2$	$-1/2$	0	$-1/2$	1
$w_1 =$		$-5/2$	$7/2$	1	$-1/2$	5
$w_2 =$		$-5/2$	4	$3/2$	$1/2$	7
F	M	0	0	0	0	0

Оптимальное решение задачи следующее: $x_1^* = 1, x_2^* = 1, \lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = 0, w_1^* = 5, w_2^* = 7,$ $v_1^* = 0, v_2^* = 0, y_1^* = 0, y_2^* = 0$. Это решение удовлетворяет условию (12.24), так как $v_1x_1 = 0,$ $v_2x_2 = 0, w_1\lambda_1 = 0, w_2\lambda_2 = 0$.

Следовательно, точка $(x^*, \overline{\lambda^*}) = (1, 1, 0, 0)$ является седловой точкой функции Лагранжа исходной задачи, $x^* = (1, 1)$ — оптимальное ее решение. Максимальное значение функции $f_{max} = 2$.

12.5. ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ

В градиентных методах поиск экстремума функции $f(x)$ при условиях $\varphi_i(x) \leq 0$, $i = \overline{1,m}$, заключается в последовательном (пошаговом) увеличении (уменьшении) ее значения при движении от некоторой начальной точки $X^{(0)}$, принадлежащей ОДР, к точке x^* оптимального значения функции.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то градиентом функции называется n-мерный вектор

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right). \tag{12.25}$$

В выражении (12.25) $\nabla f(x)$ — градиент функции, $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} (j = \overline{1,n})$ — частные производные функции по соответствующей переменной.

Градиент функции в точке направлен по нормали к линии уровня $f(x)$. Он показывает направление наискорейшего возрастания функции в этой точке.

Антиградиент $(-\nabla f(x))$ — противоположный градиенту вектор — показывает направление наискорейшего убывания функции в точке.

Если функция $f(x)$ является выпуклой, то необходимым и достаточным условием ее оптимальности в точке x^* является равенство нулю градиента функции в этой точке.

Градиентные методы целесообразнее использовать для решения задач выпуклого программирования, так как в этих задачах всякий локальный экстремум является глобальным. Этими методами можно найти решение любой задачи и нелинейного программирования. Однако следует иметь в виду, что в общем случае указанные методы позволяют найти локальный экстремум. Кроме того, некоторые методы (метод проектируемых градиентов Розена, метод Франка–Вулфа) применяют для решения задач квадратичного программирования. Методы же допустимых направлений Зойтендейка, штрафных функций, сопряженных градиентов и другие позволяют решать задачи не только квадратичного программирования.

Методы нелинейного программирования подразделяются по подходам к решению задач. В одних методах исследуемые на экстремум точки не выходят за пределы ОДР. В других методах исследуемые на экстремум точки могут как принадлежать, так и не принадлежать ОДР (метод штрафных функций и др.).

Рассмотрим некоторые из методов решения задач нелинейного программирования.

12.5.1. Метод Франка–Вулфа

Рассмотрим задачу нелинейного программирования: найти минимальное значение функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{12.26}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = \overline{1,m}, \tag{12.27}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n}. \tag{12.28}$$

Учитывая, что в задаче ограничения (12.27) линейные, в основу ее решения положена замена в окрестности исследуемой точки нелинейной целевой функции на линейную. Это позволяет решение задачи (12.26)–(12.28) свести к последовательному решению задач линейного программирования.

С учетом сказанного процесс решения задачи методом Франка–Вулфа состоит в следующем:

1. Определяется на первом шаге точка $X^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$, принадлежащая ОДР системы ограничений, на последующих шагах — точка $X^{(k)}, k=1,2,\ldots$

2. Находится градиент функции в точке $X^{(0)}$, на последующих шагах — в точке $X^{(k)}$.

3. Формируется линейная функция

$$F_k=\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_2}x_2+\ldots+\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_n}x_n, k=0,1,2,\ldots \quad (12.29)$$

и находится ее минимальное значение при выполнении ограничений (12.27)–(12.28), т.е. решается линейная задача симплексным методом.

В результате решения задачи находится оптимальное решение $Q^{(k)}=(q_1^{(k)}, q_2^{(k)},\ldots, q_n^{(k)}), k=0,1,2,\ldots$

4. Осуществляется переход в новую точку $X^{(k+1)}$, принадлежащую ОДР,

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}+\lambda_k(Q^{(k)}-X^{(k)}).$$

Здесь λ_k — шаг вычислений ($0\le\lambda_k\le 1$). Его можно выбирать в указанном диапазоне произвольно, но лучше определить так, чтобы значение функции (12.26) в точке $X^{(k+1)}$было максимальным. Координаты новой точки $X^{(k+1)}$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)}&=x_1^{(k)}+\lambda_k(q_1^{(k)}-x_1^{(k)}),\\ &\vdots\\ x_n^{(k+1)}&=x_n^{(k)}+\lambda_k(q_n^{(k)}-x_n^{(k)}). \end{aligned} \quad (12.30)$$

Далее правые части выражения (12.30) подставляются в (12.26), находится производная функции по λ_k и приравнивается к нулю. Решением полученного уравнения находится λ_k (если найденное значение $\lambda_k>1$, то необходимо взять $\lambda_k=1$). Подстановкой λ_k в выражения (12.30) находятся координаты точки $X^{(k+1)}$ и значение функции $f(X^{(k+1)})$.

5. Осуществляется проверка целесообразности продолжения решения задачи. Для этого находится разница между значениями функции в точках $X^{(k+1)}$ и $X^{(k)}$ и сравнивается с ε (ε — заданное число, характеризующее точность вычислений):

$$\left|f(X^{(k+1)})-f(X^{(k)})\right|\le\varepsilon. \quad (12.31)$$

Если заданная величина точности вычислений не достигнута, то осуществляется переход к новой точке, т.е. переход на выполнение пункта 2 (переход к новому шагу). Если же заданная величина точности достигнута, то задача решена.

Пример 12.8. Найти методом Франка–Вулфа решение задачи с точностью $\varepsilon = 0{,}009$.

$$f(x_1,x_2) = 2x_1 - x_1^2 + 2x_2 - x_2^2 \to \max,$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 12, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Найдем градиент функции: $\nabla f(x_1,x_2) = (\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}) = (2 - 2x_1; 2 - 2x_2)$.

В качестве начального решения возьмем точку $X^{(0)} = (1; 4{,}5)$, удовлетворяющую ограничениям задачи. Значение функции в этой точке $f(X^{(0)}) = -10{,}25$.

Шаг 1. Градиент функции в точке $X^{(0)} = (x_1^{(0)}; x_2^{(0)}) = (1; 4{,}5)$:

$$\nabla f(X^{(0)}) = (2 - 2\cdot 1; 2 - 2\cdot 4{,}5) = (0; -7).$$

Находим максимум линейной целевой функции

$$F_0 = 0\cdot x_1 - 7x_2 = -7x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 12, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Оптимальное решение этой задачи

$$Q^{(0)} = (q_1^{(0)}; q_2^{(0)}) = (0; 4).$$

Найдем координаты новой точки $X^{(1)}$ по формуле (12.30):

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= x_1^{(0)} + \lambda_1(q_1^{(0)} - x_1^{(0)}) = 1 + \lambda_1(0-1) = 1 - \lambda_1, \\ x_2^{(1)} &= x_2^{(0)} + \lambda_1(q_2^{(0)} - x_2^{(0)}) = 4{,}5 + \lambda_1(4 - 4{,}5) = 4{,}5 - 0{,}5\lambda_1. \end{aligned} \tag{12.32}$$

Для нахождения λ_1 подставим координаты точки $X^{(1)}(x_1^{(1)}; x_2^{(1)})$ в формулу $f(x_1,x_2) = 2x_1 - x_1^2 + 2x_2 - x_2^2$. В результате подстановки получим

$$f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = -1{,}25\lambda_1^2 + 3{,}5\lambda_1 - 12{,}25.$$

Возьмем производную и приравняем ее к нулю:

$$(-1{,}25\lambda_1^2+3{,}5\lambda_1-12{,}25)'_{\lambda_1}=-2{,}5\lambda_1+3{,}5=0;\quad \lambda_1=\frac{3{,}5}{2{,}5}=1{,}4.$$

Так как λ_1 не должно быть больше единицы, то принимаем $\lambda_1 = 1$. Подставив $\lambda_1 = 1$ в выражение (12.32), найдем координаты точки $X^{(1)} = (x_1^{(1)}; x_2^{(1)}) = (0;\ 4)$ и значение функции $f(x)$ в этой точке $f(X^{(1)}) = -8$.

Так как $f(X^{(1)}) - f(X^{(0)}) = -8 - (-10{,}25) = 2{,}25 > 0{,}009$, то переходим к следующему шагу.

Шаг 2. Градиент функции в точке $X^{(1)} = (0; 4)$:

$$\nabla f(X^{(1)})=(2;\ -6).$$

Находим оптимальное решение новой линейной задачи, функция которой F_1 равна скалярному произведению вектора-градиента $\nabla f(X^{(1)})$ и вектора $X = (x_1, x_2)$, т.е. задачи

$$F_1=\nabla f(X^{(1)})\cdot X=(2;-6)(x_1;x_2)=2x_1-6x_2\to\max$$

при ограничениях исходной задачи

$$\begin{cases}2x_1+x_2\le 8,\\ -x_1+3x_2\ge 12,\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0.$$

Оптимальное решение этой задачи $Q^{(1)} = (q_1^{(1)}; q_2^{(1)}) = (0; 4)$.

Находим координаты новой точки $X^{(2)} = (x_1^{(2)}; x_2^{(2)})$:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)}&=x_1^{(1)}+\lambda_2(q_1^{(1)}-x_1^{(1)})=0+\lambda_2(0-0)=0,\\ x_2^{(2)}&=x_2^{(1)}+\lambda_2(q_2^{(1)}-x_2^{(1)})=4+\lambda_2(4-4)=4.\end{aligned}\tag{12.33}$$

Очевидно, что равенства (12.33) выполняются при любых $0 \le \lambda \le 1$. Значение функции в точке $X^{(2)} = (0; 4)$: $f(X^{(2)}) = -8$.

Так как $f(X^{(2)}) - f(X^{(1)}) = -8 - (-8) = 0 < 0{,}009$, то точка $X^{(2)} = (0;\ 4)$ является оптимальным решением задачи.

12.5.2. Метод штрафных функций Эрроу–Гурвица

Метод штрафных функций применяется для решения задач с ограничениями (на условный экстремум). В методе штрафных функций задача нелинейного программирования с ограничениями заменяется задачей без ограничений. Дело в том, что при поиске экстремума находится последовательность точек, которые могут как принадлежать ОДР системы ограничений, так и не принадлежать ей. Если нарушены некоторые ограничения задачи, то за их невыполнение назначается штраф и дальнейшее решение задачи с учетом штрафа возвращает точку в ОДР.

Пусть необходимо найти максимальное значение вогнутой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при ограничениях $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, i = \overline{1,m}$ ($\varphi_i(x)$ — выпуклые функции), $x_j \ge 0$, $j = \overline{1,n}$.

Решение этой задачи заменяется нахождением максимума функции

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + S(x_1, x_2, ..., x_n),$$

где $S(x_1, x_2, ..., x_n)$ — штрафная функция, определяемая системой ограничений. При этом штрафная функция равна нулю для тех точек $X^{(k)}$, которые удовлетворяют системе ограничений, и отлична от нуля для точек, в которых ограничения нарушаются.

Выберем штрафную функцию в виде

$$S(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x_1, x_2, ..., x_n)\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad (12.34)$$

где $\alpha_i(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0, \text{ если } \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \\ \alpha_i, \text{ если } \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) > b_i. \end{cases}$

В методе Эрроу–Гурвица $\alpha_i^{(k)}$ на очередном шаге вычисляют по формуле

$$\alpha_i^{(k)} = \max(0; \alpha_i^{(k-1)} - \lambda\varphi_i(X^{(k-1)})), \quad i = \overline{1,m}. \qquad (12.35)$$

Начальные значения $\alpha_i^{(0)}$ берутся произвольно, но это должны быть неотрицательные, сравнительно малые числа.

Координаты точек находим по формуле

$$x_j^{(k+1)} = \max\left(0; x_j^{(k)} + \lambda\left(\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(k)} \frac{\partial\varphi_i(X^{(k)})}{\partial x_j}\right)\right), j = \overline{1,n}. \qquad (12.36)$$

Сумма $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(k)} \frac{\partial\varphi_i(X^{(k)})}{\partial x_j}$ вычисляется по тем ограничениям i, которые нарушены. Критерием окончания решения может служить незначительное отклонение значений функции в точках $X^{(k+1)}$ и $X^{(k)}$, не превышающее заданной точности вычислений ε, т.е. $\left|f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)})\right| < \varepsilon$, или незначительное изменение положения точки X при большом увеличении α, или коллинеарность векторов-градиентов $\nabla f(X)$ и $\nabla\varphi_i(X)$, где i — номер нарушаемого ограничения.

Пример 12.9. Найти методом Эрроу–Гурвица решение задачи примера 12.3:

$$f(x_1,x_2)=4x_1-x_1^2+x_2\to\max,$$

$$\begin{cases} x_1x_2=6,\\ x_1^2+x_2^2\le 49,\\ x_2\le 6,\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0.$$

Обозначим ограничения через

$$\varphi_1(x_1,x_2)=x_1x_2-6\ge 0,$$
$$\varphi_2(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2+49\ge 0,$$
$$\varphi_3(x_1,x_2)=-x_2+6\ge 0.$$

Найдем частные производные функций $f(x_1,x_2)$ и $\varphi_i(x_1,x_2), i=\overline{1,3}$, по неизвестным x_1 и x_2.

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}=4-2x_1,\ \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}=1,\ \frac{\partial\varphi_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}=x_2,\ \frac{\partial\varphi_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}=x_1,$$
$$\frac{\partial\varphi_2(x_1,x_2)}{\partial x_1}=-2x_1,\ \frac{\partial\varphi_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}=-2x_2,\ \frac{\partial\varphi_3(x_1,x_2)}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial\varphi_3(x_1,x_2)}{\partial x_2}=-1.$$

Возьмем начальную точку $X^{(0)}=(2{,}2;6)$, принадлежащую ОДР системы ограничений, $f(X^{(0)})=9{,}96$, и далее будем находить новые точки, пока не достигнем оптимального решения.

Шаг 1. Согласно (12.34), $\alpha_i^{(1)}=0, i=\overline{1,3}$. Возьмем $\lambda=0{,}5$ и вычислим координаты точки $X^{(1)}=(x_1^{(1)};x_2^{(1)})$ по формуле (12.36):

$$x_1^{(1)}=\max(0;x_1^{(0)}+\lambda\frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_1})=\max(0;2{,}2+\lambda(-0{,}4))=2,$$

$$x_2^{(1)}=\max(0;x_2^{(0)}+\lambda\frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_2})=\max(0;6+0{,}5\cdot 1)=6{,}5,$$

$$\varphi_1(X^{(1)})>0,\varphi_2(X^{(1)})>0,\varphi_3(X^{(1)})=-0{,}5<0,f(X^{(1)})=10{,}5.$$

Шаг 2. Так как два первых ограничения выполняются, то $\alpha_1^{(2)}=\alpha_2^{(2)}=0$. Возьмем $\lambda=1$ и найдем $\alpha_3^{(2)}$ по формуле (12.35):

$$\alpha_3^{(2)}=\max(0;\alpha_3^{(1)}-\lambda\varphi_3(X^{(1)})=\max(0;0-1\cdot(-0{,}5))=0{,}5.$$

Найдем координаты точки $X^{(2)}=(x_1^{(2)};x_2^{(2)})$.

$$x_1^{(2)}=\max\left\{0;x_1^{(1)}+\lambda\left[\frac{\partial f(X^{(1)})}{\partial x_1}+\alpha_3^{(2)}\frac{\partial\varphi_3(X^{(1)})}{\partial x_1}\right]\right\}=\max[0;2+(0+0{,}5\cdot 0)]=2,$$

$$x_2^{(2)} = \max\left\{0;\ x_2^{(1)} + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(1)})}{\partial x_2} + \alpha_3^{(2)}\frac{\partial \varphi_3(X^{(1)})}{\partial x_2}\right]\right\} = \max[0;\ 6{,}5 + [1 + 0{,}5\cdot(-1)] =$$
$$= \max(0;\ 6{,}5 + 0{,}5) = 7.$$

$$X^{(2)} = (x_1^{(2)}; x_2^{(2)}) = (2;7)$$

$$\varphi_1(X^{(2)}) > 0,\ \ \varphi_2(X^{(2)}) = -4 - 49 + 49 = -4 < 0,\ \ \varphi_3(X^{(2)}) = -7 + 6 = -1 < 0.$$

Шаг 3. Возьмем $\lambda = 0{,}2$ и найдем параметры $\alpha_2^{(3)}$ и $\alpha_3^{(3)}$.

$$\alpha_2^{(3)} = \max(0; \alpha_2^{(2)} - \lambda\varphi_2(X^{(2)}) = \max(0; 0 - 0{,}2\cdot(-4)) = 0{,}8,$$

$$\alpha_3^{(3)} = \max(0; \alpha_3^{(2)} - \lambda\varphi_3(X^{(2)}) = \max(0; 0{,}5 - 0{,}2\cdot(-1)) = 0{,}7.$$

Тогда

$$x_1^{(3)} = \max\left\{0; x_1^{(2)} + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(2)})}{\partial x_1} + \alpha_2^{(3)}\frac{\partial \varphi_2(X^{(2)})}{\partial x_1} + \alpha_3^{(3)}\frac{\partial \varphi_3(X^{(2)})}{\partial x_1}\right]\right\} =$$
$$= \max\{0; 2 + 0{,}2[0 + 0{,}8(-2\cdot 2) + 0{,}7\cdot 0]\} = 1{,}36,$$

$$x_2^{(3)} = \max\left\{0; x_2^{(2)} + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(2)})}{\partial x_2} + \alpha_2^{(3)}\frac{\partial \varphi_2(X^{(2)})}{\partial x_2} + \alpha_3^{(3)}\frac{\partial \varphi_3(X^{(2)})}{\partial x_2}\right]\right\} =$$
$$= \max\{0; 7 + 0{,}2[1 + 0{,}8(-2\cdot 7) + 0{,}7\cdot(-1)]\} = 4{,}82.$$

$$\varphi_1(X^{(3)}) > 0,\ \ \varphi_2(X^{(3)}) > 0,\ \ \varphi_3(X^{(3)}) > 0,\ \ f_1(X^{(3)}) = 8{,}7354.$$

Шаг 4.

$$x_1^{(4)} = \max\left(0; x_1^{(3)} + \lambda\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_1}\right) = \max(0; 1{,}36 + 0{,}2\cdot 1{,}28) = 1{,}616,$$

$$x_2^{(4)} = \max\left(0; x_2^{(3)} + \lambda\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_2}\right) = \max(0; 4{,}82 + 0{,}2\cdot 1) = 5{,}02.$$

В точке $X^{(4)} = (1{,}616;\ 5{,}02)$ ограничения выполняются. $f(X^{(4)}) = 8{,}8725.$

Шаг 5.

$$x_1^{(5)} = \max\left(0; x_1^{(4)} + \lambda\frac{\partial f(X^{(4)})}{\partial x_1}\right) = \max(0; 1{,}616 + 0{,}2\cdot 0{,}768) = 1{,}7696,$$

$$x_2^{(5)} = \max\left(0; x_2^{(4)} + \lambda\frac{\partial f(X^{(4)})}{\partial x_2}\right) = \max(0; 5{,}02 + 0{,}2\cdot 1) = 5{,}22.$$

Точка $X^{(5)} = (1{,}7696;\ 5{,}22)$ принадлежит ОДР. $F(X^{(5)}) = 9{,}1669.$

Шаг 6.

$$x_1^{(6)} = \max\left(0; x_1^{(5)} + \lambda \frac{\partial f(X^{(5)})}{\partial x_1}\right) = \max(0; 1{,}7696 + 0{,}2 \cdot 0{,}4608) = 1{,}862,$$

$$x_2^{(6)} = \max\left(0; x_2^{(5)} + \lambda \frac{\partial f(X^{(5)})}{\partial x_2}\right) = \max(0; 5{,}22 + 0{,}2 \cdot 1) = 5{,}42.$$

Точка $X^{(6)} = (1{,}862; 5{,}42)$ принадлежит ОДР, $f(X^{(6)}) = 9{,}401$.

Шаг 7.

$$x_1^{(7)} = \max\left(0; x_1^{(6)} + \lambda \frac{\partial f(X^{(6)})}{\partial x_1}\right) = \max(0; 1{,}862 + 0{,}2 \cdot 0{,}276) = 1{,}9172,$$

$$x_2^{(7)} = \max\left(0; x_2^{(6)} + \lambda \frac{\partial f(X^{(6)})}{\partial x_2}\right) = \max(0; 5{,}42 + 0{,}2 \cdot 1) = 5{,}62,$$

$$\varphi_1(X^{(7)}) > 0, i = \overline{1,3},\ f(X^{(7)}) = 9{,}6131.$$

Шаг 8.

$$x_1^{(8)} = \max\left(0; x_1^{(7)} + \lambda \frac{\partial f(X^{(7)})}{\partial x_1}\right) = \max(0; 1{,}9172 + 0{,}2 \cdot 0{,}1656) = 1{,}9503,$$

$$x_2^{(8)} = \max\left(0; x_2^{(7)} + \lambda \frac{\partial f(X^{(7)})}{\partial x_2}\right) = \max(0; 5{,}62 + 0{,}2 \cdot 1) = 5{,}82,$$

$$\varphi_1(X^{(8)}) > 0, i = \overline{1,3},\ f(X^{(8)}) = 9{,}8177.$$

Шаг 9.

$$x_1^{(9)} = \max\left(0; x_1^{(8)} + \lambda \frac{\partial f(X^{(8)})}{\partial x_1}\right) = \max(0; 1{,}9503 + 0{,}2 \cdot 0{,}0994) = 1{,}9702,$$

$$x_2^{(9)} = \max\left(0; x_2^{(8)} + \lambda \frac{\partial f(X^{(8)})}{\partial x_2}\right) = \max(0; 5{,}62 + 0{,}2 \cdot 1) = 6{,}02.$$

$$\varphi_1(X^{(9)}) > 0, \varphi_2(X^{(9)}) > 0, \varphi_3(X^{(9)}) = -0{,}2 < 0; f(X^{(9)}) = 10{,}019.$$

Шаг 10.

$$\alpha_3^{(9)} = \max(0; 0{,}7 - 0{,}2 \cdot (-0{,}2)) = 0{,}704,$$

$$x_1^{(10)} = \max\left(0; x_1^{(9)} + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(9)})}{\partial x_1} + \alpha_3^{(9)} \frac{\partial \varphi_3(X^{(9)})}{\partial x_1}\right]\right) = \max[(0; 1{,}9702 + 0{,}2 \cdot (0{,}0596 + 0{,}704 \cdot 0)] =$$

$$= \max(0; 1{,}9702 + 0{,}0112) = 1{,}9814,$$

$$x_2^{(10)} = \max\left\{0; x_2^{(9)} + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(9)})}{\partial x_2} + \alpha_3^{(9)} \frac{\partial \varphi_3(X^{(9)})}{\partial x_2}\right]\right\} = \max\{0; 6{,}02 + 0{,}2[1 + 0{,}704 \cdot (-1)]\} =$$

$$= \max(0; 6{,}02 + 0{,}0592) = 6{,}0792.$$

$$\varphi_1(X^{(10)}) > 0,\ \varphi_2(X^{(10)}) > 0,\ \varphi_3(X^{(10)}) = -0{,}0792 < 0.\ f(X^{(10)}) = 10{,}0789.$$

$$f(X^{(10)}) - f(X^{(9)}) = 10{,}0789 - 10{,}019 = 0{,}0599.$$

Учитывая, что разность между значениями функции небольшая и что точка $X^{(10)}$ незначительно удалена от границы ОДР, ее можно принять за приближенное решение задачи. Вместе с тем отметим, что, округлив значения неизвестных, получим точку $M(2; 6)$ (рис. 12.5), которая является точным решением задачи. $f(M)_{\max} = 10$.

Решение рассмотренной задачи можно было бы ускорить, выбрав $\lambda = 0{,}2$ или $\lambda = 0{,}1$. В этом случае не было бы большого разброса точек $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ и $X^{(3)}$ (рис. 12.5). Скорость достижения оптимального решения зависит также от выбора начальной точки $X^{(0)}$. Если выбрать начальную точку $X^{(0)} = (1{,}5;\ 5{,}5)$ и $\lambda = 0{,}5$, то на первом шаге в точке $X^{(1)} = (x_1^{(1)};\ x_2^{(1)})$ будет получено оптимальное решение: $x_1^{(1)} = 1{,}5 + 0{,}5 \cdot (4 - 3) = 2$; $x_2^{(1)} = 5{,}5 + 0{,}5 \cdot 1 = 6$; $f(X^{(1)}) = 10$.

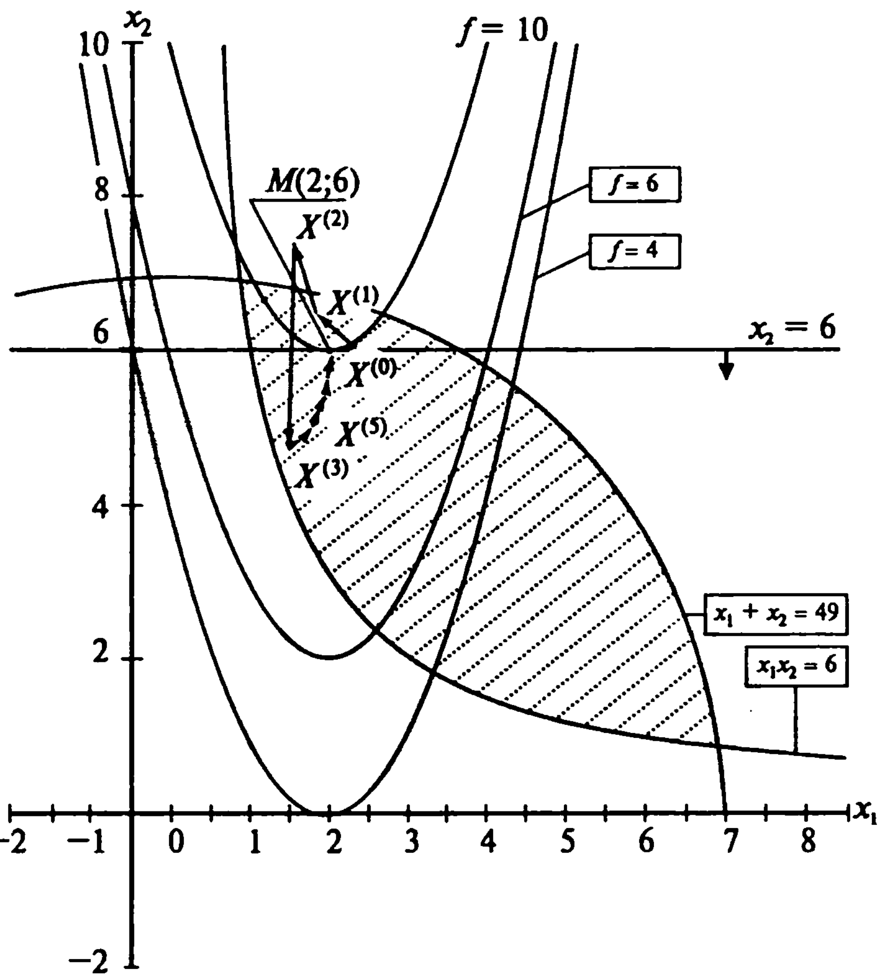


Рис. 12.5

12.6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ EXCEL РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Решение задач нелинейного программирования (НЛП) в Excel осуществляется командой **Поиск решения** из меню **Сервис**, в которой реализованы два метода: метод Ньютона и метод сопряженных градиентов. В методе Ньютона для определения направления и шага перемещения в новую точку используются вторые производные. Использование вторых производных ведет к большому объему вычислений на каждом шаге итерационного процесса, но сокращает число шагов для достижения оптимального решения.

Метод сопряженных градиентов использует только первые производные, что приводит к сокращению объема вычислений на каждом шаге итерационного процесса, но и к возможному увеличению числа шагов.

Решение нелинейных задач командой **Поиск решения** осуществляется так же, как и линейных. Однако при решении нелинейных задач необходимо, чтобы функция $f(X)$ в начальной точке $X^{(0)}$ была отлична от нуля. Дело в том, что на каждом шаге проверяется достижение оптимального решения по формуле $\Delta f = \dfrac{f_{k+1} - f_k}{f_k} \le \varepsilon$ (ε — заданная величина точности решения), а на нуль делить нельзя. Кроме того, для ускорения нахождения оптимального решения начальную точку $X^{(0)}$ следует, по возможности, выбрать ближе к оптимальной, т.е. установить в изменяемых ячейках значения, близкие к оптимальным.

Чтобы решить задачу НЛП, в диалоговом окне **Параметры поиска решения** активизируется одна из программ **«Метод Ньютона»** или **«Метод сопряженных градиентов»**, что обеспечивается щелчком **M1** по названию программы. Так как решается нелинейная задача, то не следует устанавливать флажок **«Линейная модель»**.

Более полную процедуру решения задач НЛП средствами Excel рассмотрим на примере, приведенном в начале подглавы 12.1. Найдем решение задачи в целых числах. Математическая модель задачи имеет вид

$$f(x_1, x_2) = 100x_1 - 0{,}08x_1^2 + 120x_2 - 0{,}1x_2^2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 15x_1 + 0{,}1x_1^2 + 18x_2 + 0{,}05x_2^2 \le 1350, \\ 12x_1 + 0{,}2x_1^2 + 16x_2 + 0{,}2x_2^2 \le 1400, \\ 17x_1 + 0{,}1x_1^2 + 14x_2 + 0{,}15x_2^2 \le 1580, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Исходные данные введем в электронную таблицу Excel, как показано в табл. 12.4.

Таблица 12.4

	A	B	C	D	E	F
1	Ограничения и др. показ.	Переменные		Левая часть ограничений	Вид огранич.	Правая часть огр.
2		X1	X2			
3	Ресурс 1	=15*B8+0,1*B8^2	=18*C8+0,05*C8^2	=СУММ(B3:C3)	<=	1 350
4	Ресурс 2	=12*B8+0,2*B8^2	=16*C8+0,2*C8^2	=СУММ(B4:C4)	<=	1 400
5	Ресурс 3	=17*B8+0,1*B8^2	=14*C8+0,15*C8^2	=СУММ(B5:C5)	<=	1 580
6	Прибыль	=100*B8–0,08*B8^2	=120*C8–0,1*C8^2	=СУММ(B6:C6)	max	
7						
8	Измен. перем.(объем производства)					
9						
10	Нижняя граница изм. переменных	2	2			
11						

В ячейки B3:B6 и C3:C6 занесены соответственно формулы, отражающие слагаемые элементы функции и левых частей. Поясним суть выражения в ячейке B3. В первом ограничении два первых слагаемых имеют вид $15x_1 + 0{,}1x_1^2$. Под значение x_1 (изменяемой переменной) отведена ячейка B8, поэтому в ячейку B3 занесено выражение 15 * B8 + 0,1 * B8^2. Аналогично занесены выражения в другие ячейки. В ячейках D3:D5 представлены формулы для подсчета расхода ресурсов на производство продукции в объемах x_1 и x_2. Так как на производство продукции первого вида в объеме x_1 расходуется первого ресурса 15 * B8 + 0,1 * B8^2, а на производство продукции второго вида в объеме x_2 расходуется того же ресурса 18 * C8 + 0,5 * C8^2 и эти величины находятся в ячейках B3 и C3, то суммарный расход первого ресурса занесен в ячейку D3, что отражено формулой =СУММ(B3:C3). Аналогично формулы занесены в ячейки D4 и D5. В ячейку D6 занесена суммарная прибыль от производства продукции.

Далее в меню **Сервис** командой **Поиск решения** откроем диалоговое окно **Поиск решения** и занесем в него необходимые данные: адрес ячейки целевой функции — D6: направление оптимизации — максимизировать; адреса изменяемых переменных B8 и C8; ограничения задачи и требование целочисленности неизвестных величин.

В диалоговом окне **Параметры поиска решения**, вызванном командой **Параметры** диалогового окна **Поиск решения**, установим флажки **Неотрицательные значения**, **Автоматическое масштабирование**, **«Сопряженных градиентов»** (выбранный метод решения задачи) и, щелкнув **M1** по **OK**, возвратимся в диалоговое окно **Поиск решения**. В этом окне, щелкнув **M1** по команде **Выполнить**, получим оптимальное решение задачи (табл. 12.5).

Таблица 12.5

	A	B	C	D	E	F
1	Ограничения и др. показ.	Переменные		Левая часть ограничений	Вид огранич.	Правая часть огр.
2		X1	X2			
3	Ресурс 1	582,40	691,25	1 273,65	<=	1 350
4	Ресурс 2	588,80	805,00	1 393,80	<=	1 400
5	Ресурс 3	646,40	673,75	1 320,15	<=	1 580
6	Прибыль	3 118,08	4 077,50	7 195,58	max	
7						
8	Измен. перем.(объем производства)	32	35			
9						
10	Нижняя граница изм. переменных	2	2			
11						

В ячейках В8 и С8 представлены искомые объемы производства продукции $x_1 = 32$ и $x_2 = 35$. Суммарная максимальная прибыль 7195,58 ден. ед. представлена в ячейке D6. В ячейках В3:В5 и С3:С5 находится информация о расходе ресурсов на производственную продукцию, а в ячейках D3:D5 — о суммарном расходе ресурсов.

Результат поиска решения можно представить в виде отчета. Отчет по результатам решения задачи НЛП не отличается от отчета для задач линейной оптимизации, а отчеты по устойчивости и пределам в задачах с требованием целочисленности не выдаются. Учитывая, что отчет по устойчивости для нелинейных задач отличается от аналогичного отчета для линейных задач, решим рассматриваемую задачу без требования целочисленности (на рис. 12.6 представлен отчет по устойчивости). В отчете приведены числовые значения изменяемых переменных (значения неизвестных), нормированный градиент, а ниже — данные об ограничениях (расход ресурсов и множители Лагранжа). Множители Лагранжа — величины, аналогичные двойственным оценкам в задачах линейной оптимизации. Они показывают, насколько изменится значение целевой функции в оптимальном решении при изменении правой части системы ограничений на единицу.

В нашем примере множители Лагранжа $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 3{,}78418$. Это говорит о том, что ресурс 1 и ресурс 3 являются не дефицитными (они расходованы не полностью), а ресурс 2 дефицитный (расходован полностью). Если увеличить ресурс 2 на единицу, то значение функции увеличится на $\lambda_2 = 3{,}78418$ ден. ед. Если этот ресурс увеличить на 2 единицы, то прибыль увеличится на 7,56836 ден. ед. и т.д., пока ресурс будет оставаться дефицитным.

Microsoft Excel 9.0 Отчет по устойчивости

Рабочий лист [Задача нелин.прогр. 0.xls]Лист1

Отчет создан: 07.01.01. 6:24:58

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент
$B$8	Измен.перем.(объем пр-ва) X1	32,61707	0
$C$8	Измен.перем.(объем пр-ва) X2	34,69339	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа множитель
$D$3	Ресурс 1	1280,30597	0
$D$4	Ресурс 2	1400,0	3,78418
$D$5	Ресурс 3	1327,12968	0

Рис. 12.6

Упражнения

Найти решения задач 12.1 и 12.2 графическим методом.

12.1. Предприятие может производить продукцию по двум технологическим способам производства. Для производства продукции используется сырье двух видов. Требуется определить, сколько продукции производить по каждому из технологических способов, чтобы получить максимум прибыли, если известны: объемы ресурсов, которыми располагает предприятие, $b_1 = 186$, $b_2 = 210$, оптовая цена единицы продукции, $P_1 = 52$, $P_2 = 68$, себестоимость c_j, выраженная функцией $c_j = c'_j + c''_j x_j$, $j = \overline{1,2}$ ($c'_1 = 1{,}0; c''_1 = 0{,}1; c'_2 = 2{,}0; c''_2 = 0{,}1$), и нормы расхода ресурсов на производство единицы продукции по каждому технологическому способу a_{ij} ($a_{11} = 6$; $a_{12} = 4$; $a_{21} = 5$; $a_{22} = 10$).

12.2. Найти минимум функции $f = x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 4x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 30, \\ 8x_1 + 4x_2 \le 48, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

12.3. Найти методом множителей Лагранжа решение задачи по условию примера 12.5, если предприятию необходимо изготовить 141 изделие, а себестоимость одного изделия, изготовленного первым технологическим способом, составляет $c_1 = 3 + x_1$, вторым способом — $c_2 = 1 + x_2$.

12.4. Найти методом множителей Лагранжа максимальное значение функции $f = x_1 x_2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 10, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$$

12.5. Найти методом Франка–Вулфа решение задачи из примера 12.7.

12.6. Найти решение задачи из примера 12.7 методом Эрроу–Гурвица.

12.7. Найти решение задачи из примера 12.4 на ПЭВМ и осуществить его анализ.

12.8. Решить задачу примера 12.1 на ПЭВМ методом сопряженных градиентов.

13. СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

13.1. ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Если в оптимизационных задачах исходная информация задана однозначно, то такие задачи и их математические модели называются детерминированными. Однако на практике часто встречаются задачи оптимизации, у которых исходные параметры являются случайными или неопределенными. Так, при планировании деятельности сельскохозяйственного предприятия урожайность культур, использование трудовых ресурсов и другие показатели зависят от погодных условий и являются случайными. Случайными величинами являются количество поступающих заказов за какой-то период времени на ремонт телевизоров в телеателье, число покупателей в магазинах, количество пассажиров на тех или иных авиалиниях и т.д. Таким образом, если под влиянием каких-то причин невозможно точно определить значения параметров (нормативы расхода ресурсов, запасы сырья, стоимость и др.) исследуемой проблемы, то такая проблема относится к стохастической, а модели и методы, применяемые для решения задач со случайными и неопределенными факторами, называются моделями и методами *стохастического программирования.*

Если имеются статистические данные случайных параметров задачи и на основе статистической обработки можно установить их вероятностные характеристики (функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию), то стохастическая задача решается в условиях риска. Если же не представляется возможным установить статистические закономерности изменения случайных параметров, то задача решается в условиях неопределенности.

Задачи стохастического программирования подразделяют на одноэтапные, двухэтапные и многоэтапные.

Одноэтапными называют задачи стохастического программирования, в которых решение принимается один раз и в последующем не изменяется. К таким задачам, очевидно, можно отнести задачу определения оптимального размещения производственных мощностей.

К *двухэтапным* задачам стохастического программирования относятся задачи, в которых решение, полученное на первом этапе, может быть изменено (скорректировано) на втором этапе. Например, предприятие не имеет достоверной информации об уровне спроса на выпускаемую им продукцию. Тогда на первом этапе применяется решение о выпуске некоторой партии продукции, позволяющей определить спрос. Далее на основании полученных данных о спросе на втором этапе принимается корректирующее оптимальное решение, обеспечивающее производство продукции в соответствии с уровнем спроса.

К *многоэтапным* задачам относятся задачи, допускающие многократную корректировку решений с учетом случайных параметров, характеризующих тот или иной управляемый процесс. Например, задачи управления запасами в последовательные отрезки времени, перспективного инвестирования проектов, оперативного управления производственными, технологическими и другими процессами.

Имеются задачи, в которых недопустимо отклонение в выполнении ограничений (невыполнение каких-то ограничений при реализации случайных условий приведет к весьма нежелательным, а то и к катастрофическим последствиям). Постановка стохастической задачи с вышеуказанным требованием называется *жесткой*. Наряду с задачами в жесткой постановке существует задача с *вероятностными ограничениями*. Отметим, что исследование стохастических процессов по сравнению с детерминированными значительно сложнее. Трудности возникают как концептуального характера, связанные с интерпретацией понятий вероятности, неопределенности, определением критерия эффективности и др., так и технического характера, обусловленные особенностями применения математического аппарата, сбора большого количества исходных данных, учета каждого возможного события, которое может произойти, и т.п.

В постановках и решениях стохастических задач существенно отличаются от детерминированного случая понятия допустимого и оптимального решения. Поэтому в каждом конкретном случае необходимо уточнить, что называть допустимым и оптимальным решением. Так, например, если считать допустимым решение, не удовлетворяющее некоторым ограничениям задачи с небольшой величиной невязки, то оптимальное решение задачи в таких случаях находится с расширенной целевой функцией, в которую включены штрафы за невыполнение ограничений. В качестве штрафов выступают величины, равные произведению невязки на некоторый коэффициент. Величина штрафов минимизируется, поэтому в целевую функцию они включаются с соответствующим знаком в зависимости от направления оптимизации основного критерия. Такая постановка задачи будет нежесткой. Очевидно, что при бесконечно большом штрафе нежесткая задача превращается в жесткую.

В стохастических математических моделях случайными могут быть коэффициенты критерия оптимальности, правые части ограничений и коэффициенты при неизвестных в системе ограничений. Рассмотрим возможные постановки стохастических задач в зависимости от факторов со случайными элементами.

13.2. НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

13.2.1. *E*-постановка задачи

а) Рассмотрим случай, когда коэффициенты $c_j\ (j=\overline{1,n})$ в целевой функции являются случайными величинами, а остальные параметры детерминированные. Оптимальное решение такой задачи можно найти сведением ее к детерминированной, в которой в качестве коэффициентов целевой функции используются математические ожидания (средние значения) параметров: $E(c_j)$, $j=\overline{1,n}$. Математическая модель задачи имеет вид

$$E[f]=\sum_{j=1}^{n}E[c_j]x_j\rightarrow \max(\min), \tag{13.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{13.2}$$

$$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,n}. \tag{13.3}$$

Здесь $E\,[f]$ и $E\,[c_j]$ — математические ожидания величин f и c_j.

б) Математическая модель задачи со случайными коэффициентами в целевой функции и *вероятностными ограничениями* записывается в следующем виде:

$$E[f]=\sum_{j=1}^{n}E[c_j]x_j\rightarrow \max(\min), \tag{13.4}$$

$$P\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\right)\ge\beta_i,\ \ 0\le\beta_i\le 1,\ i=\overline{1,m}, \tag{13.5}$$

$$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,n}. \tag{13.6}$$

В выражении (13.5) P и β_i — символы вероятности. Под допустимым решением в задаче (13.4)–(13.6) подразумевается вектор $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$, обеспечивающий выполнение i-го ограничения с вероятностью P, не меньшей заданного значения вероятности β_i $(i=\overline{1,m})$.

Непосредственно задачу в E-постановке (13.4)–(13.6) решить не представляется возможным. Для решения сформируем ее детерминированный эквивалент, предполагая, что случайные величины a_{ij}, b_i, c_j подчиняются нормальному закону распределения:

$$f=\sum_{j=1}^{n}E[c_j]x_j\rightarrow \max(\min), \tag{13.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n}E[a_{ij}]x_j+t(\beta_i)W_i\le E[b_i],\ i=\overline{1,m}, \tag{13.8}$$

$$W_i=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma^2[a_{ij}]x_j^2+\sigma^2[b_i]},\ i=\overline{1,m}, \tag{13.9}$$

$$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,n}. \tag{13.10}$$

Величина β_i — заданный уровень вероятности выполнения i-го ограничения, $t(\beta_i)$ — значение параметра t в нормальном распределении, соответствующее заданному уровню вероятности β_i, вычисляется с помощью статистической функции НОРМСТОБР(β_i) (см. параграф 13.3.2), W_i — величина, зависящая от разброса значений a_{ij} и b_i, произведение $t(\beta_i)W_i$ в выражении (13.8) — величина дополнительного ресурса, требуемого для выполнения заданного уровня i-го вероятностного ограничения (для детерминированных исходных данных $W_i = 0$ и выражение (13.8) будет иметь вид (13.2)).

В силу (13.9) стохастическая задача является нелинейной. Подчеркнем, что применять модель задачи (13.7)–(13.10) следует с определенной осторожностью, так как получаемое с помощью математической модели решение редко является абсолютно оптимальным (даже с детерминированными параметрами). Операционист (лицо, осуществляющее исследование проблемы) должен рассмотреть различные исходы и характеристики решения и при необходимости скорректировать его на основе анализа или модифицировать саму модель, с тем чтобы результат имел практическую ценность.

в) Еще вариант модели с вероятностными ограничениями:

$$f = \sum_{j=1}^{n} E[c_j]x_j \to \max(\min), \tag{13.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m_1}, \tag{13.12}$$

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\right) \ge \beta_i, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}, \tag{13.13}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{13.14}$$

Значения x_j в модели находятся в предположении, что все коэффициенты в ограничениях (13.12)–(13.13) заданы, а величина β_i выбирается в пределах $0 \le \beta_i \le 1$.

В этой модели вероятностные ограничения (13.13) заменяются детермированным эквивалентом вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le B_i, \; i = \overline{m_1 + 1, m}, \tag{13.15}$$

где B_i — предельное значение случайных величин b_i, удовлетворяющее условию

$$P[b_i \ge B_i] \ge \beta_i, \; i = \overline{m_1 + 1, m}, \tag{13.16}$$

или эквивалентному ему $P[b_i < \text{B}_i] \le 1 - \beta_i$, $[B_i\!:\!(1 - \beta_i)$ — *квантиль*].

Пусть $m_1 = 2$. Покажем, как вычисляется значение B_3 при заданном безусловном распределении для b_3. Если $P[b_3 = 1] = 0{,}1$; $P[b_3 = 3] = 0{,}3$; $P[b_3 = 8] = 0{,}4$;

$P[b_3 = 10] = 0{,}2$, то $P[b_3 \geq 1] = P[b = 1] + P[b_3 = 3] + P[b_3 = 8] + P[b_3 = 10] = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}2 = 1$. Следовательно, $B_3 = 1$.

Аналогично для $P[b_3 \geq 3] = 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}9$; $B_3 = 3$ для $P[b_3 \geq 8] = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$; $B_3 = 8$ и для $P[b_3 \geq 10] = 0{,}2$; $B_3 = 10$.

Задача (13.11)–(13.12), (13.14) и (13.15) является задачей линейной оптимизации с вероятностными ограничениями. Реализация моделей с вероятностными ограничениями трудностей не вызывает. Основной их недостаток состоит в том, что экономические последствия «нарушения» какого либо ограничения могут быть оценены не непосредственно, а лишь косвенным путем.

г) Случайными являются коэффициенты при неизвестных в системе ограничений.

В этой модели элементы c_j, $j = \overline{1,n}$, и b_i, $i = \overline{1,m}$, считаем детерминированными.

Рассмотрим, например, s-е ограничение

$$\sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j \leq b_s.$$

Обозначим суммарный расход s-го ресурса на производство продукции в объемах x_j через y_s. С учетом обозначения $y_s = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j$.

Так как a_{sj}, $j = \overline{1,n}$, — случайные величины, то и y_s — случайная величина. Следовательно, случайная величина y_s может превышать значение b_s, быть равной ему и меньшей его:

— если $y_s > b_s$, то потребуются дополнительные средства на приобретение s-го ресурса;

— если $y_s < b_s$, то сырье не расходуется, и в этом случае хозяйствующий субъект несет убытки.

Учет этих обстоятельств осуществляется посредством добавления в целевую функцию двух слагаемых: $C_{n+1}^{(s)}(y_s - b_s)$, если $y_s > b_s$, и $C_{n+2}^{(s)}(b_s - y_s)$, если $y_s < b_s$, где $C_{n+1}^{(s)}$ и $C_{n+2}^{(s)}$ — величины ущерба (штрафа) на единицу s-го ресурса (ден. ед./ед.).

13.2.2. P-постановка задачи

Математическая модель стохастической задачи в P-постановке может быть представлена в следующем виде :

$$P(f_{\max(\min)}) \to \max, \tag{13.17}$$

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i\right) \geq \beta_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{13.18}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{13.19}$$

В этой постановке задачи тоже могут быть различные сочетания условий для целевой функции и ограничений.

Функция (13.17) может быть представлена в виде $P(f) = P_{\text{зад}}$. Здесь $P_{\text{зад}}$ — заданное значение вероятности.

Для решения задачи в P-постановке ограничения (13.18) заменяются на (13.8)–(13.9) и определяются параметры распределения значения целевой функции $f(x)$:

$$E[f(x)] = \sum_{j=1}^{n} E[c_j]x_j, \tag{13.20}$$

$$\sigma[f(x)] = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\sigma[c_j]x_j\right)^2}, \tag{13.21}$$

или $\sigma[f(x)] = v[f(x)] \cdot E[f(x)]$, $v[f(x)]$ — коэффициент вариабильности, показывающий относительную величину разброса случайных величин.

Все описанные модели стохастических задач могут быть реализованы средствами Excel.

13.3. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

13.3.1. Определение количественных характеристик и функций случайной величины

Определение количественных характеристик и функций случайных величин с применением информационных технологий рассмотрим на примере, условие которого совпадает с условием задачи из примера 2.2.

Математическая модель задачи имеет вид

$$f(x) = 240x_1 + 210x_2 + 180x_3 \to \max \text{ (прибыль)},$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \le 3\,120 & \text{— комплектующие,} \\ 2x_1 + 8x_2 + 10x_3 \le 3\,000 & \text{— сырье,} \\ 6x_1 + 9x_2 + 4x_3 \le 3\,150 & \text{— материалы,} \end{cases} \tag{13.22}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

При рассмотрении ранее примера 2.2 числовые значения c_j, a_{ij} и b_i ($i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,3}$) принимались известными (детерминированными). Теперь будем считать, что эти величины являются случайными и в математической модели представлены их средние значения, т.е.

$$E(c_1)=240,\ E(c_2)=210,\ E(c_3)=180,\ E(a_{11})=4,\ldots,\ E(a_{32})=9,\ E(a_{33})=4,$$

$$E(b_1)=3120,\ E(b_2)=3000,\ E(b_3)=3150.$$

Покажем, как находятся средствами Excel количественные характеристики случайных величин.

Пусть наблюдения за величиной прибыли от третьего вида продукции в течение полугодия распределились следующим образом: январь — 210, февраль — 200, март — 157, апрель — 140, май — 190, июнь — 183. Занесем данные о прибыли в ячейки B4:G4 таблицы Excel (табл.13.1).

Количественные характеристики: математическое ожидание $E[x]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$; среднее квадратическое отклонение

$$\sigma[x]=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-E[x])^2}{n}}$$

(x_i — значение случайной величины прибыли (в нашем примере) в i-м месяце, n — число месяцев). Эти величины в Excel находятся с помощью статистических функций СРЗНАЧ и СТАНДОТКЛОН.

Найдем еще *коэффициент вариабельности*, характеризующий относительный разброс случайных величин $V[x]=\sigma[x]/E[x]$. Вычислим эти количественные характеристики следующим образом. Подведем курсор к H4, вызовем **Мастер функций**, **Статистические** СРЗНАЧ (на экране — диалоговое окно СРЗНАЧ). В этом окне и в строке **ЧИСЛО 1** указан диапазон чисел, для которых находится среднее значение. Если он совпадает с B4:G4, то, щелкнув **М1** по **ОК**, в H4 получим результат $E[x]=180$ (если диапазон чисел указан неверно, то можно внести исправления в строке формул или поместить курсор в B4 и протянуть его до G4).

Характеристика $\sigma[x]$ находится аналогично. Курсор — в I4, вызов функции СТАНДОТКЛОН и ввод массива B4:G4, **ОК**. Для вычисления коэффициента вариабельности в ячейку J4 введем формулу =I4/H4, <Enter>.

Вероятностные распределения случайных величин

Важнейшей характеристикой случайной величины является ее вероятностное распределение. Существует большое многообразие вероятностных распределений. Учитывая, что распределение большинства случайных переменных реальных экспериментов близко к нормальной кривой, на практике наибольшее применение получило *нормальное распределение*, имеющее представление в виде двух функций: функции плотности вероятности (Ф.П.В.) $f[x]$ и интегральной функции распределения (И.Ф.Р.) $F[x]$:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma[x]\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-E[x])^2}{2\sigma^2[x]}},$$

$$F[x]=\int_{-\infty}^{\infty} f[x]dx.$$

Для стандартизированных оценок нормального распределения справедливо следующее : 68,3% их лежит между -1 и $+1$; 95,4% — в интервале $[-2;2]$ и 99,7% — в интервале $[-3;3]$. Поэтому с высокой степенью точности реальные оценки находятся не в бесконечном интервале, а в интервале $E[x]-3\sigma[x]\le x\le E[x]+3\sigma[x]$.

Функция плотности вероятности $f[x]$ показывает, какие случайные значения x наиболее выроятны, а интегральная функция $F[x]$ позволяет определить вероятность появления случайной величины $x \le b$.

Обе функции в Excel находятся в помощью статистической функции НОРМРАСП (x; СРЗНАЧ; СТАНДОТКЛОН; ИНТЕГРАЛЬНАЯ). Здесь x (число) — задаваемое значение случайной величины, по которому находятся $f[x]$ и $F[x]$. СРЗНАЧ и СТАНДОТКЛОН — это $E[x]$ и $\sigma[x]$ соответственно. Если ИНТЕГРАЛЬНАЯ — ИСТИНА, то находится интегральная функция $F[x]$, а если ИНТЕГРАЛЬНАЯ — ЛОЖЬ (т.е. неинтегральная), то находится Ф.П.В. $f[x]$.

Для показателя прибыли из рассматриваемого примера найдем функции $f[x]$ и $F[x]$ и построим их графики. Так как среднее квадратическое отклонение $\sigma[x]=26{,}6$, а среднее значение $E[x]=180$, то пределы изменения случайной величины x будем находить в интервале $180-3\sigma[x]\le x\le 180+3\sigma[x]$, т.е. $100\le x\le 260$. Данные x для построения графиков функций занесем в ячейки B8:W8 (22 значения) табл. 13.1. В ячейках B9:W9 назначим представление чисел с тремя десятичными знаками. Далее курсор — в B9, **Мастер функций**, **Статистические**, НОРМРАСП (на экране диалоговое окно НОРМРАСП). Вводим посредством выделения ячеек: B8 в строку диалогового окна x, H4 — в строку СРЕДНЕЕ, СТАНДАРТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ — I4, ИНТЕГРАЛЬНЫЙ — ЛОЖЬ, **OK** (на экране в B9 число 0,000). Для сохранения адресов B8 и H4 введем символ $. Скопируем B9 в B10 и в формуле строки ввода заменим ЛОЖЬ на ИСТИНА, а B9 заменим на B8, <Enter> (на экране в B10 число 0,001). Выделим B9:B10, **МП** и протащим курсор до W9:W10 (на экране значения $f[x]$ и $(F[x])$.

Построение графиков

Выделим ячейку A8 (начальную ячейку рядов данных из табл. 13.1). Вызовем **Мастер диаграмм** щелчком **M1** по его кнопке (на экране **Мастер диаграмм** (Шаг 1 из 4)). На вкладке **Нестандартные** выберем тип диаграммы — **Графики (2 оси)**. На вкладке **Диапазон** указан диапазон B8 : W10, пометим ряды в «строках», на вкладке **Ряд** проверим правильность рядов и внесем в окно **Подписи оси X:** интервал B8:W8.

В третьем диалоговом окне **Мастера диаграмм** введем название заголовка диаграммы — «Графики функций $f[x]$ и $F[x]$», название оси x (категорий) —

Таблица 13.1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		Данные о прибыли по месяцам						Количеств. характеристики				
3	Месяцы	январь	фев-раль	март	апрель	май	июнь	$E[x]$	$\sigma[x]$	$V[x]$		
4	Прибыль	210	200	157	140	190	183	180	26,60	0,15		
5												
6					Данные для построения графиков функций $f[x]$ и $F[x]$							
7												
8	x	100	108	116	124	132	140	148	156	164	172	180
9	$f[x]$	0,000	0,000	0,001	0,002	0,003	0,005	0,007	0,110	0,013	0,014	0,015
10	$F[x]$	0,001	0,003	0,008	0,018	0,036	0,066	0,114	0,183	0,274	0,382	0,500

Продолжение данных для построения графиков

		M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
7												
8	x	188	196	204	212	220	228	236	244	252	260	268
9	$f[x]$	0,014	0,013	0,010	0,007	0,005	0,003	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
10	$F[x]$	0,618	0,726	0,817	0,886	0,934	0,964	0,982	0,992	0,997	0,999	1,000

«прибыль», и оси Y (значений) — «$f[x]$» и второй оси Y (значений) — «$F[x]$». На вкладке **Линии сетки** снимем флажки, так как у нас два графика на одном рисунке; размещаем легенду справа. В окне последнего шага **Мастера диаграмм** укажем месторасположение диаграммы. **Готово**. На экране ненастроенная диаграмма.

Для настройки выделяем элементы диаграммы, подлежащие изменению. Щелкнем дважды по оси значений $f[x]$ и в открывшемся диалоговом окне **Формат оси** во вкладке **Шкала** установим минимальное значение шкалы — 0, максимальное — 0,018, цена основных делений — 0,002, **ОК**. На экране — графики функций $f[x]$ и $F[x]$ (рис.13.1).

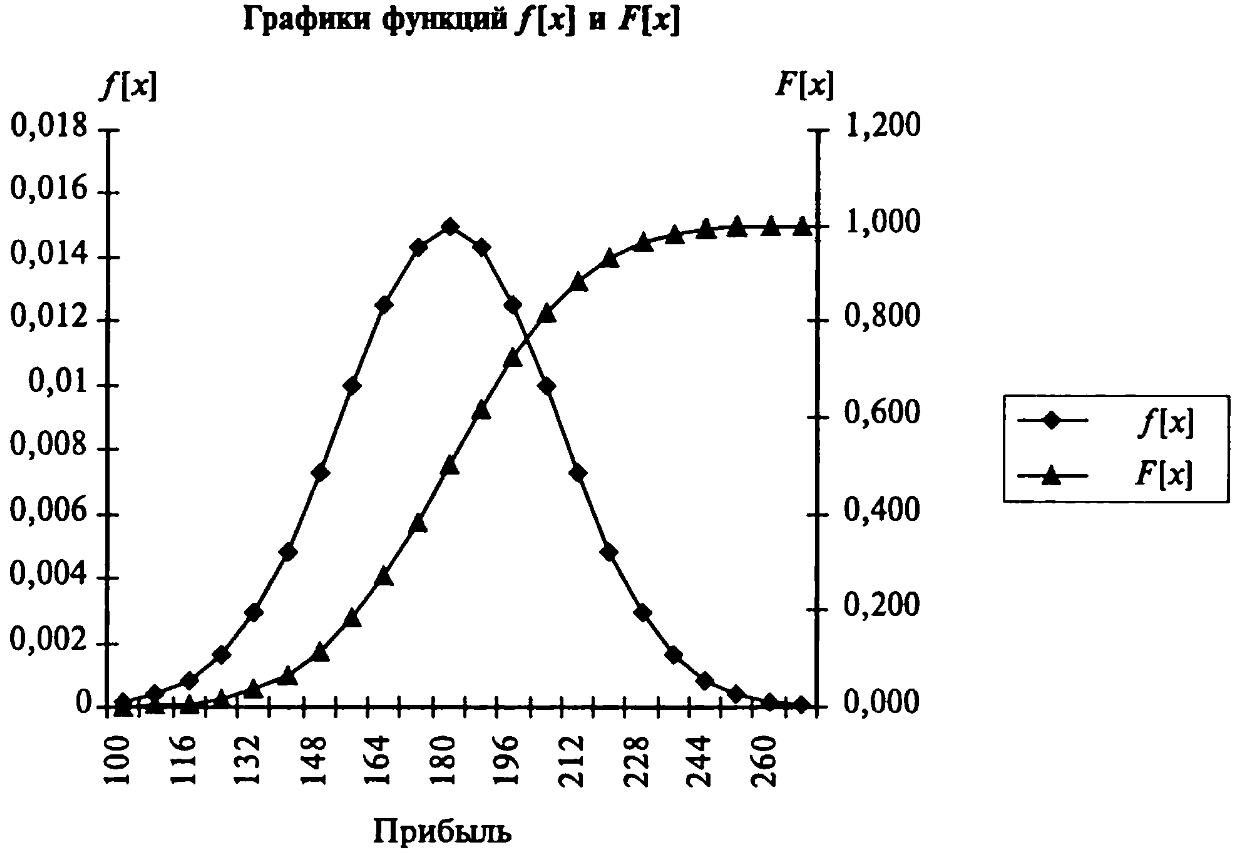


Рис. 13.1

При необходимости осуществим корректировку и редактирование графика. Для корректировки диаграмм можно использовать панель инструментов **Диаграммы**, для вызова которой необходимо щелкнуть **М1** в области диаграммы. Панель инструментов **Диаграммы** можно вывести, вызвав команду **Диаграммы** на панели инструментов в меню **Вид** (панель инструментов можно вызвать, также щелкнув **МП** по любой кнопке из главного меню). На панели инструментов **Диаграммы**, после щелчка **М1** по кнопке **Элементы диаграммы**, выводится список элементов диаграммы. Выбрав требуемый элемент и щелкнув по кнопке, находящейся справа от кнопки элементов диаграммы, выведем на экран диалоговое окно, в котором выполним соответствующие действия (вид и предназначение диалогового окна зависят от выбранного элемента диаграммы).

Из графика (рис.13.1) видно, что появление случайной величины $E[x]=180$ наиболее вероятно. С помощью графика интегральной функции $F[x]$ можно найти вероятность появления случайной величины в интервале, т.е. вероятность того, что величина x будет не более какого-то значения b, т.е. $P(x \le b)$. (Например, $P(x \le 140) = 0{,}66$). Для этого достаточно курсор подвести на нужную точку на графике (рядом с курсором в рамке будут указаны точка и соответствующее ей значение вероятности). Можно решать и обратную задачу: найти такое значение случайной величины, чтобы вероятность ее появления была равна заданному значению (например, $P(x \le 244) = 0{,}992$). Обратная задача в Excel решается статистической функцией НОРМОБР.

Решение практических задач часто связано с применением нормального стандартного распределения, описывающего на интервале [−3; 3] вероятность появления случайной величины t. Переход от случайной величины x к случайной величине t осуществляется по формуле $t = \dfrac{x - E[x]}{\sigma[x]}$ (в Excel с помощью функции НОРМАЛИЗАЦИЯ), а обратный переход — по формуле $x = E[x] + \sigma[x] \cdot t$.

Построение функции и графика для нормального стандартного распределения

Скопируем значения ячеек A8:W8 (табл. 13.1) в ячейки A6:W6 нового листа (табл. 13.2). $E[x] = 180$ занесем в ячейку H2 и $\sigma[x] = 26{,}6$ в ячейку I2.

Затем выполним: курсор — в B7, **Мастер функций**, **Статистические**, НОРМАЛИЗАЦИЯ (на экране диалоговое окно **Нормализация**). Введем в строку x — B6, **среднее** — $H$2, **Стандартное отклонение** — $I$2, **OK** (в ячейке B7 число −3). Далее следует нажать **МН** и протащить до W7 (на экране значения $-3 \le t \le 3$ в ячейках B7: W7).

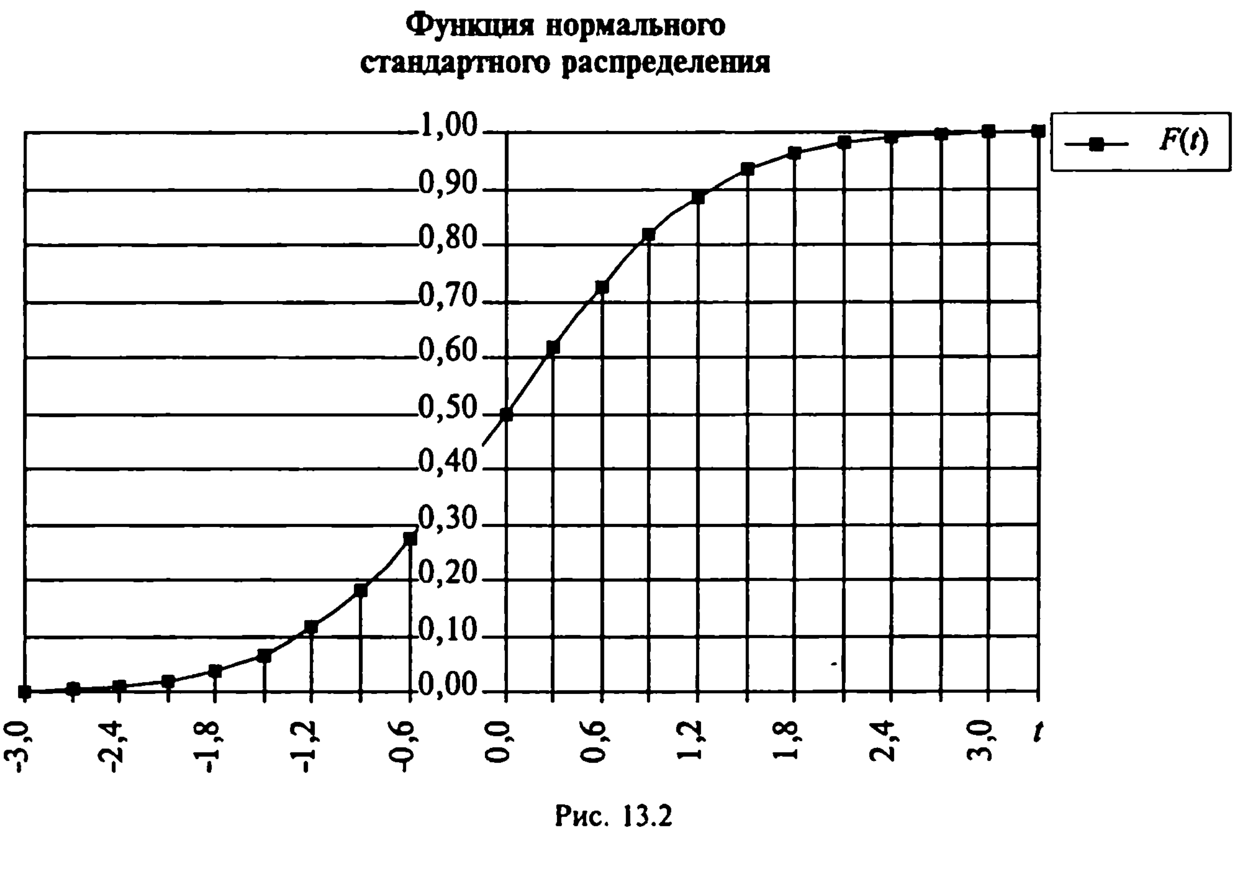


Рис. 13.2

Таблица 13.2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1								$E[x]$	$\sigma[x]$			
2								180	26,6			
3												
4					Данные для построения графика функции $F[t]$							
5												
6	x	100	108	116	124	132	140	148	156	164	172	180
7	t	–3	2,7	–2,4	–2,1	–1,8	–1,5	–1,2	–0,9	–0,6	–0,3	–0,0
8	$F[t]$	0,00	0,00	0,001	0,02	0,04	0,07	0,11	0,18	0,27	0,38	0,50

Продолжение данных для построения графиков функции $F(t)$

5		M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
6	x	188	196	204	212	220	228	236	244	252	260	268
7	t	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0	3,0
8	$F[t]$	0,62	0,73	0,82	0,89	0,93	0,96	0,98	0,99	1,00	1,00	1,00

Курсор — в B8, **Мастер функций**, **Статистические**, НОРМСТРАСП. В строку Z диалогового окна введем B7; **OK**. В B8 находится $F(-3)=0{,}00$. Скопируем протаскиванием B8 до W8 (на экране значения функции $F(t)$).

Используя **Мастер диаграмм**, построим график функции $F(t)$ (рис.13.2), из которого видно, что при $t = 0$ $F(0) = 0{,}5$.

Обратная задача заключается в нахождении значений t по значению $F(t)$. Так, значению $F[t] = 0{,}89$ соответствует точка $t = 1{,}2$. В Excel обратная задача решается функцией НОРМСТОБР.

13.3.2. Формирование исходных данных для детерминированного эквивалента задачи в *E*-постановке

В ячейки электронной таблицы Excel введем математические ожидания элементов задачи (13.22): $M[c_j]$, $M[a_{ij}]$, $M[b_i]$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$, (табл.13.3).

Формулы для вычисления расхода ресурсов поместим в ячейки E3:E5, значения функции — в E7. В ячейки B8:D8 введем значения $x_1 = x_2 = x_3 = 10$ (можно ввести координаты и другой точки, принадлежащей ОДР). В табл.13.4 представлены формулы. Далее, чтобы сформировать детерминированный эквивалент, занесем коэффициент вариабельности $v = 0{,}15$ в ячейку F9 и вычислим $\sigma[a_{ij}]$ и $\sigma[b_{ij}]$ по формулам $\sigma[a_{ij}] = E[a_{ij}] \cdot v$, $\sigma[b_i] = E[b_i] \cdot v$. Для этого поместим курсор в B12, выделим B12:D14, введем =(B3:D5)*F9, <Shift> + <Ctrl>+<Enter> (на экране в B12:D14 значения $\sigma[a_{ij}]$. Аналогично определим $\sigma[bi]$, для чего курсор поместим в G12, выделим G12:G14, введем =(G3:G5)*F9, <Shift> + <Ctrl> + <Enter> (на экране в G12:G14 значения $\sigma[b_i]$).

Далее вычислим значения $\sigma^2[a_{ij}] \cdot x_j^2$, для чего курсор — в B17, введем формулу =(B12^2)*(B$8^2), скопируем B17 в B17:D19.

Вычислим $\sum_{i=1}^{3} \sigma^2[a_{ij}] \cdot x_j^2$ в ячейках E17:E19, для этого курсор — в E17, введем =СУММ(B17:D17), скопируем E17 в E18:E19. Найдем $\sigma^2[b_i]$: курсор в G17, введем = G12^2, скопируем G17 в G18:G19.

Вычислим $W_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} \sigma^2[\alpha_{ij}] \cdot x_j^2 + \sigma^2[b_i]}$: курсор — в H17, введем = КОРЕНЬ (СУММ (E17;G17)), скопируем H17 в H18:H19.

Для вычисления стохастического параметра $t[\beta]W_i$ примем для всех ограничений $\beta = 0{,}8$ и введем это значение в ячейку I10, в I11 вычислим $t[\beta]$ = НОРМСТОБР (I10)=0,84, курсор поместим в I17, введем =H17*I$11, скопируем I17 в I18:I19.

Наконец для вычисления левой части ограничений с учетом стохастической составляющей поместим курсор в J17, введем =СУММ(E3;I17), скопируем J17 в J18:J19, в K17:K18 занесем знак ограничений «<=» и для удобства в L17:L19 скопируем правые части ограничений из ячеек G3:G5.

Таблица 13.3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	Ресурсы	Про-дукц. 1	Про-дукц. 2	Про-дукц. 3	Затраты ресурс.	Знак	Пр. часть огр.					
3	Компл. изд.	4	6	8	180.00	<=	3120					
4	Сырье	2	8	10	200.00	<=	3000					
5	Материалы	6	9	4	190.00	<=	3150					
6					Знач. функц.							
7	Прибыль	240	210	180	6300.00	max						
8	Знач. перем.	10.00	10.00	10.00								
9					V = 0.15							
10		Формирование детерминированного эквивалента						вероятн.[β] =	0,8			
11			$\sigma[a_{ij}]$				$\sigma[b_i]$	НОРМСТОБР[β] =	0,84 = t[β]			
12	Компл. изд.	0,6	0,9	1,2			468					
13	Сырье	0,3	1,2	1,5			450					
14	Материалы	0,9	1,35	0,6			472,5					
15												
16			$\sigma^2[a_{ij}]*x_j^2$		$\sum_{j=1}^{3}\sigma^2[a_{ij}]\cdot x_j^2$		$\sigma^2[b_i]$	W_i	$t[\beta]\cdot W_i$	Лев. часть	Знак	
17	Компл. изд.	36,00	81,00	144,00	261,00		219 024	468.28	394.11	574,11	<=	3120
18	Сырье	9,00	144,00	225,00	378,00		202 500	450.42	379.08	579,08	<=	3000
19	Материалы	81,00	182,25	36,00	299,25		223 256,25	472.82	397.93	587,93	<=	3150

Таблица 13.4

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Ресурсы	Продукц. 1	Продукц. 2	Продукц. 3	Затраты ресурс.	Знак	Пр. часть огр.
3	Компл. изд.	4	6	8	=СУММПРОИЗВ(B$8:D$8:B3:D3)	<=	3120
4	Сырье	2	8	10	=СУММПРОИЗВ(B$8:D$8:B4:D4)	<=	3000
5	Материалы	6	9	4	=СУММПРОИЗВ(B$8:D$8:B5:D5)	<=	3150
6					Знач. функц.		
7	Прибыль	240	210	180	=СУММПРОИЗВ(B$8:D$8:B7:D7)	max	
8	Знач. перем.	10.00	10.00	10.00			
9					$V = 0{,}15$		
10		Формирование детерминированного эквивалента					
11			$\sigma[a_{ij}]$				$\sigma[b_i]$
12	Компл. изд.	=(B3:D5)*F9	=(B3:D5)*F9	=(B3:D5)*F9			=(G3:G5)*F9
13	Сырье	=(B3:D5)*F9	=(B3:D5)*F9	=(B3:D5)*F9			=(G3:G5)*F9
14	Материалы	=(B3:D5)*F9	=(B3:D5)*F9	=(B3:D5)*F9			=(G3:G5)*F9
15							
16			$\sigma^2[a_{ij}] \cdot x_j^2$		$\sum_{j=1}^{3} \sigma^2[a_{ij}] \cdot x_j^2$		$\sigma^2[b_i]$
17	Компл. изд.	=(B12^2)*(B$8^2)	=(C12^2)*(C$8^2)	=(D12^2)*(D$8^2)	=СУММ(B17:D17)		=G12^2
18	Сырье	=(B13^2)*(B$8^2)	=(C13^2)*(C$8^2)	=(D13^2)*(D$8^2)	=СУММ(B18:D18)		=G13^2
19	Материалы	=(B14^2)*(B$8^2)	=(C14^2)*(C$8^2)	=(D14^2)*(D$8^2)	=СУММ(B19:D19)		=G14^2

Продолжение табл. 13.4

	H	I	J	K	L
10	вероятн. [β] =	0,8			
11	НОРМСТОБР [β] =	НОРМСТОБР (I10)			
12					
13					
14					
15					
16	W_i	$t[\beta]^{*} \cdot W_i$	Лев. часть	Знак	$E[b_i]$
17	=КОРЕНЬ(СУММ(E17:G17)	=H17*I*11	=СУММ(E3:I17)	<=	3120
18	=КОРЕНЬ(СУММ(E18:G18)	=H18*I*11	=СУММ(E4:I18)	<=	3000
19	=КОРЕНЬ(СУММ(E19:G19)	=H19*I*11	=СУММ(E5:I19)	<=	3150

Таблица 13.5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	Ресурсы	Про-дукц. 1	Про-дукц. 2	Продукц. 3	Затраты ресурс.	Знак	Пр. часть огр.					
3	Компл. изд.	4	6	8	180.00	<=	3120					
4	Сырье	2	8	10	200.00	<=	3000					
5	Материалы	6	9	4	190.00	<=	3150					
6					Знач. функц.							
7	Прибыль	240	210	180	110133.78	max						
8	Знач. перем.	335.21	0.00	164.9								
9					$V = 0.15$							
10	Формирование детерминированного эквивалента							вероятн.[β] =	0,8			
11			$\sigma[a_{ij}]$				$\sigma[b_i]$	НОРМСТОБР[β] =	0,84			
12	Компл. изд.	0.6	0.9	1.2			468					
13	Сырье	0.3	1.2	1.5			450					
14	Материалы	0.9	1.35	0.6			472,5					
15												
16			$\sigma^2[a_{ij}] * x_j^2$		$\sum_{j=1}^{3} \sigma^2[a_{ij}] \cdot x_j^2$		$\sigma^2[b_i]$	W_i	$t[\beta] \cdot W_i$	Лев. часть	Знак	
17	Компл. изд.	40 452,61	0,00	39 157,67	79 610,28		219 024	546,47	459,92	3120,00	<=	3120
18	Сырье	10 113,15	0,00	61 183,86	71 297,01		202 500	523,26	440,38	2759,84	<=	3000
19	Материалы	91 018,38	0,00	9 789,42	100 807,79		223 256,25	569,27	479,11	3150,00	<=	3150

13.3.3. Решение задачи

Решение стохастической задачи (ее детерминированного эквивалента) свелось к решению задачи нелинейного программирования.

Реализация решения следующая. Вызовем последовательно **Сервис, Поиск решения**, в диалоговом окне **Поиск решения** введем: **Целевая функция** — E7, максимизировать; **Изменяя ячейки** — B8:D8; **Ограничения** — B8:D8>= B9:D9, J17:J19<= L17:L19. **Выполнить** (на экране результат решения задачи, табл.13.5).

Согласно полученному решению объемы производства продукции и прибыль характеризуются следующими значениями:

Продукция 1: $x_1 = 335{,}21$, Продукция 2: $x_2 = 0$,

Продукция 3: $x_3 = 164{,}9$, Прибыль: $f\max = 110133{,}78$.

Целочисленное решение этой задачи следующее :

$$x_1 = 335,\ x_2 = 0,\ x_3 = 165,\ f_{\max} = 110100.$$

Рассмотрим влияние стохастических условий на показатели решения задачи. При коэффициенте вариабельности $v = 0{,}15$ осуществим решение задачи для $0{,}5 \le \beta \le 0{,}9$ с шагом 0,1, а также $\beta = 0{,}99$ и $\beta = 0{,}999$.

Результаты решения представлены в табл.13.6, из которой видно, что увеличение вероятности β ухудшает показатели прибыли и объемов производства.

Таблица 13.6

β	Прибыль ($f_{\max}$)	Объем производства			Коэффициент относительного ухудшения целевой функции
		Продукция 1	Продукция 2	Продукция 3	
0,5	129 825	397,5	0	191,25	1,00
0,6	123 660,14	377,86	0	183,19	0,95
0,7	117 300,66	357,73	0	174,69	0,90
0,8	110 133,78	335,21	0	164,9	0,85
0,9	100 621,41	305,56	0	151,59	0,77
0,99	79 578,97	240,8	0	121,04	0,61
0,999	65 173,43	196,97	0	99,45	0,50

В табл. 13.7 представлена информация, показывающая влияние коэффициента вариабильности v на результаты решения задачи при $\beta = 0{,}8$.

Таблица 13.7

v	Прибыль (f_{max})	Объем производства			Коэффициент относительного ухудшения целевой функции
		Продукция 1	Продукция 2	Продукция 3	
0	129 825	397,5	0	191,25	1,00
0,05	123 011,53	375,8	0	182,33	0,95
0,10	116 457,41	355,07	0	173,55	0,90
0,15	110 133,78	335,21	0	164,9	0,85
0,20	104 015,16	316,11	0	156,38	0,80
0,25	98 078,78	297,68	0	147,97	0,75
0,3	92 304,14	279,84	0	139,68	0,71

13.3.4. Решение стохастических задач в *P*-постановке

Чтобы решить задачу (13.22) в P-постановке, необходимо по формулам (13.20) и (13.21) определить $E[f(x)]$ и $\sigma[f(x)]$.

Найдем математическое ожидание целевой функции

$$E[f(x)] = \sum_{j=1}^{3} E[c_j]x_j \to \max$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{3} E[a_{ij}] \cdot x_j \le E[b_i], i = \overline{1,3},$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Для этого скопируем ячейки A1:G8 из табл. 13.3 в ячейки A1:G8 чистого листа и найдем решение задачи. В результате получим в ячейке E7: $E[f(x)] = 129\,825$.

Чтобы определить $\sigma[f(x)]$, необходимо, согласно (13.21), знать $\sigma[c_j]$. Для третьего вида продукции в параграфе 13.3.1 была вычислена величина $\sigma[c_3]$ на основе данных наблюдения показателей прибыли за полугодие. Если бы имелись данные наблюдений прибыли для первого и второго видов продукции, то $\sigma[c_1]$ и $\sigma[c_2]$ мы бы вычислили аналогично и полученные значения подставили в (13.21).

Будем считать, что наблюдения не осуществлялись и $\sigma[c_1]$ $\sigma[c_2]$ вычислить не представляется возможным, тогда $\sigma[f(x)]$ определим по формуле

$$\sigma[f(x)] = E[f(x)] \cdot v.$$

Приняв, как и ранее, $v = 0{,}15$, занесем это значение в ячейку F9. Тогда $\sigma[f(x)] =$ E7* F9 = 19473,75 ≈19474 занесем в ячейку L8.

Читателю рекомендуется найти функцию плотности вероятности $f[f(x)]$ и интегральную функцию $F[f(x)]$ и построить их графики.

В ячейку K7 введем функцию для нахождения $P[f(x)]$, для чего выполним последовательно: курсор — в K7, **Мастер функций, Статистические,** НОРМРАСП. В диалоговом окне НОРМРАСП в строку «X» вводим E7, в строку **среднее** — 129825 (среднее значение функции, полученное при средних значениях всех параметров задачи), в строку **стандартное отклонение** — 19474 и в строку **интегральный** — ИСТИНА, **ОК.** На экране в ячейке K7 значение $P[f(x)] = 0{,}5$. Это говорит о том, что в результате решения задачи полученному значению функции $E[f(x)] = 129825$ соответствует вероятность $P[f(x)] = 0{,}5$.

Далее скопируем на этот лист в ячейки A10:L19 оставшуюся часть массива, находящуюся в ячейках A10:L19 табл.13.3, где был сформирован детерминированный эквивалент задачи с вероятностными ограничениями.

Решение задачи с вероятностными ограничениями и заданным значением $P[f(x)]$

Вызовем: **Сервис, Поиск решения** (на экране диалоговое окно **Поиск решения**). Зададим $P[f(x)] = 0{,}65$ и установим в этом диалоговом окне: **целевую ячейку** — K7, **значению равному** — 0,65, **изменяя ячейки**: B8:D8, **ограничения**: B8:D8>= B9:D9; удалим ограничения E3:E5<=G3:G5 и не будем вводить ограничения по ресурсам, так как при заданной вероятности $P[f(x)] = 0{,}65$ (большей 0,5), которой соответствовали $E[f(x)] = 129825$ и $\sigma[f(x)] = 19474$, потребуется больше ресурсов (если бы мы ввели ограничения по ресурсам J17:J19<=L17:L19, то в этом случае условия задачи оказались бы противоречивыми).

Осуществим оптимизацию командой **Выполнить**, предварительно сняв флажок **Линейная модель** (на экране результат решения задачи — табл.13.8).

Из результата решения видно, что заданная вероятность выполнена — значение в ячейке K7 равно 0,65, значение функции $f(x) = 137328{,}73$; $\sigma[f(x)] = 20599$. Это оптимальное решение не единственное. Кроме того, видно, что значения ресурсов в ячейках J17:J19 превосходят правые части ограничений, находящиеся в ячейках L17:L19. Аналогично затраты ресурсов в ячейках E3 и E5 выше значений правых частей ограничений в ячейках G3 и G5.

Решение задачи с вероятностными ограничениями и $P[f(x)] \to \max$

Исходные данные возьмем такие же, как при решении задачи с $P[f(x)] = 0{,}65$. Увеличим объем ресурсов в ячейках L17:L19, приняв их равными 3890; 3500; 3950. Далее: **Сервис, Поиск решения.**

В диалоговом окне **Поиск решения** вводим: **установить целевую ячейку — E7, максимизировать, изменяя ячейки** — B8:D8; **ограничения** — B8:D8>= B9:D9; J17:J19<=L17:L19. **Выполнить** — на экране решение задачи (табл.13.9),

Таблица 13.8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	Ресурсы	Продукц.1	Продукц.2	Продукц.3	Затраты ресурс.	Знак	Пр.часть огр.					
3	Компл. изд.	4	6	8	180.00	<=	3120					
4	Сырье	2	8	10	200.00	<=	3000					
5	Материалы	6	9	4	190.00	<=	3150					
6					Знач. функц.							
7	Прибыль	240	210	180	137328,75	max				$P[f(x)] = 0.65$		
8	Знач.перем.	417.51	0.00	206.25						$\sigma[f(x)] = V^*E[f(x)] = 20599$		
9					V = 0.15							
10	Формирование детерминированного эквивалента							вероятн.[β] = 0.8				
11			$\sigma[a_{ij}]$				$\sigma[b_i]$	НОРМСТОБР[b]=0,84				
12	Компл. изд.	0.6	0.9	1.2			468					
13	Сырье	0.3	1.2	1.5			450					
14	Материалы	0.9	1.35	0.6			472,5					
15												
16			$\sigma^2[a_{ij}]*x_j^2$		$\sum_{j=1}^{3}\sigma^2[a_{ij}]\cdot x_j^2$		$\sigma^2[b_i]$	W_i	$t[\beta]\cdot W_i$	Лев. часть	Знак	$E[b_i]$
17	Компл. изд.	62 754,12	0,00	61 258,45	124 012,57		219 024	585,69	449,93	3813,01	<=	3120
18	Сырье	15 688,53	0,00	95 716,33	111 404,86		202 500	560,27	471,54	3369,10	<=	3000
19	Материалы	141 196,76	0,00	15 314,61	156 511,37		223 256,25	616,25	518,65	3848,74	<=	3150

Таблица 13.9

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1				Показатели								
2	Ресурсы	Продукц.1	Продукц.2	Продукц.3	Затраты ресурс.	Знак	Пр.часть огр.					
3	Компл. изд.	4	6	8	3393,09	<=	3120					
4	Сырье	2	8	10	2945,47	<=	3000					
5	Материалы	6	9	4	3424,41	<=	3150					
6					Знач.функц.							
7	Прибыль	240	210	180	141139,49	max					$P[f(x)]=0.72$	
8	Знач. перем.	431.97	0.00	208.15							$\sigma[f(x)]=V^{*}E[f(x)] = 21171$	
9					$V=$ 0.15							
10	Формирование детерминированного эквивалента							вероятн.[β] = 0.8				
11			$\sigma[a_{ij}]$				$\sigma[b_i]$	НОРМСТОБР[β]=0,84				
12	Компл. изд.	0.6	0.9	1.2			468					
13	Сырье	0.3	1.2	1.5			450					
14	Материалы	0.9	1.35	0.6			472,5					
15												
16			$\sigma^2[a_{ij}]^{*}x_j^2$		$\sum_{j=1}^{3}\sigma^2[a_{ij}]\cdot x_j^2$		$\sigma^2[b_i]$	W_i	$t[\beta]\cdot W_i$	Лев. часть	Знак	$E[b_i]$
17	Компл. изд.	67 174,03	0,00	62 392,32	129 566,34		219 024	590,42	496,91	3890,00	<=	3890
18	Сырье	16 793,51	0,00	97 488,00	114 281,50		202 500	562,83	473,69	3419,16	<=	3500
19	Материалы	151 141,56	0,00	15 598,08	166 739,64		223 256,25	624,50	525,59	3950,00	<=	3950

$P[f(x)]_{max} = 0{,}72$. При этом расход комплектующих изделий составляет 3890 единиц, сырья — 3419,16 единиц и материалов — 3950 единиц.

Читателю рекомендуется решить задачу с детерминированными ограничениями и целевыми функциями $P[f(x)] = 0{,}6$, $P[f(x)] \to \max$ и сравнить результаты решения с соответствующими решениями, полученными в условиях вероятностных ограничений.

Для осуществления сравнительного анализа решений задач и установления влияния $P[f(x)]$ на другие параметры задачи рекомендуется найти оптимальные решения при различных задаваемых значениях вероятности. При решении задач по целевой функции $P[f(x)] \to \max$ рекомендуется находить оптимальные решения при различных значениях полностью используемых ресурсов.

13.4. СТОХАСТИЧЕСКАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

13.4.1. Некоторые подходы к решению задачи

В главе 2 (подглава 2.3) транспортная задача рассматривалась как детерминированная. Математическая модель ее формировалась следующим образом: найти такие объемы перевозок грузов x_{ij}, при которых затраты

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{13.23}$$

и выполняются ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{13.24}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ \ j = \overline{1,n}, \tag{13.25}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}. \tag{13.26}$$

Задача решалась в предположении, что запасы груза a_i, спрос на него b_j и стоимости перевозок c_{ij} являются точно известными величинами.

Рассмотрим случай, когда объем спроса b_j в пунктах потребления является неопределенным.

Предположим, что значения спроса b_3 и b_4 в рассматриваемой задаче являются неопределенными. На основе обработки статистической информации об уровне спроса 3-го и 4-го потребителей получены следующие распределения вероятностей:

$$P(b_3 = 100) = P(b_3 = 300) = P(b_3 = 500) = \frac{1}{3},$$

$$P(b_4 = 0) = P(b_4 = 200) = P(b_4 = 600) = P(b_4 = 800) = \frac{1}{4}.$$

Тогда математическое ожидание (среднее значение) спроса 3-го потребителя $E(b_3)=\frac{1}{3}100+\frac{1}{3}300+\frac{1}{3}500=300.$ Аналогично $E(b_4)=\frac{1}{4}(0+200+600+$ $+800)=400.$ Условия задачи представлены в табл.13.10.

Таблица 13.10

Заводы	Потребители				Объем производства
	1	2	3	4	
1	30	50	62	10	600
2	40	50	80	20	800
3	50	10	30	30	400
Спрос	500	600	$E(b_3)=300$	$E(b_4)=400$	

Рассмотрим два подхода к решению задачи.

а) **Построение расширенной транспортной модели**

Расширенная транспортная модель математически эквивалентна двухшаговой стохастической модели. Предположим, что за избыточные поставки в 3-й и 4-й пункты спроса штрафные санкции не применяются, а за недопоставку взимается штраф в размере f_j ($j=3$; 4) за каждую недопоставленную единицу продукции.

Функция потерь имеет вид

$$C_j(b_j-x_j)=\begin{cases}0,\text{если } b_j\le x_j.\\ f_j(b_j-x_j),\text{если } b_j>x_j,\end{cases} \quad (13.27)$$

где $x_j=\sum_{i=1}^{3}x_{ij}$ ($j=3$; 4) — суммарный объем поставок в j-й пункт назначения.

Введем обозначения $s_j=b_j-x_j$. Тогда, если $s_j\le 0$, то s_j — избыточные поставки, а если $s_j>0$, имеют место недопоставки. Среднее значение функции потерь

$$C_j(x_j)=\sum_{b_j^{(k)}\ge x_j}f_j(b_j^{(k)}-x_j)\,P[b_j=b_j^{(k)}], \quad (13.28)$$

где $b_j^{(k)}$ — возможные уровни спроса (в нашем примере: $b_3^{(1)}=100$; $b_3^{(2)}=300$; $b_3^{(3)}=$ $=500$; $b_4^{(1)}=0$; $b_4^{(2)}=200$; $b_4^{(3)}=600$; $b_4^{(4)}=800$).

С целью сокращения расчетов и размеров таблицы транспортной задачи вычислим значения $C_j(x_j)$, $j=3{,}4$, при значениях x_3 и x_4 кратных 100.

Рассчитаем средние потери при $x_3=0$.

$$C_3(0)=\sum_{b_3^{(k)}=100,300,500}f_3(b_3^{(k)}-0)\cdot P(b_3=b_3^{(k)})=f_3(100-0)\cdot\frac{1}{3}+f_3(300-0)\cdot\frac{1}{3}+$$

$$+f_3(500-0)\cdot\frac{1}{3}=300f_3.$$

Если $x_3 = 100$, то $C_3(x_3) = C_3(100) = \sum\limits_{b_3^{(k)}=300,500} f_3(b_3^{(k)} - 100) \cdot P[b_3 = b_3^{(k)}] =$

$$= f_3(300-100)\cdot\frac{1}{3} + f_3(500-100)\cdot\frac{1}{3} = f_3(\frac{200}{3} + \frac{400}{3}) = 200f_3.$$

Для $x_3 = 200$ $C_3(200) = \sum\limits_{b_3^{(k)}=300,500} f_3(b_3^{(k)} - 200) \cdot P(b_3 = b_3^{(k)}) =$

$$= f_3(300-200)\cdot\frac{1}{3} + f_3(500-200)\cdot\frac{1}{3} = f_3(\frac{100}{3} + \frac{300}{3}) = \frac{400}{3}f_3,$$

$$C_3(300) = \sum_{b_3^{(k)}=500} f_3(b_3^{(k)} - 300)\cdot P(b_3 = b_3^{(k)}) = f_3 \cdot 200 \cdot \frac{1}{3} = \frac{200}{3}f_3,$$

$$C_3(400) = \sum_{b_3^{(k)}=500} f_3(b_3^{(k)} - 400)\cdot P(b_3 = b_3^{(k)}) = \frac{100}{3}f_3,$$

$$C_3(500) = 0.$$

Аналогично рассчитываются средние потери для 4-го потребителя.

Сведения о средних потерях для 3-го и 4-го потребителей приведены в табл.13.11.

Таблица 13.11

x_j	$C_3(x_3)$	$C_3(x_3) - C_3(x_3+100)$	$C_4(x_4)$	$C_4(x_4) - C_4(x_4+100)$
0	$300f_3$	$100f_3$	$400f_4$	$75f_4$
100	$200f_3$	$\frac{200}{3}f_3$	$325f_4$	$75f_4$
200	$\frac{400}{3}f_3$	$\frac{200}{3}f_3$	$250f_4$	$50f_4$
300	$\frac{200}{3}f_3$	$\frac{100}{3}f_3$	$200f_4$	$50f_4$
400	$\frac{100}{3}f_3$	$\frac{100}{3}f_3$	$150f_4$	$50f_4$
500	0	0	$100f_4$	$50f_4$
600	0	0	$50f_4$	$25f_4$
700	0	0	$25f_4$	$25f_4$
800	0	0	0	0

Из табл. 13.11 видно, что $C_j(0) = f_j E[b_j]$ и функция $C_j(x_j)$ стремится к нулю при стремлении x_j к максимально возможному значению. По данным табл.13.11

нетрудно убедиться, что функция $C_j(x_j)$ является выпуклой, так как при целых значениях x_j выполняются соотношения:

$$C_j(x_j+100)-C_j(x_j) \geq C_j(x_j)-C_j(x_j-100).$$

Преобразуем стохастическую модель в расширенную транспортную задачу, связав с каждой сотней единиц возможного спроса b_3 и b_4 дополнительный пункт назначения (спроса). В нашей задаче для b_3 имеется 5 пунктов назначения, так как максимальный спрос этого пункта равен 500, а для b_4 еще 8 пунктов назначения, так как наибольший спрос равен 800 (теперь видны ограниченность применения этой модели и причина допущения кратности поставок 100 единицам продукции). Так как в каждом пункте назначения требуется по 100 единиц продукции, то суммарный спрос равен 500 + 600 + 100 · 5 + 100 · 8 = = 2400 единиц, а суммарное предложение равно 1800 единиц. Так как спрос превышает предложение, введем в модель четвертого фиктивного поставщика с предложением $d_4 = 600$ единиц. Нетрудно видеть, что объем продукции, поставляемой от четвертого поставщика, соответствует неудовлетворенному спросу. Так как спрос 1-го и 2-го потребителей детерминированный и должен быть удовлетворен полностью, то запретим поставки этим потребителям от четвертого поставщика, для чего введем в клетки (4, 1) и (4, 2) (табл. 13.12) высокие стоимости перевозки единицы груза, равные 700 тыс. руб.

Расширенная транспортная задача приведена в табл. 13.12.

Отметим, что в табл. 13.12 c_{ij} для столбцов $j=\overline{3,7}$ одинаковые. В столбцах $j=\overline{8,15}$ c_{ij} тоже совпадают.

В четвертой строке записаны значения приращений $c_j(x_j)-c_j(x_j+100)$ из табл.13.11.

Следует обратить внимание на то, что сумма приращений $C_3(x_3)-C_3(x_3+$ $+100)$ по всем значениям x_3 равняется $C_3(0)$, т.е. $300f_3$, то же справедливо и для суммы приращений $C_4(x_4)-C_4(x_4+100)$ по всем возможным значениям x_4, которая равна $C_4(0)$, т.е. $400f_4$. Так как функция $C_j(x_j)$ является убывающей и выпуклой, коэффициенты при f_j в столбцах, содержащих штрафы, убывают с ростом индекса j. Из этого следует, что d_4=600 при поиске оптимального решения будет распределяться в столбцах, соответствующих 3-му и 4-му потребителям, начиная с 7-го и 15-го соответственно, переходя последовательно в столбцы, расположенные левее. Подчеркнем еще раз, что поставки продукции от четвертого поставщика представляют собой неудовлетворенный спрос.

Рассмотрим такой случай. Предположим, что 400 единиц продукции из d_4 = 600 распределены по столбцам 4, 5, 6 и 7 (табл. 13.12). Тогда объем поставки третьему потребителю x_3 = 100, так как на основе данных табл. 13.12 и табл. 13.11 имеем

$$C_3(x_3)=\frac{200}{3}f_3+\frac{200}{3}f_3+\frac{100}{3}f_3+\frac{100}{3}f_3=200\,f_3=C_3(100).$$

В зависимости от функции штрафа рассматриваемая задача может быть линейной и нелинейной.

Таблица 13.12

Заводы	Потребители															Предложение
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	30	50	62	62	62	62	62	10	10	10	10	10	10	10	10	$a_1 = 600$
2	40	50	80	80	80	80	80	20	20	20	20	20	20	20	20	$a_2 = 800$
3	50	10	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	$a_3 = 400$
4	700	700	$100 f_3$	$\frac{200}{3} f_3$	$\frac{200}{3} f_3$	$\frac{100}{3} f_3$	$\frac{100}{3} f_3$	$75 f_4$	$75 f_4$	$50 f_4$	$50 f_4$	$50 f_4$	$50 f_4$	$25 f_4$	$25 f_4$	$d_4 = 600$
Спрос	$b_1 = 500$	$b_2 = 600$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	2400 / 2400
					b_3							b_4				

Зададим три варианта уровня штрафа и решим задачу средствами Excel при:

1) $f_3 = f_4 = 1$;

2) $f_3 = 3,\ f_4 = 1$;

3) $f_3 = 1,\ f_4 = 3$.

В табл.13.13 представлены решения при заданных значениях $f_j\,(j = 3; 4)$.

В правом нижнем углу каждого решения представлено минимальное значение функции с учетом штрафа. Чтобы лучше представить влияние штрафов на результат решения задачи, занесем коэффициенты функции каждого из вариантов при заданных $f_j\,(j = 3,\ 4)$ для 3-го и 4-го потребителей в табл.13.14.

В первом варианте в 14-м и 15-м столбцах штрафы самые низкие, поэтому от 4-го (фиктивного) поставщика завезено 4-му потребителю 200 единиц продукции (фактически на 200 единиц его спрос не удовлетворен). В остальном распределении продукции играли роль не только штрафы, но и стоимости перевозки, а они, как видно из табл.13.12, от 1-го поставщика к 4-му потребителю самые низкие, что и обеспечило поставку в объеме 600 единиц 4-му потребителю.

В решении 2 (табл.13.13), когда штрафы за недопоставку продукции 3-му потребителю увеличены в три раза, картина резко изменилась в его пользу. Ему недопоставлено всего 100 единиц продукции.

Решение 3 соответствует увеличению в три раза штрафа за недопоставку продукции 4-му потребителю, что привело к непоставке продукции 3-му потребителю.

Таблица 13.14

Варианты функции	Потребители												
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	100	66,67	66,67	33,3	33,3	75	75	50	50	50	50	25	25
2	300	200	200	100	100	75	75	50	50	50	50	25	25
3	100	66,67	66,67	33,3	33,3	225	225	150	150	150	150	75	75

Из примера видно, насколько осторожно необходимо относиться к выбору величины штрафа.

б) **Метод вероятностных ограничений**

Применение метода вероятностных ограничений рассмотрим на примере задачи, представленной в табл.13.10.

Напомним, что спрос 3-го и 4-го потребителей является случайной величиной, при этом в условии задачи известны вероятности величин спроса. Эти вероятности следующие:

$$P[b_3 = 100] = P[b_3 = 300] = P[b_3 = 500] = 1/3,$$

$$P[b_4 = 0] = P[b_4 = 200] = P[b_4 = 600] = P[b_4 = 800] = 1/4.$$

Таблица 13.13

Решение 1 при $f_3 = 1$, $f_4 = 1$

Поставщики	Потребители															Вывезено от поставщика
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	0	0	0	0	0	0	0	100	100	100	100	100	100	0	0	600
2	500	300	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	800
3	0	300	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	400
4	0	0	0	100	100	100	100	0	0	0	0	0	0	100	100	600
Завезено потребителю	500	600	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	71994

Решение 2 при $f_3 = 3$, $f_4 = 1$

Поставщики	Потребители															Вывезено от поставщика
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	300	0	0	0	0	0	0	100	100	100	0	0	0	0	0	600
2	200	600	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100	0	800
3	0	0	100	100	100	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	400
4	0	0	0	0	0	0	100	0	0	0	100	100	100	100	100	600
Завезено потребителю	500	600	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	92000

Решение 3 при $f_3 = 1$, $f_4 = 3$

Поставщики	Потребители															Вывезено от поставщика
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	0	0	0	0	0	0	0	100	100	100	100	100	100	0	0	600
2	500	200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100	0	800
3	0	400	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	400
4	0	0	100	100	100	100	100	0	0	0	0	0	0	0	100	600
Завезено потребителю	500	600	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	79494

Поскольку спрос точно не определен, то поставим условие, чтобы полная реализация продукции осуществлялась с вероятностью не меньшей β.

Это условие записывается в виде выражения

$$P[x_j \le b_j] \ge \beta_j,\ j = 3,4. \tag{13.29}$$

Выражение (13.29) означает вероятность того, что спрос b_j будет больше или равен величины предложения

$$x_j = \sum_{i=1}^{3} x_{ij},\ j = 3,4.$$

Если значения β_3 и β_4 заданы, то задача с вероятностными ограничениями эквивалентна задаче, в которой ограничения (13.29) заменяются на линейные ограничения

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \ge B_j,\ j = 3,\ 4 \text{ (детерминированный эквивалент).} \tag{13.30}$$

Здесь B_j — нижняя граница уровней спроса, которая удовлетворяет условию

$$P[b_j \le B_j] \ge \beta_j. \tag{13.31}$$

Остальные ограничения задачи и функция остаются без изменений (этот подход упоминался в параграфе 13.2.1 (пункт в)).

Используя вероятности величин спроса, найдем вероятности спроса и значения $B_j (j = 3,4)$ (табл.13.15).

Таблица 13.15

Спрос b_3	$b_3 \ge 100$	$b_3 \ge 300$	$b_3 \ge 500$	—
Вероятность спроса b_3	$P(b_3 \ge 100) = 1{,}0$	$P(b_3 \ge 300) = 2/3$	$P(b_3 \ge 500) = 1/3$	—
Значение B_3	100	300	500	—
Спрос b_4	$b_4 \ge 0$	$b_4 \ge 200$	$b_4 \ge 600$	$b_4 \ge 800$
Вероятность спроса b_4	$P(b_4 \ge 0) = 1{,}0$	$P(b_4 = 200) = 3/4$	$P(b_4 \ge 600) = 1/2$	$P(b_4 \ge 800) = 1/4$
Значение B_4	0	200	600	800

Далее можно находить оптимальные решения, задавая различные уровни вероятностей, а следовательно, и величин B_3 и B_4. Однако необходимо иметь в виду, что при заданных высоких значениях B_3 и B_4 задача может не иметь решения, так как суммарное предложение будет меньше суммарного спроса. В рассматриваемом примере $B_3 + B_4 \le 700$. Отсюда следует, что возможны следующие варианты значений B_3 и B_4:

1) $B_3 = 100$, $B_4 = 0$; 2) $B_3 = 300$, $B_4 = 200$; 3) $B_3 = 500$, $B_4 = 200$;
4) $B_3 = 100$, $B_4 = 200$; 2) $B_3 = 100$, $B_4 = 600$; 3) $B_3 = 300$, $B_4 = 0$;
7) $B_3 = 500$, $B_4 = 0$;

К распределению 700 единиц продукции можно подойти и по-другому. Например, $x_3 = 100, 200, ..., 700$, а $x_4 = 700 - x_3$.

Можно задавать высокие значения B_3 и B_4, но в этом случае потребуется увеличение мощности заводов.

Рассмотрим несколько вариантов решений при различных значениях B_3 и B_4. Эти решения приведены в табл. 13.16. Вычисления выполнялись в Excel командой **Поиск решения** из меню **Сервис**.

Таблица 13.16

	A	B	C	D	E	F	G
1	Заводы			Потребители			
2		1	2	3	4	Запас	
3	1	30	50	62	10	600	
4	2	40	50	80	20	800	
5	3	50	10	30	30	400	
6	Спрос	500	600	B_3	B_4		
8	Решение при $B_3 = 100$, $B_4 = 0$						
9	Заводы		Потребители			Вывезено	
10		1	2	3	4	от пост.	Запас
11	1	0	0	0	600	600	600
12	2	50	300	0	0	800	800
13	3	0	300	100	0	400	400
14	Завез. потр.	500	600	100	600	47000	
15	Спрос	500	600	100	0		

8	Решение при $B_3 = 300$, $B_4 = 200$						
9	Заводы		Потребители			Вывезено	
10		1	2	3	4	от пост.	Запас
11	1	200	0	0	400	600	600
12	2	300	500	0	0	800	800
13	3	0	100	300	0	400	400
14	Завез. потр.	500	600	300	400	57000	
15	Спрос	500	600	300	200		

Окончание табл. 13.6

	A	B	C	D	E	F	G
8	Решение при $B_3 = 500, B_4 = 200$						
9	Заводы		Потребители			Вывезено	
10		1	2	3	4	от пост.	Запас
11	1	300	0	100	200	600	600
12	2	200	600	0	0	800	800
13	3	0	0	400	0	1100	400
14	Завез. потр.	500	600	500	200	67200	
15	Спрос	500	600	500	200		

	A	B	C	D	E	F	G
8	Решение при $B_3 = 500, B_4 = 600$						
9	Заводы		Потребители			Вывезено	
10		1	2	3	4	от пост.	Запас
11	1	500	0	0	100	600	600
12	2	0	0	0	800	800	800
13	3	0	600	500	0	1100	400
14	Завез. потр.	500	600	500	900	53000	
15	Спрос	500	600	500	600		

Так, например, при B_3=100, B_4=0 ограничения по объему поставок для 3-го и 4-го потребителей имеют вид: $x_3 = \sum_{i=1}^{3} x_{i3} \geq B_3, x_4 = \sum_{i=1}^{3} x_{i4} \geq B_4$. В диалоговом окне **Поиск решения** они представлены как D14:E14 ≥ D15:E15, в D14 находится формула =СУММ D11: D13, в E14 находится формула =СУММ E11: E13.

Из результата решения (табл. 13.16) следует, что $F_{\min} = 47\ 000$, $x_3 = 100 = B_3$, $x_4 = 600 > B_4 = 0$. Аналогично получены решения $F_{\min} = 57\ 000$, $x_3 = 300 = B_3$, $x_4 = 400 > B_3 = 200$, при $B_3 = 300$, $B_4 = 200$; $F_{\min} = 67\ 200$, $x_3 = 500 = B_3$, $x_2 = 200 = B_4$, при $B_3 = 500$, $B_4 = 200$.

В последнем решении (табл.13.16) при B_3= 500 и B_4= 600 ограничения по поставщикам записаны в виде $\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \geq a_i, i = \overline{1,3}$. Получено решение со значением функции $F_{\min} = 53\ 000$ — меньшим, чем в двух предыдущих вариантах. Однако в этом случае почти в три раза требуется увеличить мощность 3-го завода.

Возможны и другие подходы к решению задач такого типа.

Упражнения

13.1. Три базы поставляют однородный товар в четыре региона страны. Запасы товаров на базах известны. Известны стоимости перевозок единицы товара из каждой базы в каждый регион. Известен также объем спроса третьего и четвертого регионов. Спрос первых двух регионов точно не определен. Данные задачи представлены в табл. 13.17.

Таблица 13.17

База	Регион				Запас
	1	2	3	4	
1	7	3	5	1	10
2	4	1	11	6	3
3	2	9	8	12	4
Спрос	b_1	b_2	7	5	

Соответствующие распределения вероятностей для уровней спроса задаются соотношениями:

$$P[b_1 = 1] = P[b_1 = 3] = P[b_1 = 5] = 1/3,$$

$$P[b_2 = 0] = P[b_2 = 1] = P[b_2 = 3] = P[b_2 = 4] = 1/4.$$

Тогда $E[b_1] = 3$; $E[b_2] = 2$.

Требуется решить задачу:

а) путем построения расширенной транспортной модели с уровнями штрафов $f_1 = 3$; $f_2 = 4$;

б) методом вероятностных ограничений при $\beta_1 = 2/3$, $\beta_2 = 3/4$; $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1/4$.

13.2. Условие задачи приведено в упражнении 2.17. Считать параметры, указанные в условии задачи, случайными величинами, представленными средними значениями.

13.2.1. Решить задачу в E-постановке:

а) Коэффициенты в целевой функции являются случайными, а остальные параметры детерминированные (в качестве детерминированных значений взять средние величины, указанные в условии задачи).

б) Все параметры являются случайными величинами. Ограничения в задаче представить в виде выражений (13.8)–(13.9).

в) Коэффициенты в целевой функции являются случайными, а ограничения по всем трем ресурсам должны выполняться с вероятностью ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0{,}75$). Общий вид модели этой задачи представлен выражениями (13.11), (13.13), (13.14). Безусловные распределения вероятностей для возможных объемов ресурсов следующие: $P(b_1 = 200) = 0{,}25$ $P(b_1 = 350) = 0{,}5$ $P(b_1 = 500) = 0{,}2$ $P(b_1 = 550) = 0{,}05$; $P(b_2 = 250) = 0{,}1$ $P(b_2 = 400) = 0{,}15$, $P(b_2 = 500) = 0{,}6$, $P(b_2 = 600) = 0{,}1$, $P(b_2 = 700) = 0{,}05$; $P(b_3 = 50) = 0{,}05$, $P(b_3 = 150) = 0{,}2$ $P(b_3 = 200) = 0{,}5$, $P(b_3 = 250) = 0{,}15$ $P(b_3 = 300) = 0{,}1$.

13.2.2. Решить задачу в P-постановке при $\nu = 0{,}15$ и $\beta = 0{,}8$ для всех вероятностных ограничений.

а) Целевая функция $P[f(x)] = 0{,}68$, а параметры в ограничениях детерминированные (в качестве детерминированных взять средние значения величин).

б) Целевая функция $P[f(x)] \to \max$, а ограничения, как и в случае а), детерминированные. Решение осуществить при $b_1 = 540$, $b_2 = 600$, $b_3 = 215$.

в) Целевая функция $P[f(x)] = 0{,}68$, а ограничения вероятностные (при решении осуществить замену вероятностных ограничений их детерминированным эквивалентом).

г) Целевая функция $P[f(x)] \to \max$ при вероятностных ограничениях (их детерминированном эквиваленте) и $b_1 = 540$, $b_2 = 950$, $b_3 = 215$.

14. ВЕКТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

14.1. МЕТОДЫ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Многие экономико-управленческие задачи являются многоцелевыми. В самом деле, производственная программа предприятия должна обеспечивать максимально возможный объем продукции, низкую ее себестоимость, высокие рентабельность производства, производительность труда и другие показатели. В силу этого оптимальное решение по одному критерию может оказаться не лучшим по значениям показателей других критериев.

Найти решение, в котором значения показателей эффективности были бы пусть не оптимальными, но наилучшими по выполнению всех критериев одновременно, можно в области компромисса между этими критериями.

Решения, в которых значения всех критериев являются наилучшими одновременно, называют *наиболее эффективными, компромиссными* или *субоптимальными*, а проблему нахождения оптимальных решений по нескольким критериям — *векторной оптимизацией.*

Область компромисса, в которой невозможно одновременное улучшение всех критериев, находится в ОДР системы ограничений. Решения, принадлежащие области компромиссов, называют *эффективными* или *оптимальными по Парето.*

При решении задач по векторному критерию $\overline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ приходится решать ряд специфических проблем. К ним относятся:

— нормализация критериев — приведение их к единому измерителю, если локальные критерии имеют различные единицы измерения;

— ранжирование критериев по приоритетам (их важности);

— определение области компромисса;

— выбор схемы компромисса, т.е. выработка правила сравнения двух и более векторов-решений.

Отметим, что число возможных схем компромисса практически является неограниченным. Поэтому остановимся на рассмотрении некоторых методов нахождения решений по векторному критерию.

14.1.1. Метод последовательных уступок

Вначале устанавливается предпочтительность всех критериев, при этом на первое место ставится самый важный.

Далее находится оптимальное решение по первому критерию и устанавливается по нему уступка Δf_1. Затем решается задача по второму критерию с дополнительным ограничением $f_1 \geq f_1^* - \Delta f_1$, где f_1^* — максимальное значение первого критерия. После нахождения оптимального решения по критерию f_2 назначается по нему уступка и решается задача по третьему критерию с двумя дополнительными ограничениями по первым двум критериям. Аналогично продолжается решение расширенных задач, пока не будет найдено значение наименее важного критерия при уступках по остальным критериям.

Пусть, например, необходимо найти оптимальное решение задачи по трем критериям: $f_1 \to \max$, $f_2 \to \min$, $f_3 \to \max$, при этом самым важным является критерий f_1, на втором месте по важности стоит f_2, он более важный, чем f_3.

В результате решения задачи по первому критерию получено, что $f_1^* = 155$. Назначим уступку по этому критерию $\Delta f_1 = 30$ и далее решим задачу по второму критерию с дополнительным ограничением по первому ($f_1 \geq f_1^* - \Delta f_1 = 155 - 30 = 125$, т. е. $f_1 \geq 125$). Пусть минимальное значение второго критерия $f_2^* = 70$, а уступка по нему $\Delta f_2 = 20$. Тогда решаем задачу на максимум критерия f_3 при дополнительных ограничениях по первому и второму критериям. Ограничение по второму критерию: $f_2 \leq f_2^* + \Delta f_2 = 70 + 20 = 90$, т.е. $f_2 \leq 90$.

Если ответственное лицо за принятие решения устраивают значения всех трех критериев, то задача считается решенной. Если же какие-то значения критериев не устраивают, то изменяются величины уступок и задача решается заново.

14.1.2. Метод ведущего критерия

Этот метод является частным случаем предыдущего метода. В методе ведущего критерия все критерии, кроме самого важного, заносятся в систему ограничений. Умножив все критерии минимизации функций на (−1) и обозначив через $a_{k0} (k = \overline{1,k'})$ нижние границы соответствующих критериев, математическую модель задачи можно записать в виде

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max, \tag{14.1}$$

$$\Phi_i(x) \{\leq, =, \geq\} b_i, i = \overline{1,m}, \tag{14.2}$$

$$f_k \geq a_{k0}, k = \overline{1,k'}, \tag{14.3}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n}. \tag{14.4}$$

14.1.3. Метод равных и наименьших относительных отклонений

Пусть необходимо найти компромиссное решение задачи по k' критериям методом равных и наименьших относительных отклонений, т.е.

$$\begin{cases} f_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ f_2 = \sum_{j=1}^{n} l_j x_j \to \max, \\ f_k = \sum_{j=1}^{n} h_j x_j \to \min, k = \overline{3,k'}, \end{cases} \tag{14.5}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1, m},\ x_j \ge 0, j = \overline{1, n}.$$

Запишем условие равенства относительных отклонений значений критериев от их экстремальных значений для k' критериев:

$$\left|\frac{f_1 - f_1^*}{f_1^*}\right| = \left|\frac{f_2 - f_2^*}{f_2^*}\right| = \ldots = \left|\frac{f_{k'} - f_{k'}^*}{f_{k'}^*}\right|. \qquad (14.6)$$

В выражении (14.6) f_k^* — экстремальное значение критерия $f_k\left(k = \overline{1, k'}\right)$.

Рассмотрим четыре первых критерия ($k' \ge 4$).

Пусь в условии задачи критерии f_1 и f_2 максимизируются, а f_3 и f_4 минимизируются.

Осуществим анализ числителей относительных отклонений первых двух критериев. Оба числителя $f_k - f_k^*$ положительны при $f_k^* < 0$ и отрицательны при $f_k^* > 0(k = 1, 2)$. Поэтому в равенстве относительных отклонений этих критериев скобки абсолютных величин можно опустить, т.е. для первых двух критериев справедливо выражение

$$\frac{f_1 - f_1^*}{f_1^*} = \frac{f_2 - f_2^*}{f_2^*} \text{ или } \frac{1}{f_1^*} f_1 - 1 = \frac{1}{f_2^*} f_2 - 1. \qquad (14.7)$$

Обозначив $\frac{1}{f_k^*} = d_k (k = 1, 2)$ и подставив в (14.7), получим

$$d_1 f_1 = d_2 f_2 \text{ или } d_1 f_1 - d_2 f_2 = 0. \qquad (14.8)$$

Если рассмотреть третий и четвертый критерии, то для них получим точно такое же уравнение, так как направления их оптимизации совпадают:

$$d_3 f_3 - d_4 f_4 = 0.$$

Возьмем теперь критерии f_1, f_3 с разными направлениями оптимизации.

Для них при $f_k^* > 0\ (k = 1, 3)$ $\frac{f_1 - f_1^*}{f_1^*} < 0,\ \frac{f_3 - f_3^*}{f_3^*} > 0,$

а при $f_k^* < 0(k = 1, 3)$

$$\frac{f_1 - f_1^*}{f_1^*} > 0,\ \frac{f_3 - f_3^*}{f_3^*} < 0.$$

Из проведенного анализа видно, что знаки выражений в скобках абсолютных величин всегда противоположны, поэтому, опуская скобки абсолютных величин, перед одним из выражений нужно поставить знак минус:

$$\frac{f_1 - f_1^*}{f_1^*} = -\frac{f_3 - f_3^*}{f_3^*},$$

или с учетом обозначения $\frac{1}{f_k^*} = d_k (k = 1,\ 3)$ имеем

$$d_1 f_1 + d_3 f_3 = 2. \tag{14.9}$$

Итак, равенство относительных отклонений для любых двух максимизируемых (минимизируемых) критериев имеет вид (14.8), а для любых двух критериев с противоположными направлениями оптимизации — вид (14.9).

Таким образом, для нахождения компромиссного решения методом равных и наименьших относительных отклонений необходимо оптимизируемые критерии включить в число неизвестных задачи и дополнить систему ограничений исходной задачи следующими ограничениями:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - f_1 = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} l_j x_j - f_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{n} h_j x_j - f_{k'} = 0, \end{cases} \tag{14.10}$$

$$\begin{cases} d_1 f_1 - d_k f_k = 0, \text{ для тех } f_k, \text{ которые, как и } f_1, \text{ максимизируются;} \\ d_1 f_1 + d_k f_k = 2, \text{ для тех } f_k, \text{ которые минимизируются.} \end{cases} \tag{14.11}$$

В качестве целевой функции можно взять любую из функций $f_k\left(k = \overline{1, k'}\right)$.

При этом следует иметь в виду, что относительное отклонение максимизируемого критерия будет наименьшим тогда, когда f_k приблизится к максимальному значению f_k^*, а для минимизируемого критерия относительное отклонение станет минимальным, если f_k будет приближаться к наименьшему значению f_k^*, т.е.

$$\begin{cases} F = f_k \to \max, \text{если } k\text{-й критерий на максимум функции;} \\ F = f_k \to \min, \text{если } k\text{-й критерий на минимум функции.} \end{cases} \tag{14.12}$$

Отметим, что дополнительных ограничений расширенной задачи вида (14.11) на одно меньше числа критериев.

Если необходимо улучшить значения каких-то критериев, то улучшение оценивается количественно и в условие (14.2) вводятся весовые коэффициенты $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{k'}$ $(\alpha_1 = 1)$. Условие равенства относительных отклонений в этом случае будет иметь вид

$$\left|\frac{f_1 - f_1^*}{f_1^*}\right| = \alpha_2 \left|\frac{f_2 - f_2^*}{f_2^*}\right| = \ldots = \alpha_{k'} \left|\frac{f_{k'} - f_{k'}^*}{f_{k'}^*}\right|. \qquad (14.13)$$

Рассмотрим применение метода на примере задачи производственного планирования.

Пример 14.1. Предприятие планирует к производству два вида продукции. Для производства продукции используются оборудование, материалы и финансовые средства. Данные о расходе ресурсов и их наличии на планируемый период представлены в табл. 14.1.

Таблица 14.1

Ресурсы	Расход ресурсов на единицу продукции		Наличие ресурсов
	I	II	
Оборудование	7	12	84
Материалы	11	7	77
Финансы	8	8	64

Предприятие должно изготовить не менее 1 единицы продукции первого вида и 2 единицы продукции второго вида. Требуется найти компромиссное решение методом равных и наименьших относительных отклонений по трем критериям: прибыли, затратам трудовых ресурсов и стоимости. Численные значения этих показателей для первого и второго видов продукции следующие: прибыль — (1,5; 2,8), трудовые затраты — (4; 4), стоимость — (8; 3).

Пусть x_1 и x_2 — объемы производства продукции первого и второго видов соответственно. Тогда критерии задачи будут иметь вид

$$f_1(x) = 1{,}5x_1 + 2{,}8x_2 \to \max,$$
$$f_2(x) = 4x_1 + 4x_2 \to \min,$$
$$f_3(x) = 8x_1 + 3x_2 \to \max.$$

Ограничения задачи:

$$\begin{cases} 7x_1 + 12x_2 \le 84, \\ 11x_1 + 7x_2 \le 77, \\ 8x_1 + 8x_2 \le 64, \\ x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 2 \end{cases}$$

Найдем решение по каждому из критериев (геометрическая иллюстрация представлена на рис. 14.1).

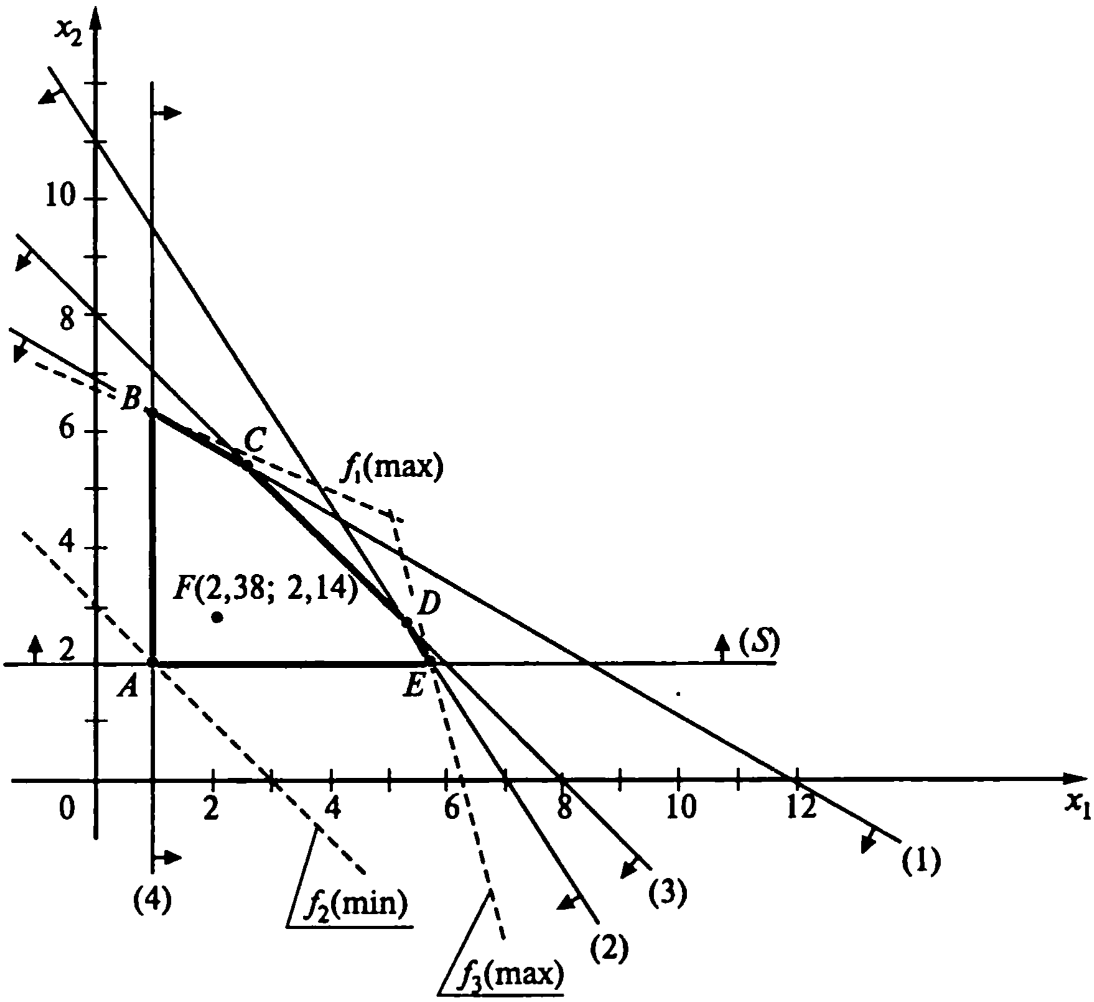


Рис. 14.1

Результаты решения следующие:

$$f_1^*(B) = 19{,}4667;\ x_1 = 1;\ x_2 = 6{,}42;\ f_2 = 29{,}67;\ f_3 = 27{,}25;$$

$$f_2^*(A) = 12{,}0;\ x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ f_1 = 7{,}1;\ f_3 = 14;$$

$$f_3^*(E) = 51{,}84;\ x_1 = 5{,}73;\ x_2 = 2;\ f_2 = 30{,}91;\ f_1 = 14{,}191.$$

В соответствии с выражениями (14.10)–(14.11) запишем дополнительные ограничения задачи для ввода функций f_1, f_2 и f_3 в число неизвестных и выполнения требования равных относительных отклонений значений критериев в компромиссном решении от их экстремальных значений, с учетом, что

$$\frac{1}{f_1^*} = 0{,}05135;\ \frac{1}{f_2^*} = 0{,}0833 \text{ и } \frac{1}{f_3^*} = 0{,}0193.$$

После подстановки конкретных значений параметров дополнительные ограничения запишутся в виде

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 2{,}8x_2 - f_1 = 0, & 0{,}05135f_1 + 0{,}0833f_2 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 - f_2 = 0, & 0{,}05135f_1 - 0{,}0193f_3 = 0, \\ 8x_1 + 3x_2 - f_3 = 0. & \end{cases}$$

В качестве целевой функции расширенной задачи возьмем первый критерий:

$$F = f_1 \to \max.$$

Решение расширенной задачи осуществлено средствами Excel в подглаве 14.2.

14.1.4. Метод минимакса

В методе минимакса сначала решается исходная задача по каждому из критериев в отдельности и находятся их значения $f_1^*, f_2^*, \ldots, f_{r'}^*$. Дадим обоснование функции и дополнительных ограничений в этом методе.

Используя найденные значения функций $f_r^* (r = \overline{1, r'})$, найдем их относительные отклонения от показателей функций в компромиссном решении:

$$\frac{\left| \sum_{j=1}^{n} c_j^r x_j^0 - f_r^* \right|}{f_r^*} = y_r, \quad r = \overline{1, r'}. \tag{14.14}$$

Здесь $x_j^0 (j = \overline{1, n})$ — значения компонентов в компромиссном решении. Выделим из полученных отклонений наибольшее и потребуем, чтобы в искомом компромиссном решении оно было минимальным. Тогда функция в общем виде запишется так:

$$Z = (\max y_r) \to \min. \tag{14.15}$$

Из выражения (14.15) и вытекает название — метод минимакса. Заменим в (14.14) отдельные отклонения $y_r (r = \overline{1, r'})$ наибольшим из них, обозначив его $\max y_r = x_{n+1}$, тогда получим нестрогие неравенства

$$\frac{\left| \sum_{j=1}^{n} c_j^r x_j^0 - f_r^* \right|}{f_r^*} \le x_{n+1}, \ r = \overline{1, r'}. \tag{14.16}$$

Умножим выражения (14.16) на их знаменатель, отчего смысл их не нарушится, так как в практических задачах $f_r^* > 0$.

$$\left| \sum_{j=1}^{n} c_j^r x_j^0 - f_r^* \right| \le f_r^* x_{n+1}, \ r = \overline{1, r'}. \tag{14.17}$$

Учитывая, что в компромиссном решении значение максимизируемого критерия меньше его экстремального значения, а величина минимизируемого критерия больше соответствующего экстремального значения, имеем:

— для максимизируемых критериев

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^r x_j^0 - f_r^* < 0.$$

При снятии знака модуля с левой части (14.17) получим

$$\left|\sum_{j=1}^{n} c_j^r x_j^0 - f_r^*\right| = -\left(\sum_{j=1}^{n} c_j^r x_j^0 - f_r^*\right).$$

С учетом этого (14.17) запишем в виде

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^r x_j^0 + f_r^* x_{n+1} \ge f_r^*; \qquad (14.18)$$

— для минимизируемых критериев

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^r x_j^0 - f_r^* > 0,$$

тогда снятие знака модуля не требует преобразований и (14.17) запишется в виде

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^r x_j^0 - f_r^* x_{n+1} \le f_r^*. \qquad (14.19)$$

Поскольку компромиссное решение нами не определено, а следовательно, неизвестные величины $x_j^0 (j = \overline{1, n})$ и значение новой неизвестной x_{n+1} не найдены, то будем считать величины $x_j^0 (j = \overline{1, n})$ неизвестными x_j. Тогда для нахождения компромиссного решения методом минимакса к исходной системе ограничений добавим ограничения вида (14.18):

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^r x_j + f_r^* x_{n+1} \ge f_r^*, \qquad (14.20)$$

сформированные для всех r, относящихся к максимизируемым критериям, и — вида (14.19):

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^r x_j - f_r^* x_{n+1} \le f_r^*, \qquad (14.21)$$

сформированные для всех r, относящихся к минимизируемым критериям.

Целевая функция расширенной задачи с учетом подстановки max $y_r = x_{n+1}$ в выражение (14.15) имеет вид

$$Z = x_{n+1} \to \min. \qquad (14.22)$$

Существуют и другие методы нахождения компромиссных решений оптимизационных задач, но в настоящем учебном пособии мы их касаться не будем.

14.2. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОПТИМИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ПО ВЕКТОРНОМУ КРИТЕРИЮ

Применим информационные технологии Excel для решения примера 14.1. Исходные данные примера занесем в электронную таблицу Excel (табл. 14.2). В столбце D этой таблицы, где расположены нули, фактически находятся формулы. Например, в пятой строке, соответствующей ограничению по оборудованию, записана формула =СУММПРОИЗВ (B$12:C$12; B5:C5).

Таблица 14.2

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3	Ограничения по:	Переменные		Расход ресурсов	Знак	Наличие ресурсов
4		X_1	X_2			
5	оборудованию	7	12	0	<=	84
6	материалам	11	7	0	<=	77
7	финансам	8	8	0	<=	64
8		Ограничения по объему производства				
9	Продукции 1	1		0	>=	1
10	Продукции 2		1	0	>=	2
11						
12	Знач. изм. перем.	0	0			
13						
14	Критерии:					
15	Прибыль	1,5	2,8	0		
16	Труд. ресурсы	4	4	0		
17	Оптовая цена	8	3	0		
18						

Для решения задачи по каждому из критериев необходимо в диалоговом окне Поиск решения указать нужный адрес целевой ячейки (в нашем примере D15; D16 и D17), направление оптимизации, ввести ограничения и применить команду **Выполнить**.

Результаты решения:

— по критерию максимизации прибыли $x_1^* = 1$; $x_2^* = 6{,}42$. В этой точке

$$f_1^* = 19{,}4667;\ f_2 = 29{,}67;\ f_3 = 27{,}25;$$

—по критерию минимизации трудозатрат $x_1^* = 1$; $x_2^* = 2$. При этих значениях

$$f_1 = 7{,}1;\ f_2^* = 12{,}0;\ f_3 = 14;$$

—по критерию максимизации стоимости $x_1^* = 5{,}73$; $x_2^* = 2$

$$f_1 = 14{,}191;\ f_2 = 30{,}91;\ f_3^* = 51{,}84.$$

Из решения видно, что каждый из показателей ухудшается, если решение задачи осуществляется не по нему, а по другому показателю. Например, при оптимизации по прибыли $f_1^* = 19{,}4667$, а при оптимизации по трудозатратам и стоимости прибыль равна 7,1 и 14,191 соответственно.

Решим рассматриваемую задачу методом равных и наименьших относительных отклонений. Для этого занесем основные и дополнительные ограничения задачи в электронную таблицу Excel (табл. 14.3). Как и в табл. 14.2, на месте нулей в столбце G (табл. 14.3) записаны формулы сумм произведений значений изменяемых переменных на соответствующие коэффициенты при неизвестных системы ограничений и целевой функции.

Значение целевой функции находится в ячейке G22, изменяемые переменные размещены в диапазоне B12:F12.

После занесения необходимых данных в диалоговое окно **Поиск решения** и установления флажков **Линейная модель**, **Неотрицательные значения** в диалоговом окне **Параметры поиска решения**, вернувшись в диалоговое окно **Поиск решения**, щелкнем M1 по команде **Выполнить** (на экране результат решения задачи (табл.14.4)).

Полученное компромиссное решение следующее: $f_1 x = 9{,}57$; $f_2 = 18{,}10$; $f_3 = 25{,}48$; $x_1 = 2{,}38$; $x_2 = 2{,}14$, а относительные отклонения критериев

$$\left|\frac{f_1 - f_1^*}{f_1^*}\right| = \left|\frac{f_2 - f_2^*}{f_2^*}\right| = \left|\frac{f_3 - f_3^*}{f_3^*}\right| = 0{,}5083.$$

На графике (рис. 14.1) компромиссное решение представлено точкой $F(2{,}38;\ 2{,}14)$.

В компромиссном решении количественные значения критериев существенно отличаются от их экстремальных значений $f_k^*(k = \overline{1,3})$. Чтобы изменить ситуацию, применим к относительному отклонению второго критерия весовой коэффициент $\alpha_2 = 0{,}5$. Тогда равенство отклонений по первому и второму критериям, с учетом их направлений оптимизации, запишется так:

$$\frac{f_1 - f_1^*}{f_1^*} = -0{,}5\left(\frac{f_2 - f_2^*}{f_2^*}\right) \text{ или } \frac{1}{f_1^*} f_1 - 1 = -0{,}5 \frac{1}{f_2^*} f_2 + 0{,}5.$$

Таблица 14.3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3	Ограничения по:			Переменные			Расход ресурсов	Знак	Наличие ресурсов
4		X_1	X_2	f_1	f_2	f_3			
5	оборудованию	7	12				0	<=	84
6	материалам	11	7				0	<=	77
7	финансам	8	8				0	<=	64
8				Ограничения по объему производства продукции					
9	Продукция 1	1					0	>=	1
10	Продукция 2		1				0	>=	2
11									
12	Знач. изм. перем.	0	0	0	0	0			
13									
14			Дополнительные ограничения для нахождения компромиссного решения						
15	по критерию 1	1,5	2,8	–1			0	=	0
16	по критерию 2	4	4		–1		0	=	0
17	по критерию 3	8	3			–1	0	=	0
18	на рав-во откл.:								
19	по критериям 1 и 2			0,05135	0,0833		0	=	2
20	то же по кр. 1 и 3			0,05135		–0,0193	0	=	0
21	Компромиссный								
22	критерий			1			0	max	
23									

Таблица 14.4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3	Ограничения по:			Переменные			Расход ресурсов	Знак	Наличие ресурсов
4		X_1	X_2	f_1	f_2	f_3			
5	оборудованию	7	12				42,39	<=	84
6	материалам	11	7				41,20	<=	77
7	финансам	8	8				36,20	<=	64
8			Ограничения по объему производства продукции						
9	Продукция 1	1					2,38	>=	1
10	Продукция 2		1				2,14	>=	2
11									
12	Знач. изм. перем.	2,38	2,14	9,57	18,1	25,48			
13									
14		Дополнительные ограничения для нахождения компромиссного решения							
15	по критерию 1	1,5	2,8	–1			0	=	0
16	по критерию 2	4	4		–1		0	=	0
17	по критерию 3	8	3			–1	0	=	0
18	на рав-во откл.:								
19	по критериям 1 и 2			0,05135	0,0833		2	=	2
20	то же по кр. 1 и 3			0,05135		–0,0193	0	=	0
21	Компромиссный								
22	критерий			1			9,57	max	
23									

Таблица 14.5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3	Ограничения по:			Переменные			Расход ресурсов	Знак	Наличие ресурсов
4		X_1	X_2	f_1	f_2	f_3			
5	оборудованию	7	12				51,03	<=	84
6	материалам	11	7				49,60	<=	77
7	финансам	8	8				43,58	<=	64
8			Ограничения по объему производства продукции						
9	Продукция 1	1					2,87	>=	1
10	Продукция 2		1				2,58	>=	2
11									
12	Знач. изм. перем.	2,87	2,58	11,53	21,79	30,68			
13									
14		Дополнительные ограничения для нахождения компромиссного решения							
15	по критерию 1	1,5	2,8	–1			0	=	0
16	по критерию 2	4	4		–1		0	=	0
17	по критерию 3	8	3			–1	0	=	0
18	на рав-во откл.:								
19	по критериям 1 и 2			0,05135	0,04167		1,5	=	1,5
20	то же по кр. 1 и 3			0,05135		–0,0193	0	=	0
21	Компромиссный								
22	критерий			1			11,53	max	-
23									

Подставив в последнее выражение значение $f_1^* = 19,4667$ и $f_2^* = 12$, имеем ограничение вида

$$0,05135 f_1 + 0,04167 f_2 = 1,5.$$

После занесения этого ограничения в табл. 14.3 (вместо дополнительного ограничения на равенство относительных отклонений по первому и второму критериям) и выполнения расчета получим новое решение (табл. 14.5). В этом решении значения всех трех критериев изменились по отношению к предыдущему решению: $f_1 = 11,53; f_2 = 21,79; f_3 = 30,68$, что говорит о влиянии весового коэффициента $\alpha_2 = 0,5$.

Пример 14.2. Объединению необходимо произвести два вида изделий в объемах не менее 65 и 30 единиц соответственно. Изделия могут производиться на трех предприятиях. Каждое из предприятий может производить изделия по двум вариантам, отличающимся величиной расхода ресурсов, затратами и другими показателями. Предприятия могут использовать лимитированный ресурс в объеме 380 единиц. Исходные данные приведены в табл. 14.6.

Таблица 14.6

Предприятия, i	Варианты производства, k	Объем производства, продукции, a_{ij}^k		Величина расходов ресурсов (s), a_{is}^k	Приведенные общие затраты, c_{ik}	Неизвестные параметры (варианты производства), x_{ik}
		Продукция 1	Продукция 2			
1	1	15	11	50	110	x_{11}
	2	19	10	60	150	x_{12}
2	1	16	25	80	150	x_{21}
	2	14	27	154	185	x_{22}
3	1	34	6	124	240	x_{31}
	2	45	8	140	300	x_{32}

Запишем математическую модель задачи:

$$f(x) = 110x_{11} + 150x_{12} + 150x_{21} + 185x_{22} + 240x_{31} + 300x_{32} \to \min,$$

$$\begin{cases} 15x_{11} + 19x_{12} + 16x_{21} + 14x_{22} + 34x_{31} + 45x_{32} \ge 65, \\ 11x_{11} + 10x_{12} + 25x_{21} + 27x_{22} + 6x_{31} + 8x_{32} \ge 30, \\ 50x_{11} + 60x_{12} + 80x_{21} + 154x_{22} + 124x_{31} + 140x_{32} \le 380, \\ x_{11} + x_{12} = 1, \\ x_{21} + x_{22} = 1, \\ x_{31} + x_{32} = 1. \end{cases}$$

$x_{ik} = 0$ или $1 (i = \overline{1,3};\ k = 1,2)$.

Для решения поставленной задачи использована русифицированная версия пакета прикладных программ QSB (Quantitative System for Business).

Решение по критерию минимизации затрат:

$$f(x)^1_{\min} = 500,\ x_{11} = 1,\ x_{12} = 0,\ x_{21} = 1,\ x_{22} = 0,\ x_{31} = 1,\ x_{32} = 0.$$

Решение этой задачи по критерию минимизации трудовых затрат, представленных вектором T_{ik}= (80, 60, 90, 140, 150, 100), следующее:

$$f(x)^2_{\min} = 250,\ x_{11} = 0,\ x_{12} = 1,\ x_{21} = 1,\ x_{22} = 0,\ x_{31} = 0,\ x_{32} = 1.$$

По третьему критерию — максимизации прибыли при ее значениях, представленных вектором P_{ik} = (90, 250, 240, 120, 320,200), получено решение:

$$f(x)^3_{\max} = 810,\ x_{11} = 0,\ x_{12} = 1,\ x_{21} = 1,\ x_{22} = 0,\ x_{31} = 1,\ x_{32} = 0.$$

Какому из полученных решений отдать предпочтение или какое из этих решений наиболее эффективно, сказать трудно.

Выпишем значения всех показателей в трех вариантах оптимальных решений.

$$f(x)^1_{\min} = 500,\ f(x)^2 = 320,\ f(x)^3 = 650;$$

$$f(x)^1 = 600,\ f(x)^2_{\min} = 250,\ f(x)^3 = 690;$$

$$f(x)^1 = 540,\ f(x)^2 = 300,\ f(x)^3_{\max} = 810.$$

Представленная информация дает более наглядную картину эффективности решения по трем показателям. Из приведенных данных видно, что при оптимизации по любому одному из критериев значения других показателей хуже, чем в оптимальных решениях при оптимизации по ним. Например, значение прибыли при оптимизации по этому показателю равно 810, а при оптимизации по приведенным общим затратам или по трудовым — равно соответственно 650 и 690.

Найдем компромиссное решение, применив метод минимакса. При требовании целочисленности на переменные полученное решение ввиду жесткости условий совпадает с решением по критерию прибыли, а нецелочисленное решение этой задачи при дополнительных ограничениях по общим затратам, затратам труда и прибыли (ограничения вида (14.20) и (14.21)):

$$\begin{cases} 110x_{11} + 150x_{12} + 150x_{21} + 185x_{22} + 240x_{31} + 300x_{32} - 500x_7 \le 500, \\ 80x_{11} + 60x_{12} + 90x_{21} + 140x_{22} + 150x_{31} + 100x_{32} - 250x_7 \le 250, \\ 90x_{11} + 250x_{12} + 240x_{21} + 120x_{22} + 320x_{31} + 200x_{32} + 810x_7 \ge 810 \end{cases}$$

и функции

$$f(x) = x_7 \to \min$$

следующее:

$$f_{\min} = 0{,}12,\ x_{11} = 0{,}238,\ x_{12} = 0{,}762,\ x_{21} = 1,\ x_{22} = 0,\ x_{31} = 0{,}506,\ x_{32} = 0{,}494.$$

В этом решении (с учетом округлений) на первом предприятии по первому варианту производится 3 единицы продукции первого вида и 3 — второго вида, а по второму варианту — 14 единиц продукции первого вида и 8 единиц второго вида. На втором предприятии по первому варианту производится 16 единиц продукции первого вида и 25 единиц второго вида. На третьем предприятии производится по первому варианту 17 единиц продукции первого вида и 3 единицы второго вида, а по второму варианту — 22 единицы продукции первого вида и 4 единицы второго вида. Суммарное производство продукции первого вида на всех предприятиях равно 73 единицы, а второго вида — 42 единицы. Эти показатели при решении задачи по критерию общих приведенных затрат равны соответственно 65 единицам и 42 единицам, по критерию трудовых затрат — 80 единицам и 43 единицам и по критерию прибыли — 69 единицам и 41 единице. Значения экономических показателей компромиссного решения следующие: общие приведенные затраты равны 560 единицам, что составляет 106 % от их минимального значения, трудовые затраты — 280 единицам, или 112 % от их минимального значения, и прибыль равна 712,6 единицы, или 88 % от ее максимального значения.

Если это решение по каким-то показателям не устраивает, то можно его скорректировать или применить какие-либо другие методы.

Пример 14.3. Рассмотрим математическую модель оптимизации производственной программы многономенклатурного производства.

Исходные данные для оптимизации производственной программы представлены в табл. 14.7.

Таблица 14.7

Ресурсы и показатели	Норма затрат ресурсов на единицу продукции						Объем ресурсов
	Радиоприемники	Телевизоры	Магнитолы	Магнитофоны	Видеомагнитофоны	Электропылесосы	
Оборудование группы А, ч	2	4,5	1,5	2	3	1,2	24 300
Оборудование группы В, ч	0,97	2	0,9	1,2	2,2	0,6	18 400
Материалы, кг	4	6	0,7	2,6	2,8	0,5	34 800
Комплект. изд., шт.	20	18	16	24	21	12	228 000
Оптовая цена, ден. ед.	4	10	3,5	2,8	14	8	—
Себестоимость, ден. ед.	3	8	1,5	2	12	6,4	—
Трудоемкость, чел.-ч.	30	40	10	15	20	10	—
Прибыль, ден. ед.	1	2	2	0,8	2	1,6	—

Портфелем заказов определено, что телевизоров необходимо изготовить не менее 1800, магнитофонов — 1450, видеомагнитофонов — 1980 и радиоприемников — 1500. В том числе на экспорт должно быть произведено продукции не менее чем на 25 000 ден. ед.

Для оптимизации производственной программы используем программное средство **Поиск решения** информационных технологий Excel.

Размещение данных для решения показано в табл. 14.8.

Результаты расчетов задачи по каждому из критериев в отдельности следующие:

1) $$f_{\max}^{\text{приб}} = 16\,033{,}33;\ f_{\text{опт. цена}} = 65\,953{,}33;$$

$$f_{\text{себест}} = 49920;\ f_{\text{трудоемк}} = 207416{,}67.$$

$$x_1 = 1500, x_2 = 1800, x_3 = 2906{,}67, x_4 = 1450, x_5 = 1980, x_6 = 0.$$

2) $$f_{\text{приб}} = 16033{,}33;\ f_{\max}^{\text{опт. цена}} = 84846{,}67;$$

$$f_{\text{себест}} = 68813{,}33;\ f_{\text{трудоемк}} = 214683{,}33.$$

$$x_1 = 1500, x_2 = 1800, x_3 = 0, x_4 = 1450, x_5 = 1980, x_6 = 3633{,}333.$$

3) $$f_{\text{приб}} = 10\,220;\ f_{\text{опт.цена}} = 55\,780;$$

$$f_{\min}^{\text{себест}} = 45\,560;\ f_{\text{трудоемк}} = 178\,350.$$

$$x_1 = 1500, x_2 = 1800, x_3 = 0, x_4 = 1450, x_5 = 1980, x_6 = 0.$$

4) $$f_{\text{приб}} = 10\,220;\ f_{\text{опт. цена}} = 55\,780;$$

$$f_{\text{себест}} = 45\,560;\ f_{\min}^{\text{трудоемк}} = 178\,350.$$

$$x_1 = 1500, x_2 = 1800, x_3 = 0, x_4 = 1450, x_5 = 1980, x_6 = 0.$$

Анализ экономических показателей и объемов производства продукции в решениях показывает, что значения их отличаются в зависимости от целевой направленности оптимизации. Вместе с тем при оптимизации по критерию минимизации себестоимости и трудоемкости решения задач совпали и по экономическим показателям, и по объемам производства продукции.

Для нахождения компромиссного решения по критерию минимизации максимального относительного отклонения введем в математическую модель задачи дополнительную неизвестную x_7, отражающую максимальное относительное отклонение, которое будем минимизировать, а также дополнительные ограничения задачи, соответствующие виду целевых функций (оптовая цена, трудоемкость и прибыль).

Таблица 14.8

	A	B	C	D	E	F	G	I	J	K
1	Наименование переменных	ПЕРЕМЕННЫЕ						Левая часть ограничений	Знак огр.	Правая часть огр.
2–3		Радио-прием-ники	Телеви-зоры	Магни-толы	Магнито-фоны	Видео-магнито-фоны	Электро-пылесосы			
4		X1	X2	X3	X 4	X5	X6			
5–6	Значения переменных									
7	Ресурсы и показатели	ОГРАНИЧЕНИЯ								
8	1. Оборуд. группы А (ч)	2	4,5	1,5	2	3	1,2	=СУММПРОИЗВ(B$5:G$5;B8:G8)	<=	24300
9	2. Оборуд. группы В (ч)	0,97	2	0,9	1,2	2,2	0,6	=СУММПРОИЗВ(B$5:G$5;B9:G9)	<=	18400
10	3. Материалы (кг)	4	6	0,7	2,6	2,8	0,5	=СУММПРОИЗВ(B$5:G$5;B10:G10)	<=	34800
11	4. Компл. изделия (шт.)	20	18	16	24	21	12	=СУММПРОИЗВ(B$5:G$5;B11:G11)	<=	228000
12	5. Радиоприемники (шт.)	1						=СУММПРОИЗВ(B$5:G$5;B12:G12)	>=	1500
13	6. Телевизоры (шт.)		1					=СУММПРОИЗВ(B$5:G$5;B13:G13)	>=	1800
14	7. Магнитофоны (шт.)				1			=СУММПРОИЗВ(B$5:G$5;B14:G14)	>=	1450
15	8. Видеомагнитоф. (шт.)					1		=СУММПРОИЗВ(B$5:G$5;B15:G15)	>=	1980
16	9. Экспорт прод. (ден.ед.)	4	10		2,8	14		=СУММПРОИЗВ(B$5:G$5;B16:G16)	>=	25000
17										
18	Крит.1. Опт. цена	4	10	3,5	2,8	14	8	=СУММПРОИЗВ(B$5:G$5;B18:G18)	max	
19	Крит. 2. Себест. (ден. ед.)	3	8	1,5	2	12	6,4	=СУММПРОИЗВ(B$5:G$5;B19:G19)	min	
20	Крит.3. Трудоемкость	30	40	10	15	20	10	=СУММПРОИЗВ(B$5:G$5;B20:G20)	min	
21	Крит.4. Прибыль	1	2	2	0,8	2	1,6	=СУММПРОИЗВ(B$5:G$5;B21:G21)	max	

Таблица 14.9

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Наименование переменных	ПЕРЕМЕННЫЕ							Левая часть ограничений	Знак огр.	Правая часть огр.
2–3		Радио-прием-ники	Телеви-зоры	Магни-толы	Магни-тофоны	Видео-магнито-фоны	Электро-пылесо-сы	Максим. отклон.			
4	Значения переменных	X1	X2	X3	X 4	X5	X6	X7			
5		1500	1800	93,306	1450	1980	2218,038	0,129596			
6											
7	Ресурсы и показатели	ОГРАНИЧЕНИЯ									
8	1. Оборуд. группы А (ч)	2	4,5	1,5	2	3	1,2	0	=СУММПРОИЗВ(B$5:H$5;B8:H8)	<=	24300
9	2. Оборуд. группы В (ч)	0,97	2	0,9	1,2	2,2	0,6	0	=СУММПРОИЗВ(B$5:H$5;B9:H9)	<=	18400
10	3. Материалы (кг)	4	6	0,7	2,6	2,8	0,5	0	=СУММПРОИЗВ(B$5:H$5;B10:H10)	<=	34800
11	4. Компл. изделия (шт.)	20	18	16	24	21	12	0	=СУММПРОИЗВ(B$5:H$5;B11:H11)	<=	228000
12	5. Радиоприемники (шт.)	1						0	=СУММПРОИЗВ(B$5:H$5;B12:H12)	>=	1500
13	6. Телевизоры (шт.)		1					0	=СУММПРОИЗВ(B$5:H$5;B13:H13)	>=	1800
14	7. Магнитофоны (шт.)				1			0	=СУММПРОИЗВ(B$5:H$5;B14:H14)	>=	1450
15	8. Видеомагнитоф. (шт.)					1		0	=СУММПРОИЗВ(B$5:H$5;B15:H15)	>=	1980
16	9. Экспорт прод. (ден.ед.)	4	10		2,8	14		0	=СУММПРОИЗВ(B$5:H$5;B16:H16)	>=	25000
17	Крит.1. Опт. цена	4	10	3,5	2,8	14	8	84846,67	=СУММПРОИЗВ(B$5:H$5;B17:H17)	>=	84846,67
18	Крит.3. Трудоемкость	30	40	10	15	20	10	-178350	=СУММПРОИЗВ(B$5:H$5;B18:H18)	<=	178350
19	Крит.4. Прибыль	1	2	2	0,8	2	1,6	16033,33	=СУММПРОИЗВ(B$5:H$5;B19:H19)	>=	16033,33
20	Крит. миним. отклон.	0	0	0	0	0	0	1	=СУММПРОИЗВ(B$5:H$5;B20:H20)	min	

Таблица 14.10

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Наименование переменных	ПЕРЕМЕННЫЕ							Левая часть ограничений	Знак огр.	Правая часть огр.
2–3		Радиоприемники	Телевизоры	Магнитолы	Магнитофоны	Видеомагнитофоны	Электропылесосы	Максим. отклон.			
4	Значения переменных	X1	X2	X3	X 4	X5	X6	X7			
5		1500	1800	93,306	1450	1980	2218,038	0,129596			
6											
7	Ресурсы и показатели	ОГРАНИЧЕНИЯ									
8	1. Оборуд. группы А (ч)	2	4,5	1,5	2	3	1,2	0	22741,6046	<=	24300
9	2. Оборуд. группы В (ч)	0,97	2	0,9	1,2	2,2	0,6	0	12565,7982	<=	18400
10	3. Материалы (кг)	4	6	0,7	2,6	2,8	0,5	0	27288,3332	<=	34800
11	4. Компл. изделия (шт.)	20	18	16	24	21	12	0	166889,352	<=	228000
12	5. Радиоприемники (шт.)	1						0	1500	>=	1500
13	6. Телевизоры (шт.)		1					0	1800	>=	1800
14	7. Магнитофоны (шт.)				1			0	1450	>=	1450
15	8. Видеомагнитоф. (шт.)					1		0	1980	>=	1980
16	9. Экспорт прод. (ден.ед.)	4	10		2,8	14		0	55780	>=	25000
17	Крит.1. Опт. цена	4	10	3,5	2,8	14	8	84846,67	84846,66505	>=	84846,67
18	Крит.3. Трудоемкость	30	40	10	15	20	10	-178350	178349,9913	<=	178350
19	Крит.4. Прибыль	1	2	2	0,8	2	1,6	16033,33	16033,32843	>=	16033,33
20	Крит. миним. отклон.	0	0	0	0	0	0	1	0,129596012	min	

Размещение исходных данных на листе электронной таблицы Excel для нахождения компромиссного решения приведены в табл. 14.9, а оптимальное решение — в табл. 14.10 (решение получено при установленном флажке «Автоматическое масштабирование»).

Значения величин показателей в компромиссном решении ниже или выше, чем в оптимальных решениях, полученных при оптимизации по каждому из этих показателей в отдельности.

Так,

$$f_{\text{опт. цена}}^{\text{компр}} = 73\,850{,}88 \text{ ден. ед.} < f_{\max}^{\text{опт. цена}} = 84\,846{,}67 \text{ ден. ед.};$$

$$f_{\text{трудоемк.}}^{\text{компр}} = 20\,1463{,}45 \text{ чел.-ч} > f_{\min}^{\text{трудоемк.}} = 178\,350 \text{ чел.-ч};$$

$$f_{\text{компр}}^{\text{прибыль}} = 13\,955 \text{ ден. ед.} < f_{\max}^{\text{прибыль}} = 16\,033 \text{ ден. ед.}$$

Из отчетов (рис. 14.2, 14.3) видно, что компромиссное решение устойчивое.

Если компромиссный результат не устраивает лицо, ответственное за принятие решения, то его можно скорректировать, введя ограничения на соответствующие показатели, или решить задачу другим методом.

Отчет по результатам

Целевая ячейка (минимум)

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$I$20	Крит. миним. отклонений	0	0,129596012

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$B$5	Значения перемен. X1	0	1500
$C$5	Значения перемен. X2	0	1800
$D$5	Значения перемен. X3	0	93,30645038
$E$5	Значения перемен. X4	0	1450
$F$5	Значения перемен. X5	0	1980
$G$5	Значения перемен. X6	0	2218,038421
$H$5	Значения перемен. X7	0	0,129596012

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$I$8	1. Оборуд. группы А, ч	22741,60578	$I$8 <= $K$8	не связан.	1558,394219
$I$9	2. Оборуд. группы В, ч	12565,79886	$I$9 <= $K$9	не связан.	5834,201142
$I$10	3. Материалы, кг	27288,33373	$I$10 <= $K$10	не связан.	7511,666274
$I$11	4. Компл. изделия, шт.	166889,3643	$I$11 <= $K$11	не связан.	61110,63574

Рис. 14.2

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$I$12	5. Радиоприемники, шт.	1500	$I$12 >= $K$12	связанное	0
$I$13	6. Телевизоры, шт.	1800	$I$13 >= $K$13	связанное	0
$I$14	7. Магнитофоны, шт.	1450	$I$14 >= $K$14	связанное	0
$I$15	8. Видеомагнитоф., шт.	1980	$I$15 >= $K$15	связанное	0
$I$16	9. Эксп. прод., ден. ед.	55780	$I$16 >= $K$16	не связан.	30780
$I$17	Крит.1. Опт. цена	84846,67	$I$17 >= $K$17	связанное	0
$I$18	Крит.3. Трудоемкость	178350	$I$18 <= $K$18	связанное	0
$I$19	Крит.4. Прибыль	16033,33	$I$19 >= $K$19	связанное	0

Окончание рис. 14.2

Отчет по пределам

Ячейка	Целевое имя	Значение
$I$20	Крит. миним. отклон.	0,129596

Ячейка	Изменяемое имя	Значение	Нижний предел	Целевое результ.	Верхний предел	Целевое результ.
$B$5	Значения перемен. X1	1500	1500	0,12959601	1500	0,129596
$C$5	Значения перемен. X2	1800	1800	0,12959601	1800	0,129596
$D$5	Значения перемен. X3	93,30645	93,30645	0,12959601	93,30645	0,129596
$E$5	Значения перемен. X4	1450	1450	0,12959601	1450	0,129596
$F$5	Значения перемен. X5	1980	1980	0,12959601	1980	0,129596
$G$5	Значения перемен. X6	2218,0384	2218,038	0,12959601	2218,038	0,129596
$H$5	Значения перемен. X7	0,129596	0,129596	0,12959601	#Н/Д	#Н/Д

Рис. 14.3

Упражнения

14.1. Для производства трех видов продукции предприятие использует три вида ресурсов. Затраты ресурсов на единицу продукции и их наличие в плановом периоде представлены в таблице. Единица продукции каждого вида характеризуется следующими показателями, представленными векторами: прибылью P(22; 12; 14), оптовой ценой C(24;

16; 30) и трудоемкостью t (20; 10; 15). Третьего вида продукции должно быть произведено не менее 30 единиц.

	Затраты ресурсов на единицу продукции			Количество ресурсов
	Прод. 1	Прод. 2	Прод. 3	
Ресурс 1	2	4	4	400
Ресурс 2	3	2	2	300
Ресурс 3	4	5	3	500

Требуется найти решение задачи по векторному критерию:

14.1.1. Методом последовательных уступок при следующей важности критериев: прибыль, оптовая цена, трудоемкость. Уступка по прибыли $\Delta f_1 = 580$ и оптовой цене $\Delta f_2 = 1090$. Объемы производства должны быть выражены в целых числах.

14.1.2. Методом ведущего критерия, приняв в качестве самого важного — прибыль. Нижняя граница оптовой цены составляет 2400, а трудоемкость не должна превышать 1600.

14.1.3. Методом равных и наименьших относительных отклонений при $k_3 = 1/6$ и объеме производства продукции третьего вида не меньшем 20 единиц.

14.1.4. Методом минимакса при объеме производства продукции третьего вида не меньшем 40 единиц.

ОТВЕТЫ

Раздел I

1. Предмет, метод и задачи математического программирования

1.1 $\bar{Y}_{(\text{млрд руб})} = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (55, -85, 180, 25)$.

1.2 $X_{(\text{млрд руб})} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1128{,}57; 1980{,}49; 908{,}71; 1330{,}31)$.

1.3 $B = (b_1, b_2, b_3; b_4, b_5) = (197, 171, 131, 262, 203)$.

1.4 $C' = \begin{pmatrix} c_{11}, & c_{12}, & c_{13}, & c_{14} \\ c_{21}, & c_{22}, & c_{23}, & c_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}95; & 7{,}2; & 6{,}1; & 11{,}5 \\ 4{,}45; & 5{,}3; & 4; & 7{,}9 \end{pmatrix}, C' = P(C')^T = (9710; 6830)$

Раздел II

2. Математические методы линейной оптимизации

2.1 По 1-й технологии — 7,6 дня, по 2-й — 3,7 дня, по 3-й — 4,9 дня; $Z_{\max} = 1389{,}032$ усл. ед..

2.2 Рацион минимальной стоимости: сена — 16,3 кг, концентратов — 22,2 кг; силос и корнеплоды — не включаются; $Z_{\min} = 696$ усл. ед.

2.3 Транспорт вида А — 16,7 единицы, вида Б и В — 0 единиц, вида Г — 10,7 единицы. $f_{\min} = 350{,}698$ усл. ед.

2.4 $x_1 = 0{,}2; x_2 = 0{,}3; x_3 = 0{,}3; x_4 = 0{,}2; x_5 = 0; Z_{\max} = 34{,}6$.

2.12 $x_1 = 0; x_2 = 2; f_{\min} = F_{\max} = 2; u_1 = 0; u_2 = 1; u_3 = 0$.

2.13 $x_1 = 0{,}3; x_2 = 0{,}8; x_3 = 0; x_4 = 0; f_{\min} = F_{\max} = 12; u_1 = 3; u_2 = 2$.

2.14 $x_1 = 3{,}333; x_2 = 0; x_3 = 0{,}667; f_{\min} = F_{\max} = 392; u_1 = 16; u_2 = 20$.

2.15 $x_1 = 0; x_2 = 1{,}111; x_3 = 0{,}333; f_{\min} = F_{\max} = 440; u_1 = 60; u_2 = 40$.

2.16 $x_1 = 3; x_2 = 2; x_3 = 0; x_4 = 0; f_{\min} = F_{\max} = 8; u_1 = 1; u_2 = 0; u_3 = 1$ или (0; 0,5; 1,5).

2.17 а) (200; 150; 50); б) (1, 1, 1); в) целесообразно, ибо $\Delta p = 75$; г) $\Delta_4 = 1$, следовательно, нецелесообразно.

2.18 а) (150; 200; 150); (3/2; 1; 1/2); б) ресурс I — [200; ∞], ресурс II — [400; ∞], ресурс III — [0; 275], в) $\Delta f_1 = -225$; $\Delta f_3 = 35$; $\Delta f = -190$.

2.19 (475; 50; 100); (1; 1; 1).

2.20.1 $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 600 \\ 500 & 350 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 250 & 0 \end{pmatrix}, Z_{\min} = 58\,600$.

Значение функции увеличилось на $\Delta Z = 100$.

2.20.2 $X = \begin{pmatrix} 400 & 0 & 0 & 250 \\ 0 & 500 & 0 & 350 \\ 0 & 300 & 300 & 0 \end{pmatrix}$, $Z_{\min} = 63\,500.$
$\Delta Z = 63\,500 - 58\,500 = 5000.$

2.20.3 $X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 550 \\ 400 & 400 & 0 & 50 \\ 0 & 400 & 300 & 0 \end{pmatrix}$, $Z_{\min} = 58\,500.$
$\Delta Z = 58\,500 - 58\,500 = 0.$

2.20.4 $X = \begin{pmatrix} 300 & 0 & 0 & 150 & 200 \\ 0 & 400 & 0 & 450 & 0 \\ 0 & 400 & 300 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Z_{\min} = 58\,500$, $\Delta Z = 0.$

2.21 $X = \begin{pmatrix} 0 & 200 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & & 100 \\ 240 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 220 \end{pmatrix}$, $Z_{\max} = 165\,440.$

3. Целочисленная оптимизация

3.1 $x_1 = 10, x_2 = 1, x_3 = 4, x_4 = 7, Z_{\max} = 1640.$

3.2 $x_1 = 2, x_2 = 7, x_3 = 5, Z_{\min} = 45.$

3.3 $x_1 = 16, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 8, Z_{\max} = 440.$

3.4 $x_{11} = 0, x_{12} = 0, x_{13} = 28, x_{21} = 28, x_{22} = 8, x_{23} = 1, x_{31} = 0, x_{32} = 18, x_{33} = 7, Z_{\min} = 4384.$

3.5 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 118, x_4 = 0, x_5 = 125, Z_{\max} = 101\,920.$

4. Задача коммивояжера (построение кольцевых маршрутов)

4.1 $\mu = (1 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1)$, $L_{\min} = 22$ км

4.2 $\mu = (1 - 3 - 4 - 2 - 1)$, $C_{\min} = 2250$ ден. ед.

4.3 $\mu = (1 - 5 - 3 - 2 - 4 - 6 - 1)$, $T_{\min} = 115$ мин

5. Параметрическое программирование

5.1 При $t = 1$ максимум f_1 в вершине (4; 2) и в вершине (5; 0). При $1 < t \le 15$ максимум f_1 достигается в вершине (5; 0).

5.2 При $1 \le t \le 7$ максимум в вершине $(^{20}/_{19}; {}^{72}/_{19})$.

5.4 При $1 \le t \le 2$ максимум в вершине (3; 2; 0; 0), при $2 \le t \le 20$ — в вершине (3; 0; 0; 0). При $t = 2$ максимум в обеих вершинах и в их выпуклой оболочке.

5.5 При $1 \le t \le 3{,}5$ максимум в вершине (5; 0; 7), при $3{,}5 \le t \le 10$ — в вершине (5; 0; 0). При $t = 3{,}5$ максимум в обеих вершинах и в выпуклой оболочке.

5.6 При $0 \le t \le 1/4$ максимум в вершине (150; 200; 150), при $1/4 \le t \le 5$ — в вершине (250; 0; 550). При $t = 1/4$ максимум в обеих вершинах и в их выпуклой оболочке.

5.7 При $0 \le t \le 3$ максимум функции прибыли — в вершине (60; 190), т.е. 60 т яблок и 190 т груш. При $t = 3$ максимум достигается в вершинах (60; 190) и (0; 250), а при $3 < t \le 7$ в вершине (0; 250). При $t = 0$ $f_{max} = 443$ ден. ед.; при $t = 3$ $f_{max} = 800$ ден. ед.; при $t = 7$ $f_{max} = 1300$ ден. ед.

6. Динамическое программирование

6.1 $(1 - 4 - 6 - 9 - 10)$.

6.2 $f_n(s) = \min\limits_{s,\,j}[c_{sj} + f_{n-1}(j)]$.

6.3 а) (1 – 2 – 5 – 7 – 9); б) (1 – 4 – 5 – 8 – 10) и (1 – 4 – 5 – 9 – 10); в) (1 – 2 – 4 – 7 – 10); г) (1 – 2 – 4 – 7 – 11 – 13).

6.4 $f_n(i) = \min\limits_{x}[c(x) + h(i + x - d_n) + f_{n-1}(i + x - d_n)]\ (n = \overline{1,\ N});\ i = 0, 1, 2, ..., d_1 + ... + d_n;$ $d_n - i \le x \le \min(d_1 + ... + d_n - i;\ B)$.

6.5 $d_n - i \le x \le d_1 + ... + d_n - i$.

6.6 (4; 6; 0). Запас в начале второго месяца равен 1 единице; в начале третьего — 3 единицам.

6.7 (5; 0; 6; 0).

6.8 (4; 0; 4; 0).

6.9 (0; 4; 4; 0).

6.10 (2; 5; 0; 4).

Раздел III

8. Информационные технологии сетевого планирования и управления

8.1 $t_{12} = 8$; $t_{35} = 15{,}04$; $t_{кр} = 35{,}04$; $x_{12} = 4$; $x_{35} = 6$*.

8.2 $t_{12} = 5{,}28$; $t_{45} = 7$; $t_{кр} = 24{,}28$; $x_{23} = x_{45} = 6$.

8.3 $t_{12} = 6$; $t_{24} = 3{,}58$; $t_{кр} = 16{,}58$; $x_{12} = 6{,}25$; $x_{24} = 1{,}75$.

8.4 $t_{12} = 15{,}68$; $t_{23} = 7$; $t_{кр} = 25{,}68$; $x_{12} = 1$; $x_{23} = 5$.

8.5 $t_{12} = 5{,}286$; $t_{13} = 15{,}286$; $t_{35} = 7$; $t_{кр} = 22{,}286$; $x_{12} = 2{,}97$; $x_{13} = 5{,}026$; $x_{35} = 6$.

8.6 $t_{13} = 16$; $t_{45} = 7{,}289$; $t_{кр} = 23{,}289$; $x_{13} = 2{,}222$; $x_{45} = 6{,}78$.

8.7 $t_{12} = 11{,}3$; $t_{23} = 11$; $t_{кр} = 27{,}3$; $x_{12} = 13{,}5$; $x_{23} = 2{,}5$.

8.8 $t_{13} = 19{,}733$; $t_{34} = 7$; $t_{кр} = 26{,}733$; $x_{13} = 0{,}9$; $x_{34} = 11{,}11$.

---

*В ответах задач 8.1—8.18 даны только те значения времени выполнения операций, которые изменились при оптимизации, а также отличные от нуля значения объемов средств, дополнительно вложенных в операции.

8.9 $t_{12} = 23{,}143$; $t_{24} = 14$; $t_{кр} = 37{,}143$; $x_{12} = 4{,}29$; $x_{24} = 5{,}71$.

8.10 $t_{23} = 16$; $t_{34} = 6{,}533$; $t_{кр} = 28{,}533$; $x_{23} = 6{,}67$; $x_{34} = 17{,}33$.

8.11 $t_{12} = 18$; $t_{24} = 12$; $x_{12} = 30$; $x_{24} = 40$; $f(x)_{\min} = 70$.

8.12 $t_{12} = 17$; $t_{34} = 12$; $x_{12} = 30$; $t_{34} = 24$; $f(x)_{\min} = 54$.

8.13 $t_{12} = 20$; $t_{24} = 12$; $x_{12} = 13{,}333$; $x_{24} = 10$; $f(x)_{\min} = 23{,}333$.

8.14 $t_{12} = 20$; $t_{24} = 16$; $x_{12} = 8{,}888$; $x_{24} = 5$; $t_{34} = 16$; $x_{34} = 40$; $f(x)_{\min} = 53{,}888$.

8.15 Задача неразрешима из-за противоречия условий $d_{14} > T_0$ $(30 > 26)$.

8.16 $t_{14} = 36$; $t_{14} = 10$; $f(x)_{\min} = 10$.

8.17 $t_{12} = 18$; $t_{24} = 16$; $x_{12} = 30$; $x_{24} = 20$; $f(x)_{\min} = 50$.

8.18 $t_{12} = 6$; $t_{13} = 14$; $x_{12} = 5$; $x_{13} = 10$; $f(x)_{\min} = 15$.

8.19 $t_{12} = 8; t_{13} = 10; t_{23} = 0; t_{24} = 9; t_{25} = 10; t_{34} = 7; t_{45} = 4; t_{кр} = 21; C = 756$.

8.20 $t_{12} = 3; t_{13} = 3; t_{14} = t_{24} = 2; t_{25} = t_{35} = 5; t_{45} = 3; t_{кр} = 8; C = 1390$.

8.21 $t_{12} = t_{13} = t_{45} = 3; t_{14} = t_{24} = 2; t_{25} = 4; t_{35} = 5; t_{кр} = 8; C = 1014$.

8.22 $t_{12} = t_{45} = 4; t_{23} = t_{24} = 2; t_{13} = 3; t_{34} = 6; t_{кр} = 16; C = 29$.

8.23 $t_{12} = 2; t_{13} = 7; t_{23} = 4; t_{24} = 3; t_{25} = 6; t_{35} = 1; t_{45} = 3; t_{кр} = 8; C = 106$.

8.24 $t_{12} = t_{56} = 7; t_{13} = 3; t_{24} = 4; t_{34} = 8; t_{35} = 6; t_{46} = 5; t_{кр} = 16; C = 142$.

8.25 $t_{12} = 4; t_{13} = t_{34} = 3; t_{24} = 2; t_{25} = t_{56} = 6; t_{45} = 9; t_{46} = 5; t_{кр} = 21; C = 87$.

8.26 Да, уменьшится. Количество неизвестных уменьшится за счет: $t^{о}_{13} = 15$; $t^{н}_{34} = 15$; $t^{о}_{34} = 22$; $t^{н}_{45} = 22$; так как $t_{кр} = 32$ и $\mu_{кр} = (1 - 3 - 4 - 5)$.

8.27 $t_{12} = 20; t_{13} = 17; t_{14} = 28; t_{23} = 0; t_{24} = 16; t_{34} = 12; C_{\min} = 75$.

8.28 $t_{12} = 14; t_{13} = 10; t_{14} = 24; t_{23} = 0; t_{24} = 12; t_{34} = 18; C_{\min} = 159{,}3$.

8.29 $t_{12} = 20; t_{13} = 17; t_{14} = 30; t_{23} = 0; t_{24} = 14; t_{34} = 14; C_{\min} = 170{,}6$.

8.30 $t_{12} = 12; t_{13} = 10; t_{14} = 24; t_{23} = 0; t_{24} = 18; t_{34} = 18; C_{\min} = 636$.

8.31 $t_{12} = 20; t_{13} = 16; t_{14} = 35; t_{23} = 0; t_{24} = 14; t_{34} = 10; C_{\min} = 681$.

8.32 $t_{12} = 20; t_{13} = 16; t_{14} = 30; t_{23} = 0; t_{24} = 10; t_{34} = 10; C_{\min} = 652$.

8.33 $t_{12} = 22; t_{13} = 17; t_{14} = 28; t_{23} = 0; t_{24} = 18; t_{34} = 12; C_{\min} = 272{,}75.$

8.34 $t_{12} = 10; t_{13} = 14; t_{14} = 12; t_{23} = 0; t_{24} = 10; t_{34} = 6; C_{\min} = 780.$

8.35 $t_1 = 0; t_2 = 9; t_3 = 10; t_4 = 14; t_5 = 22; C_{\min} = 747.$

8.36 $t_1 = 0; t_2 = 5; t_3 = 16; t_4 = 22; t_5 = 32; t_6 = 40; C_{\min} = 619.$

8.37 $t_1 = 0; t_2 = 5; t_3 = 14; t_4 = 28; t_5 = 36; t_6 = 44; C_{\min} = 1024.$

8.38 $t_1 = 0; t_2 = 5; t_3 = 14; t_4 = 14; t_5 = 30; t_6 = 38; C_{\min} = 949.$

8.39 $t_1 = 0; t_2 = 11; t_3 = 10; t_4 = 24; t_5 = 29; t_6 = 36; C_{\min} = 1003.$

8.40 $t_1 = 0; t_2 = 8; t_3 = 4; t_4 = 18; t_5 = 26; t_6 = 33; C_{\min} = 1653.$

8.41 $t_1 = 0; t_2 = 6; t_3 = 13; t_4 = 10; t_5 = 30; t_6 = 42; C_{\min} = 971.$

8.42 $t_1 = 0; t_2 = 8; t_3 = 16; t_4 = 14; t_5 = 28; t_6 = 37; C_{\min} = 1270.$

8.43 $t_{12}^{\text{н}} = t_{13}^{\text{н}} = 0, t_{14}^{\text{н}} = t_{25}^{\text{н}} = t_{34}^{\text{н}} = t_{12}^{\text{о}} = t_{13}^{\text{о}} = 6, t_{45}^{\text{н}} = t_{14}^{\text{о}} = t_{34}^{\text{о}} = 10, t_{25}^{\text{о}} = 11, t_{45}^{\text{о}} = 17.$

8.44 $t_{12}^{\text{н}} = t_{14}^{\text{н}} = 0, t_{13}^{\text{н}} = t_{12}^{\text{о}} = 2, t_{23}^{\text{н}} = t_{25}^{\text{н}} = t_{13}^{\text{о}} = t_{14}^{\text{о}} = 5, t_{35}^{\text{н}} = t_{45}^{\text{н}} = t_{23}^{\text{о}} = 8, t_{25}^{\text{о}} = 9, t_{35}^{\text{о}} = t_{45}^{\text{о}} = 10.$

8.45 $t_{13}^{\text{н}} = t_{14}^{\text{н}} = 0, t_{12}^{\text{н}} = t_{13}^{\text{о}} = 6, t_{34}^{\text{н}} = t_{35}^{\text{н}} = t_{14}^{\text{о}} = 8, t_{24}^{\text{н}} = t_{25}^{\text{н}} = t_{12}^{\text{о}} = t_{34}^{\text{о}} = 10, t_{35}^{\text{о}} = 11, t_{45}^{\text{н}} = t_{24}^{\text{о}} = 12, t_{25}^{\text{о}} = 15,$ $t_{45}^{\text{о}} = 16.$

8.46 $t_{12}^{\text{н}} = t_{13}^{\text{н}} = t_{14}^{\text{н}} = 0, t_{24}^{\text{н}} = t_{12}^{\text{о}} = 3, t_{26}^{\text{н}} = t_{36}^{\text{н}} = t_{45}^{\text{н}} = t_{14}^{\text{о}} = t_{24}^{\text{о}} = 6, t_{13}^{\text{о}} = t_{35}^{\text{н}} = 5, t_{35}^{\text{о}} = 8, t_{56}^{\text{н}} = t_{26}^{\text{о}} = t_{45}^{\text{о}} = 10,$ $t_{36}^{\text{о}} = 12, t_{56}^{\text{о}} = 15.$

8.47 $t_{12}^{\text{н}} = t_{13}^{\text{н}} = 0, t_{23}^{\text{н}} = t_{12}^{\text{о}} = 5, t_{24}^{\text{н}} = t_{13}^{\text{о}} = 7, t_{34}^{\text{н}} = t_{35}^{\text{н}} = t_{23}^{\text{о}} = 8, t_{45}^{\text{н}} = t_{24}^{\text{о}} = 11, t_{34}^{\text{о}} = 10, t_{35}^{\text{о}} = t_{45}^{\text{о}} = 13.$

8.48 $t_{12}^{\text{н}} = t_{13}^{\text{н}} = t_{15}^{\text{н}} = 0, t_{15}^{\text{о}} = 2, t_{23}^{\text{н}} = t_{24}^{\text{н}} = t_{26}^{\text{н}} = t_{12}^{\text{о}} = 4, t_{13}^{\text{о}} = t_{35}^{\text{н}} = 7, t_{23}^{\text{о}} = 5, t_{36}^{\text{н}} = t_{46}^{\text{н}} = t_{24}^{\text{о}} = 12, t_{35}^{\text{о}} = t_{56}^{\text{н}} = 9,$ $t_{26}^{\text{о}} = t_{56}^{\text{о}} = 14, t_{36}^{\text{о}} = 15, t_{46}^{\text{о}} = 16.$

8.49 $t_{12}^{\text{н}} = t_{14}^{\text{н}} = 0, t_{13}^{\text{н}} = t_{24}^{\text{н}} = t_{12}^{\text{о}} = 4, t_{26}^{\text{н}} = t_{24}^{\text{о}} = 6, t_{14}^{\text{о}} = t_{26}^{\text{о}} = t_{45}^{\text{н}} = 11, t_{35}^{\text{н}} = t_{13}^{\text{о}} = 14, t_{35}^{\text{о}} = 17, t_{45}^{\text{о}} = t_{56}^{\text{н}} = 20,$ $t_{56}^{\text{о}} = 24.$

8.50 $t_{12}^{\text{н}} = t_{13}^{\text{н}} = 0, t_{23}^{\text{н}} = t_{25}^{\text{н}} = t_{12}^{\text{о}} = 2, t_{13}^{\text{о}} = t_{14}^{\text{н}} = 3, t_{34}^{\text{н}} = t_{35}^{\text{н}} = t_{36}^{\text{н}} = t_{14}^{\text{о}} = t_{23}^{\text{о}} = 7, t_{25}^{\text{о}} = 5, t_{56}^{\text{н}} = t_{35}^{\text{о}} = 9, t_{46}^{\text{н}} = t_{34}^{\text{о}} =$ $= 10, t_{46}^{\text{о}} = 12, t_{36}^{\text{о}} = t_{56}^{\text{о}} = 13.$

8.51 $t_{12}^{\text{н}} = t_{13}^{\text{н}} = 0, t_{13}^{\text{о}} = t_{34}^{\text{н}} = 3, t_{12}^{\text{о}} = t_{24}^{\text{н}} = t_{25}^{\text{н}} = t_{26}^{\text{н}} = 7, t_{34}^{\text{о}} = 6, t_{24}^{\text{о}} = t_{45}^{\text{н}} = 9, t_{26}^{\text{о}} = 11, t_{25}^{\text{о}} = t_{45}^{\text{о}} = t_{46}^{\text{н}} = t_{56}^{\text{н}} = 13,$ $t_{56}^{\text{о}} = 16, t_{46}^{\text{о}} = 18.$

8.52 $t_{12}^{\text{н}} = t_{13}^{\text{н}} = 0, t_{14}^{\text{н}} = t_{13}^{\text{о}} = t_{34}^{\text{н}} = t_{35}^{\text{н}} = 3, t_{12}^{\text{о}} = 6, t_{14}^{\text{о}} = t_{24}^{\text{н}} = t_{34}^{\text{о}} = 7, t_{26}^{\text{н}} = t_{35}^{\text{о}} = 8, t_{24}^{\text{о}} = t_{45}^{\text{н}} = 11, t_{45}^{\text{о}} = t_{56}^{\text{н}} = 17,$ $t_{26}^{\text{о}} = t_{56}^{\text{о}} = 20.$

8.53 $t_{12'}^{\text{н}} = t_{13}^{\text{н}} = 0, t_{12'}^{\text{о}} = t_{14}^{\text{н}} = 4, t_{13}^{\text{о}} = t_{34}^{\text{н}} = 6, t_{2'2}^{\text{н}} = t_{14}^{\text{о}} = 8, t_{2'2}^{\text{о}} = t_{25}^{\text{н}} = t_{34}^{\text{о}} = t_{45}^{\text{н}} = 10, t_{25}^{\text{о}} = 15, t_{45}^{\text{о}} = 17.$

8.54 $t_{12}^{\text{н}} = t_{14'}^{\text{н}} = 0, t_{12}^{\text{о}} = t_{13}^{\text{н}} = t_{14'}^{\text{о}} = t_{23}^{\text{н}} = 2, t_{13}^{\text{о}} = t_{23}^{\text{о}} = t_{25}^{\text{н}} = t_{35}^{\text{н}} = t_{4'4}^{\text{н}} = 5, t_{35}^{\text{о}} = 7, t_{4'4}^{\text{о}} = t_{45}^{\text{н}} = 8, t_{25}^{\text{о}} = 9, t_{45}^{\text{о}} = 10.$

8.55 $t^{\text{н}}_{13'} = t^{\text{н}}_{14'} = 0, t^{\text{н}}_{12} = t^{\text{о}}_{13'} = 4, t^{\text{о}}_{14'} = t^{\text{н}}_{3'3} = 6, t^{\text{о}}_{12} = t^{\text{н}}_{25} = t^{\text{о}}_{3'3} = t^{\text{н}}_{34} = t^{\text{н}}_{35} = t^{\text{н}}_{4'4} = 8, t^{\text{н}}_{24} = t^{\text{о}}_{34} = t^{\text{о}}_{4'4} = 10, t^{\text{о}}_{35} = 11,$
$t^{\text{о}}_{24} = t^{\text{н}}_{45} = 12, \; t^{\text{о}}_{25} = 13, t^{\text{о}}_{45} = 16.$

8.56 $t^{\text{н}}_{12} = t^{\text{н}}_{13} = t^{\text{н}}_{14} = 0, t^{\text{о}}_{12} = t^{\text{н}}_{24} = 3, t^{\text{о}}_{13} = t^{\text{н}}_{35} = 5, t^{\text{о}}_{14} = t^{\text{о}}_{24} = t^{\text{н}}_{26} = t^{\text{н}}_{36} = t^{\text{н}}_{45} = 6, t^{\text{о}}_{35} = 8, t^{\text{о}}_{26} = t^{\text{о}}_{45} = t^{\text{н}}_{56} = 10,$
$t^{\text{о}}_{36} = 12, t^{\text{о}}_{56} = 15.$

8.57 См. ответ к задаче 8.47.

8.58 $t^{\text{н}}_{12} = t^{\text{н}}_{13} = t^{\text{н}}_{15} = 0, t^{\text{о}}_{15} = 2; t^{\text{о}}_{12} = t^{\text{н}}_{23} = t^{\text{н}}_{24} = t^{\text{н}}_{26} = 4, t^{\text{о}}_{23} = 6, t^{\text{о}}_{13} = t^{\text{н}}_{35} = 7, t^{\text{о}}_{35} = t^{\text{н}}_{56'} = 9, t^{\text{о}}_{24} = t^{\text{н}}_{36''} = t^{\text{н}}_{46^*} =$
$= t^{\text{о}}_{56'} = 12, t^{\text{о}}_{26} = t^{\text{о}}_{36''} = t^{\text{н}}_{6'6} = 14, t^{\text{о}}_{46^*} = t^{\text{н}}_{6''6} = 15, t^{\text{о}}_{6'6} = t^{\text{о}}_{6''6} = t^{\text{н}}_{6^*6} = 16, t^{\text{о}}_{6^*6} = 17.$

9. Потоки в сетях

9.1 $(R^*, \overline{R}^*) = \{(E_3, E_9), (E_5, E_7), (E_5, E_9), (E_4, E_7), (E_6, E_7), (E_6, E_8)\}, V = 65.$

9.2 $\mu_1 = (E_1 - E_4 - E_5 - E_9), \mu_2 = (E_2 - E_4 - E_7 - E_8).$

9.3 $x_{01} = 2, x_{13} = x_{35} = x_{14} = x_{45} = 1, f_{\min} = 69$ ден. ед.

Раздел IV

10. Методы решения матричных игр

10.1 1) $\alpha = \beta = \gamma = 4, (3; 2)$; 2) $\alpha = \alpha_2 = 4, \beta = \beta_1 = 5$, седловой точки нет.

10.2 1) Исключаются последовательно 3-я и 4-я стратегии игрока II и 1-я и 4-я стратегии игрока I, остается $H = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$;

2) Исключаются все стратегии, кроме 5-й игрока I и 3-й игрока II, получаем $\gamma = 6$, $p^*_{\text{I}} = (0, 0, 0, 0, 1)$, $q^*_{\text{II}} = (0, 0, 1, 0)$.

10.3 1) $p^*_{\text{I}} = (3/7, \; 0, 4/7), q^*_{\text{II}} = (0, \; 0, 1/7, 6/7), \gamma = 39/7.$

2) $p^*_{\text{I}} = (1/2, 1/2, 0, 0), q^*_{\text{II}} = (1/4, 3/4, 0, 0), \gamma = 9/2.$

10.4 $p^*_{\text{I}} = (0, 0, 0, 1), p^*_{\text{II}} = (0, 0, 0, 1), \gamma = 0.$

10.5 $p = (0{,}455; 0{,}545), v = 335{,}45$ ден. ед.

10.6 $p = (0{,}115; 0{,}283; 0{,}305; 0{,}297), \; q = (0{,}376; 0{,}052; 0{,}286; 0{,}286), \gamma = 2{,}048$ ден. ед.

10.7 $p = (0{,}67; 0{,}33; 0), v = 12{,}67$ ден. ед.

11. Игры с природой

11.1 По Вальду 2-я стратегия, $\alpha = \alpha_2 = 110$ тыс. ден. ед.
По Сэвиджу 4-я стратегия, $r = r_4 = 20$ тыс. ден. ед.

11.2 Первая стратегия, $\alpha = \alpha_1 = 30$ тыс ден. ед.

11.3 Вторая стратегия, $\alpha = \alpha_2 = 5{,}0$ млн ден. ед.

11.4 По Вальду и Сэвиджу прервая стратегия, $\alpha = \alpha_1 = 45$ млн ден. ед., $r = r_1 = 0$.

Раздел V

12. Нелинейное программирование

12.1 $x_1 = 25{,}5; x_2 = 8{,}25; f_{\max} = 17\,73{,}17$.

12.2 $x_1 = 4{,}8; x_2 = 2{,}4; f_{\min} = -67{,}2$.

12.3 $x_1 = 70; x_2 = 71; f_{\min} = 10\,222$.

12.4 $x_1 = 3; x_2 = 1; f_{\max} = 3$.

13. Стохастическое программирование

13.1 а) Для расширенной транспортной сети: $x_{1,j} = 0(j = \overline{1,9}); x_{1,10} = 5; x_{1,11} = 5, x_{2,j} = 0(j = \overline{1,5})$;
$x_{2,j} = 1(j = \overline{6,8}); x_{2,j} = 0(j = \overline{9;11}); x_{3,j} = 1(j = \overline{1,2}), x_{3,j} = 0(j = \overline{3,9}); x_{3,10} = 2; x_{3,11} = 0$,
$x_{4,j} = 0(j = 1,2); x_{4,j} = 1(j = \overline{3,5}); x_{4,j} = 0(j = \overline{6,8}); x_{4,9} = 1; x_{4,10} = x_{4,11} = 0, F_{\min} = 58$.

Это решение, отнесенное к исходной транспортной сети с тремя базами и четырьмя регионами, следующее: $x_{13} = x_{14} = 5; x_{22} = 3; x_{31} = 2, x_{33} = 2$. Затраты на перевозку грузов $f_{\min} = 53$ и штраф за неудовлетворение спроса равен 5 единицам, в том числе за неудовлетворение спроса 1-го региона — 4 единицам и второго — 1 единице, что суммарно составляет $F_{\min} = 58$.

б) При $\beta_1 = 2/3, B_1 = 3$ и $\beta_2 = 3/4, B_2 = 1; x_{11} = 0, x_{12} = 0, x_{13} = 6, x_{14} = 4; x_{21} = 0; x_{22} = 2;\ x_{23} = 0;$ $x_{24} = 1; x_{31} = 3, x_{32} = 0, x_{33} = 1; x_{34} = 0, f(x)_{\min} = 56$; при $\beta_1 = 1, B_1 = 1$ и $\beta_2 = 1/4, B_2 = 4;\ x_{12} = 1,$ $x_{13} = 4, x_{14} = 5, x_{22} = 3, x_{31} = 1, x_{33} = 3$, все остальные $x_{ij} = 0$, $f(x)_{\min} = 57$.

13.2.1 а) $x_1 = 200; x_2 = 150; x_3 = 50; f_{\max} = 1250$.
б) $x_1 = 169{,}34; x_2 = 128{,}35; x_3 = 41{,}26; f_{\max} = 1062{,}67$.
в) $x_1 = 216{,}67; x_2 = 66{,}67; x_3 = 133{,}33; f_{\max} = 1050$.

13.2.2 а) $x_1 = 210{,}12; x_2 = 163{,}49; x_3 = 57{,}37; f = 1337{,}694$.
б) $x_1 = 220; x_2 = 160; x_3 = 55; f_{\max} = 1355; P[f(x)]_{\max} = 0{,}712$.
в) $x_1 = 214{,}6; x_2 = 160{,}9; x_3 = 50{,}3; f = 1337{,}7$.
г) $x_1 = 398{,}79; x_2 = 30{,}06; x_3 = 152{,}9; f = 1469{,}53; P[f(x)]_{\max} = 0{,}88$.

14. Векторная оптимизация

14.1.1 $f_1 = 1600,\ f_2 = 2360,\ f_3 = 1468{,}75; x_1 = 21{,}25,\ x_2 = 59{,}375,\ x_3 = 30$.

$f_1 = 1600,\ f_2 = 2360;\ f_3 = 1468{,}75,\ x_1 = 21{,}5;\ x_2 = 59{,}375,\ x_3 = 30$.

14.1.2 $f_{1\max} = 1740,\ f_2 = 2500,\ f_3 = 1600;\ x_1 = 30,\ x_2 = 55,\ x_3 = 30$.

14.1.3 $f_1 = 1995{,}5,\ f_2 = 3165{,}0,\ f_3 = 1946{,}0;\ x_1^{(0)} = 42,\ x_2^{(0)} = 15,\ x_3^{(0)} = 64$.

14.1.4 $f = x_4 = 0{,}5576;\ f_1 = 961{,}474;\ f_2 = 1735{,}3;\ f_3 = 934{,}56;\ x_1^{(0)} = 0;\ x_2^{(0)} = 33{,}46;\ x_3^{(0)} = 40$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 1986.
2. *Вагнер Г.* Основы исследований операций: В 3 т. М.: Мир, 1973.
3. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972.
4. *Гарнаев А.Ю.* Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах. СПб.: БХВ-Санкт-Петербург, 1999.
5. *Гойзман Э.И.* Методы количественного обоснования решения. М.: АНХ при Совете Министров СССР, 1988.
6. *Горчаков А.А., Орлова И.В.* Компьютерные экономико-математические модели. М.: Компьютер, 1995.
7. *Гринберг А.С., Шестаков В.М.* Информационные технологии моделирования процессов управления экономикой. Мн.: Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 1998.
8. *Додж М.* и др. Эффективная работа с Microsoft Excel 2000. Питер, 2000.
9. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций. Киев: Вища школа, 1979.
10. *Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.* Математические методы в экономике. М.: ДИС, 2001.
11. *Кавалёў М.М., Пісарук М.М.* Сучаснае лінейнае праграмаванне. Мн.: Выдавецкі цэнтр Белдзяржуніверсітэта, 1998.
12. Компьютерные системные технологии управления. Основные задачи оптимального управления для менеджеров / А.С. Гринберг, В.М. Шестаков и др. Мн.: Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 1996.
13. *Костевич Л.С., Лапко А.А.* Теория игр. Исследование операций. Мн.: Вышэйш. шк., 1982.
14. *Красс М.С.* Математика для экономических специальностей. М.: ИНФРА-М., 1998.
15. *Кузнецов А.В., Холод Н.И.* Математическое программирование. Мн.: Вышэйш. шк., 1984.
16. *Курицкий Б.Я.* Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. СПб.: БХВ-Санкт-Петербург, 1997.
17. *Максимей И.В.* Имитационное моделирование на ЭВМ. М.: Радио и связь, 1988.
18. Математическая экономика на персональном компьютере / Под ред. М. Кубонива. М.: Финансы и статистика, 1991.
19. *Маршал Джон, Бансал Викул К.* Финансовая инженерия. М.: ИНФРА-М, 1998.
20. Основы современных компьютерных технологий / Под ред. А.Д. Хомоненко. СПб.: Корона-принт, 2002.
21. *Полунин И.Ф.* Курс математического программирования. Мн.: Вышэйш. шк., 1975.
22. *Тарасевич В.М.* Экономико-математические методы и модели в ценообразовании. 2-е изд. Л.: ЛФЭИ, 1991.
23. Экономико-математические методы для руководителя / П.В. Авдулов, Э.И. Гойзман, В.А. Кутузов и др. М.: Экономика, 1984.
24. *Якубайтис Э.А.* Информационные сети и системы. М.: Финансы и статистика, 1996.

ОГЛАВЛЕНИЕ